الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية بجاية

وزارة التربية الوطنية

ثانوية الحمادية – بجاية

امتحان البكالوريا التجريبي

دورة : ماي 2019

الشعبة : رياضيات

المدة : 4سا و 30 دقيقة

أختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4 نقاط)

كيس يحتوي على 9 كريات لا نميز بينها باللمس منها 5 حمراء مرقمة بالأرقام 1، 1 ، 1 ، 3 ، 3 و 4 كريات سوداء مرفمة كلها بالرقم 2

❖ نسحب عشوائيا في ان واحد كريتين من الكيس.

1/ أحسب احتمالات الأحداث الاتية: A " الكريات مختلفة الألوان "

B " الكريات من اللون الأحمر"

C " الكريات تحمل نفس الرقم علما انها حمراء "

2/ نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب مجموع الأرقام التي تظهر على الكريات .

أ/ حدد قانون احتمال X

ب/ أحسب الأمل الرياضياتي لـ X

3/ نفرض أن عملية السحب نعيدها 4 مرات متتالية وفي كل مرة نعيد الكريتين المسحوبتين الى الكيس ونعتبر المتغير العشوائي Y

الذي يرفق بكل عملية عدد مرات الحصول على كريتين مختلفتين في اللون . حدد قانون احتمال Y

التمرين الثاني : (4 نقاط)

(u_n) و (v_n) المتتاليتين العدديتين المعرفتين بـ : $u_0=5$ ، $u_1=31$ ، $v_0=-1$ و $v_1=-11$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{cases} u_{n+2}=12u_{n+1}-35u_n \\ v_{n+2}=12v_{n+1}-35v_n \end{cases}$$

ولتكن المتتاليتين العدديتين (x_n) و (y_n) المعرفتين من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $x_n=u_n+v_n$ و $y_n=u_n-v_n$

1/ أحسب x_0 و x_1 ثم برهن أن المتتالية (x_n) هندسية أساسها 5

2/ برهن أن المتتالية (y_n) هندسية بنفس طريقة السؤال 1/

3/ أحسب x_n و y_n بدلالة n ثم عبرعن u_n و v_n بدلالة n .

4/ من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $d_n = p\gcd(u_n;u_{n+1})$

أ/ ماهي القيم الممكنة لـ d_n ب/ هل u_n و u_{n+1} اوليان فيما بينهما ؟

التمرين الثالث :(5 نقاط)

ليكن r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي حيث $0 \le \theta \le \pi$ ومن أجل كل عدد طبيعي n نضع :

$$Z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(Z_n + |Z_n|\right) \text{ و } Z_0 = re^{i\theta} \text{ ونضع : } u_n = |Z_n|$$

الجزء الأول :

1/ نضع : $\theta = 0$ و $Z_0 = r$ أحسب : Z_1 ، Z_2 و Z_3 ثم ضع تخمينا حول العدد المركب Z_n ثم برهن صحة التخمين بالتراجع .

2/ نضع : $\theta = \pi$ و $Z_0 = -r$ أحسب : Z_1 ، Z_2 و Z_3 ثم ضع تخمينا حول العدد المركب Z_n ثم برهن صحة التخمين بالتراجع .

الجزء الثاني : نضع : $0 < \theta < \pi$

1/ برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة ، ثم أستنتج أنها متقاربة .

2/ أ) برهن أن من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{ix} + 1 = 2e^{i\frac{x}{2}} \cos\frac{x}{2}$

ب) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $Z_n = \dfrac{r\sin\theta}{2^n \sin\frac{\theta}{2^n}} e^{i\frac{\theta}{2^n}}$

ج) أستنتج $\mathrm{Re}(Z_n)$ و $\mathrm{Im}(Z_n)$ بدلالة n .

3/ حدد النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty}[\mathrm{Im}(Z_n)]$

4/ أ) برهن أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}(2^n \sin\frac{\theta}{2^n}) = \theta$

ب) أستنتج : $\lim\limits_{n\to+\infty}[\mathrm{Re}(Z_n)]$ ثم أحسب النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الرابع :(7 نقاط)

1/ g الدالة العددية لمتغير حقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 e^x$

. أدرس اتجاه تغير الدالة g على $]0;+\infty[$ ثم أستنتج أنه أذا كان $0<x<1$ فان $g(x)<g(\frac{1}{x})$ واذا كان $x>1$ فان $g(x)>g(\frac{1}{x})$

/2 f الدالة العددية لمتغير حقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بــ : $f(x)=(x^2-2x+2)e^x+e^{\frac{1}{x}}-3e$

(c_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$

. بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)-g(\frac{1}{x})$ ثم أحسب $f'(1)$ وشكل جدول تغيرات f

/3 h الدالة العددية لمتغير حقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بــ : $h(x)=e^{\frac{1}{x}}-3e$ و (c_h) تمثيلها البياني (أنظر الملحق)

أ) بين أن المعادلة : $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل حلين α و β حيث $0,5<\alpha<0,6$ و $1,5<\beta<1,6$ ثم أستنتج أن المنحنى (c_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين .

ب) أدرس وضعية المنحنى (c_f) بالنسبة للمنحنى (c_h) .

ت) بين أن المنحنى (c_f) يقبل مماسا (T) في النقطة ذات الفاصلة 1 يطلب كتابة معادلة له . ثم أنشئ (T) و (c_f) .

/4 m عدد حقيقي موجب تماما ، جد بيانيا قيم m التي من أجلها المعادلة $f(x)=(m^2-2m+2)e^m+h(m)$ تقبل حلين متمايزين

/5 أ) بين أن من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $\int_1^x [f(t)-h(t)]dt=(x^2-4x+6)e^x-3e$

ب) λ عدد حقيقي من المجال $]0;1]$ و $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (c_f) و (c_h) والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=\lambda$ و $x=1$

❖ أستنتج $A(\lambda)$ مقدرة بوحدة المساحة ثم أحسب النهاية $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} A(\lambda)$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

❖ نعتبر المعادلة (E_n) ذات المجهولين الصحيحين x و y الاتية : $645x-195y=13^n-54n-1$ حيث n عدد طبيعي .

1/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة العدد 13^n على 15 ثم عين قيم n التي من أجلها المعادلة (E_n) تقبل حلولا .

2/ أ) تحقق أن الثنائية $(1;3)$ حل للمعادلة (E_2) ثم حل المعادلة (E_2) .

ب) العدد الطبيعي A يكتب $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}$ في النظام ذي الأساس 6 ويكتب $\overline{\beta 0444}$ في النظام ذي الأساس 5

- عين العددين α و β ثم أكتب A في النظام العشري .

ج) في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر المستقيم (Δ) المعرف بتمثيله الديكارتي كما يلي :

$$\begin{cases} 3x-y-12z=0 \\ x-y-90z+2=0 \end{cases}$$

. بين أن احداثيات نقط المستقيم (Δ) تحقق المعادلة (E_2) ثم أستنتج مجموعة النقط M من (Δ) التي احداثياتها أعداد صحيحة

التمرين الثاني : (4 نقاط)

❖ المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n=\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$

1/ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0;1]$ بـ : $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

- أحسب $f'(x)$ ثم أستنتج الحد الأول u_0

2/ أ) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة ثم أستنتج أنها متقاربة .

ب) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n غير المعدوم : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \le u_n \le \frac{1}{(n+1)}$.........(1) ثم أستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

3/ من أجل $n\ge 3$ نضع $I_n=\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx$

أ) تحقق أن من أجل $n\ge 3$: $u_n+u_{n-2}=I_n$

ب) باستعمال التكامل بالتجزئة على I_n بين أن من أجل $n\ge 3$: $nu_n+(n-1)u_{n-2}=\sqrt{2}$

ت) أستنتج أن من أجل $n \geq 3$: $(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}$............(2)

ج) بوضع $v_n = nu_n$ وباستعمال المتباينتين (1) و (2) بين أن (v_n) متقاربة نحو عدد حقيقي يطلب تعيينه .

التمرين الثالث :(5 نقاط)

I. $P(z)$ كثير حدود بمتغير مركب z معرف بـ : $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$

1/ جد الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من اجل كل عدد مركب : $P(z) = (z+3)(az^2 + bz + c)$

2/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 0$

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $\left(o;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب z_A ، z_B و z_C حيث : $z_A = -1$ ، $z_B = 1+i$ و $z_C = \overline{z_B}$

1/ S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة $M'(z')$ حيث : $z' = (1+i)z + i$

أ) ما طبيعة التحويل S ؟ جد عناصره المميزة .

ب) من أجل M تختلف عن A أحسب الجداء السلمي : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MM'}$ ثم حدد طبيعة المثلث AMM'

2/ ليكن n عدد طبيعي و M_n نقطة من المستوي تختلف عن A لاحقتها العدد المركب z_n

- نضع النقطة M_0 تنطبق على المبدأ O ومن أجل كل عدد طبيعي n : $M_{n+1} = S(M_n)$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n = (1+i)^n - 1$

ب) جد قيم العدد الطبيعي n حتى تكون النقط O ، A و M_n في استقامية .

التمرين الرابع :(7 نقاط)

❖ الجزء الأول : φ الدالة العددية لمتغير حقيقي x المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $\varphi(x) = \ln|1+x| - \dfrac{x}{1+x}$

1/ أدرس تغيرات الدالة φ وشكل جدول تغيراتها .

2/ أ) بين أن من أجل كل x من المجال $[1;2]$: $|\varphi(x)| < 0,45$

ب) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد من المجال $]-\infty;-1[$ نرمزاليه α حيث $\varphi(\alpha) = 0$ ، ثم تحقق أن : $-4,6 < \alpha < -4,5$

ث) وأستنتج اشارة $\varphi(x)$

❖ **الجزء الثاني :**

f و g دالتيين معرفتين على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln|1+x|}{x}\,;x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} g(x)=|1+x|^{\frac{1}{x}}\,;x\neq 0 \\ g(0)=e \end{cases}$$

(c_f) و (c_g) التمثيليين البيانيين لهما على الترتيب في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$

1/ أ) بين أن f و g مستمرتين عند الصفر

ب) نقبل أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند الصفر وأن : $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$ بين أن g قابلة للاشتقاق عند الصفر وأن :

$$g'(0)=-\frac{e}{2}$$

2/ أدرس تغيرات كل من f و g وشكل جدول تغيراتهما .

3/ أنشئ المنحنيين (c_f) و (c_g)

4/ أ) بين أن من أجل كل x من المجال $[1;2]$: $g(x)\in[1;2]$

ب) بملاحظة أن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*-\{-1\}$: $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\varphi(x)g(x)$

- تحقق أن من اجل كل x من $[1;2]$: $|g'(x)|<0,9$

انتهى الموضوع الثاني

انشاء الله موفقون في البكالوريا