الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية للجزائر وسط

إمتحان البكالوليا التجريبي — دورة ماي 2019

الشعبة : رياضيات — ثانوية سعد دحلب-القبة

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة : 4 سا

على المترشح اختيار احد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

من اجل العدد الطبيعي n نعرف المعادلة (E_n) التالية: $645x-195y=13^n-54n-1$، حيث x و y عددين صحيحين.

1. أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 13^n على15 .

ب) عين مجموعة قيم الطبيعي n التي من اجلها العدد المعادلة (E_n) تقبل حلول.

2. تحقق ان الثنائية $(1;3)$ حل للمعادلة (E_2) ثم حل المعادلة (E_2).

3. عين العددان الطبيعيان α و β علما أنه في النظام ذي الأساس 6 ،العدد a يكتب على الشكل $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}$ ويكتب على الشكل $\overline{\beta 0444}$ في النظام ذي الأساس 5.

4. الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;I;J;K)$

أ) أثبت ان مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $(3x-y-12z)^2+(x-y-90z+2)^2=0$ هي لمستقيم (Δ).ثم اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) الذي يحوي (Δ) ويشمل النقطة $A(1;3;0)$.

ب) بين ان احداثيات نقط المستقيم (Δ) تحقق المعادلة (E_2) ثم استنتج مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من المستقيم (Δ) التي احداثياتها اعداد صحيحة.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفةعلى $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin(x)\,dx$

1- باستعمال البرهان بالتراجع بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $\cos(n\pi)=(-1)^n$.

2- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n=(-1)^n\dfrac{e^{-\pi}+1}{2}e^{-n\pi}$

ب) بين ان المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

3- من اجل العدد طبيعي n نعرف المجموع S_n كما يلي : $S_n=1+\dfrac{u_1}{u_0}+\left(\dfrac{u_2}{u_1}\right)^2+...+\left(\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\right)^n$.

- أكتب S_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

4 – عبر بدلالة n الجداء P_n المعرف على $\mathbb{N}$ بـ : $P_n=u_0\times u_1\times...\times u_n$

التمرين الثالث: (05نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1- ليكن العدد المركب β بحيث: $\beta = 4\sqrt{2}\,(1+i)$

أ) أكتب العدد β على الشكل الأسي والمثلثي .

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^3 = \beta .....(1)$.

جـ) بين انه اذا كان : z_1 ، z_2 و z_3 حلول المعادلة (1) فإن: $\dfrac{z_1 \times z_2}{(z_3)^2} = \dfrac{z_1 \times z_3}{(z_2)^2} = \dfrac{z_2 \times z_3}{(z_1)^2}$

2- لتكن النقط A ، B ، C ، D و H التي لاحقتها على الترتيب: $z_A = \alpha$ ، $z_B = e^{i2\pi} + \dfrac{\alpha - 1}{\alpha} i$ ،
$z_C = \alpha e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_D = -\dfrac{1}{\alpha} i$ و $z_H = 1 + z_D$ حيث : α عدد حقيقي موجب تماما يختلف عن 1.

أ) تحقق ان : $z_B - z_D = \overline{z_D}\left(z_A - z_c\right)$ ثم بين ان: $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(z_B - z_D\right)\right]^{2016} = i z_A \times z_D$

ب) استنتج ان المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان.

جـ) بين انه يوجد تحويل نقطي f يحول النقطة A إلى B ويحول النقطة C إلى D يطلب تعيين عناصره المميزة.

د) بين ان المثلثين OAC و BHD متشابهان،ثم احسب مساحتيهما.

3- عين مجموعة النقط (Γ) للنقط M ذات الاحقة z حيث : $\arg\left(\overline{z} + i\alpha\right) = -\arg\left(z_A - z_C\right) + 2k\pi$
$k \in \mathbb{Z}$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

k حيث عدد حقيقي موجب تماما.

I. g_k دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g_k(x) = 1 + (1 + kx)e^{kx}$.

1- ادرس اتجاه تغير الدالة g_k على $\mathbb{R}$ مشكلا جدول تغيراتها.

2- استنتج اشارة $g_k(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. f_k دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_k(x) = x - 1 + xe^{kx}$.

(C_k) تمثيلها البياني في المتجانس و المتعامد المعلم في $(O;I;J)$. حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$

1- أ) بين ان جميع المنحنيات (C_k) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين احداثيتيها.

ب) احسب: $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x)$.

جـ) بين ان جميع المنحنيات (C_k) تقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) ثابت يطلب كتابة معادلته. ثم ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_k) و المستقيم (Δ).

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f_k على $\mathbb{R}$ مشكلا جدول تغيراتها.

3- أ) بين ان جميع المنحنيات (C_k) تقبل مماس (T) معادلته $y = 2x - 1$ عند الفاصلة x_0 يطلب تعيينها.

ب) عين احداثيات I نقطة انعطاف للمنحنيات (C_k).

4- أ) بين ان المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0 \le \alpha \le 1$.

ب) بين ان المسافة بين النقطة $N(\alpha; f_1(\alpha))$ و المستقيم (Δ) تساوي $\dfrac{\alpha e^{\alpha}}{\sqrt{2}}$

5- بين انه من اجل كل عدد حقيقي x فإن: $f_k(x) + f_{-k}(-x) = -2$.ماذا تستنتج؟

6- أنشئ كل من : (Δ)، (T)، (C_1) و (C_{-1}) في نفس المعلم

انتهى الموضوع الأول.
بالتوفيق

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

I. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $6x+7y=57...(E)$

II. الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;I;J;K)$

المستويات (P_m) ذي المعادلة: $(m+1)x+(m+2)y+(m+3)z-57=0$ حيث $m\in\mathbb{R}$

1- أثبت ان جميع المستويات (P_m) تتقاطع في مستقيم (Δ) يطلب كتابة تمثيلا وسيطيا له.

2- ناقش حسب قيم الوسيط تقاطع المستويات (P_m) وسطح الكرة (S) ذو المعادلة: $x^2+y^2+z^2+2y-6z-15=0$

3- ليكن المستقيم (D) تقاطع المستوي (P_5) مع المستوي (O,I,J)

أ) بين انه توجد نقطة وحيدة من (D) احداثياتها أعداد طبيعية.

ب) $N(x_0;y_0;z_0)$ نقطة من المستوي (P_5) حيث x_0 ، y_0 و z_0 أعداد طبيعية. بين ان $y_0=2k+1$ حيث $k\in\mathbb{N}$

ج) عين باقي قسمة العدد $(k+z_0)$ على 3

د) p عدد طبيعي حيث : $3p=k+z_0-1$ بين ان : $x_0+k+4p=7$ ثم استنتج القيم الممكنة للعدد p.

و) استنتج كل النقط N من المستوي (P_5) ذات الإحداثيات الطبيعية.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

كيس U_1 يحتوي على n كرة بيضاء (n عدد طبيعي غير معدوم) و3 كرات سوداء .

كيس U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين و كرة سوداء.

كرات الكيسين متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس.

نعرف اللعبة التالية :نسحب عشوائيا من الكيس U_1 كرة واحدة ونضعها في الكيس U_2 ثم نسحب عشوائيا من الكيس U_2 كرة واحدة ونضعها في الكيس U_1.

I. 1- احسب احتمال ان يسترجع الكيسين كرتاهم الإبتدايية.

2- ما هو احتمال ان تكون الكرة بيضاء واحدة فقط في الكيس U_2.

II. نضيف الى اللعبة مايلي:

اللاعب يدفع $200DA$ قبل بداية اللعبة

اللاعب يتحصل على $20\times n\ DA$ اذا كان في الكيس U_2 كرة بيضاء واحدة.

اللاعب يتحصل على $10\times n\ DA$ اذا كان في الكيس U_2 كرتين بيضاوين .

اللاعب لا يتحصل على مبلغ اذا كان في الكيس U_2 3 كرات بيضاء.

X المتغير العشوائي الذي يرفق بقيمة المبلغ المتحصل عليه (ربح أو خسارة)

1- أكتب قانون احتمال X . ثم احسب $E(X)$.

2- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ربح وخسارة الاعب .

التمرين الثالث: (05نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

I. m عدد حقيقي غير معدوم.

1- نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E): z^3-(4+mi)z^2+(13+4mi)z-13mi=0$

بين ان المعادلة (E) تقبل حلا تخيلا صرفا. ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

2- لتكن النقطتان A و B التي لاحقتها على الترتيب: $z_A=mi$ و $z_B=2+3i$

أ) بين ان لاحقة C صورة B بالتشابه S الذي مركزه A و نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ هي : $z_C=\left(\frac{m-1}{2}\right)+i\left(\frac{5+m}{2}\right)$

ب) عين z_E لاحقة النقطة E صورة D لاحقتها $z_D=5$ بالدوران R الذي مركزه I منتصف $[AB]$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

جـ) أكتب العدد $\frac{z_D-z_A}{z_E-z_C}$ على الشكل الأسي. ثم فسر النتيجة هندسيا

II. نضع : $m=1$

1- نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z حيث $Z\neq Z_A$ النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث $Z'=\frac{\overline{Z}(Z-i)}{\overline{Z}+i}$

أ) أثبت انه اذا كان : $Z\neq 0$ و $Z'\neq 0$ فإن: $\begin{cases}|Z'|=|Z|\\ \arg(Z')\equiv 2\arg(Z-i)-\arg(Z)[2\pi]\end{cases}$

ب) بين انه اذا كان : $|Z|=1$ فإن: $Z'=-i$

2- عين مجموعة النقط (Γ) للنقط M حيث Z' تخيلي صرف.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

n عدد طبيعي غير معدوم .

f_n دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $\begin{cases}f_n(x)=x(1-\ln x)^n ; x>0\\ f(0)=0\end{cases}$.

(C_n) تمثيلها البياني في المتجانس و المتعامد المعلم في $(O;I;J)$. حيث $\|\vec{i}\|=2cm$

I. 1- أ) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على يمين 0 .

ب) احسب: $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f_2(x)$.

2 - ادرس اتجاه تغير الدالتين f_1 و f_2 على $\mathbb{R}$ مشكلا جدول تغيراتها.

3- أ) بين ان للمنحنى (C_2) نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثييها.

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) ثم انشئ كل (C_1) و (C_2) من في نفس المعلم.

II. نعتبر الدالة F المعرفة على $]-\infty;0]$ كما يلي : $F(x)=\int_{e^x}^{1}\frac{f_1(t)}{1+t^2}dt$

1- أ) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0]$ فإن: $F'(x)=\frac{(x-1)e^{2x}}{(1+e^{2x})}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة F على $]-\infty;0]$.

2 - أ) بين انه من اجل كل $x\leq 0$ فإن: $\frac{1}{2}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt\leq F(x)\leq\frac{1}{(1+e^{2x})}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt$

ب) بين انه $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt\right)=\frac{3}{4}$

III. (u_n) متتالية عددية معرفةعلى $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n=\int_{1}^{e}f_n(x)dx$

1- أ)بين انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n\geq 0$.

ب)ادرس اشارة $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ على المجال $[1;e]$ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .ماذا تستنتج؟

2- أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{(n+1)}{2}u_n$

ب) استنتج مساحة الحيز المحصور بين (C_1) و (C_2) و المستقيمين $x=1$ و $x=e$

3- بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 2$: $\frac{1}{n+1}\leq u_n\leq\frac{1}{n-1}$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$

انتهى الموضوع الثاني.

بالتوفيق