

الفرض الاول فى الثلاثى الاول فى مادة الرياضيات

g دالة معرفة على R بـ $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1/ ادرس تغيرات الدالة g

2/ بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 \leq \alpha \leq 2.25$

3/ استنتج اشارة $g(x)$

f دالة معرفة على $R - \{-1, 1\}$ بـ $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1}$

1/ احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف

2/ برهن انه من اجل كل عدد حقيقي x من $R - \{-1, 1\}$ لدينا : $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$

3/ ادرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

4/ برهن ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب مائل لـ C_f بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

5/ ادرس الوضع النسبي بين C_f و (Δ) .

6/ بين ان : $f(\alpha) = 1 + \frac{3\alpha+6}{\alpha^2-1}$ ثم استنتج حصر لـ : $f(\alpha)$

7/ بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α' حيث $-1.5 \leq \alpha' \leq -1.25$

8/ ارسم C_f و (Δ)

k دالة معرفة على $R - \{\alpha'\}$ بـ : $k(x) = \frac{1}{f(x)}$

9/ ادرس تغيرات الدالة k ثم ارسم منحناها

h دالة معرفة على $R - \{0, -2\}$ بـ : $h(x) = f((x+1)^2)$

10/ ادرس تغيرات الدالة h وشكل جدول تغيراتها .

11/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m حلول المعادلة $f(x) = |m - 1|$.

12/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m حلول المعادلة $f(\cos(\theta)) = \frac{1}{m}$ حيث : $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

13/ / ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط θ حلول المعادلة $f(x) = \sin(\theta)$.

التصحيح النموذجي للفرض الاول 3 عت 1 من اعداد الاستاذ زرقى وليد

g دالة معرفة على R بـ $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1/ دراسة تغيرات الدالة g

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

• النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

• الدالة المشتقة : g دالة قابلة للاشتقاق على R : $g'(x) = 3x^2 - 3$

• إشارة الدالة المشتقة :

$$3x^2 - 3 = 0$$

نجد : $x = -1$ او $x = 1$

| | | | | |
|---------|-----------|------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -1 | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | + | - | + |
| $f(x)$ | | -4 | -8 | $+\infty$ |

2/ اثبات ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 \leq \alpha \leq 2.25$

• من جدول التغيرات مستمرة ورتيبة على المجال $[2; 2.25]$

• لدينا : $g(2) = -2$ و $g(2.25) = 0.64$ ومنه فان : $g(2) \cdot g(2.25) \leq 0$

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 \leq \alpha \leq 2.25$

3/ استنتاج إشارة $g(x)$

من جدول التغيرات لدينا :

$x \in]-\infty; \alpha[$ لدينا : $g(x) \leq 0$

$x = \alpha$ لدينا : $g(x) = 0$

$x \in]\alpha; +\infty[$ لدينا : $g(x) \geq 0$

| | | | |
|--------|-----------|----------|-----------|
| x | $-\infty$ | α | $+\infty$ |
| $g(x)$ | | - | + |

f دالة معرفة على $R - \{-1, 1\}$ بـ $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1}$

1/ حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty$$

$x = -1$ مستقيم مقارب عمودي لـ C_f بجوار $-\infty$ و $+\infty$

$x = 1$ مستقيم مقارب عمودي لـ C_f بجوار $-\infty$ و $+\infty$

2/ الدالة المشتقة

f دالة قابلة للاشتقاق على $R - \{-1, 1\}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 + 2x)(x^2 - 1) - 2x(x^3 + x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{3x^4 - 3x^2 + 2x^3 - 2x^2 - (2x^4 - 2x^3 - 2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2 - 6x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{x(x^3 - 3x - 4)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

3/ دراسة تغيرات الدالة f

| x | $-\infty$ | -1 | 0 | 1 | α | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|-----|-----|----------|-----------|
| x | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $g(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |

• إشارة الدالة المشتقة:

لدينا:

$$(x^2 - 1)^2 > 0$$

ومنه إشارة f' من إشارة $xg(x)$

• جدول التغيرات:

| x | $-\infty$ | -1 | 0 | 1 | α | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|------|-----------|-----------|-----------|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $+\infty$ | -1 | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |

$$x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0] \cup]\alpha; +\infty[$$

f متزايدة

$$x \in]0; 1[\cup]1; \alpha]$$

f متناقصة

4/ اثبات ان المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ C_f بجوار $-\infty$ و $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1} - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1 - (x + 1)(x^2 - 1)}{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ C_f بجوار $-\infty$ و $+\infty$

5/ دراسة الوضع النسبي بين C_f و (Δ)

دراسة اشارة المقدار $f(x) - y$

$$f(x) - y = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1} - (x + 1) = \frac{x^3 + x^2 + 1 - (x + 1)(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \frac{x - 2}{x^2 - 1}$$

| x | $-\infty$ | -2 | -1 | 1 | $+\infty$ |
|--------------|------------------|-------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| x - 2 | - | ○ | + | + | + |
| $x^2 - 1$ | + | | + | - | + |
| $f(x) - y$ | - | ○ | + | - | + |
| الوضع النسبي | تحت (Δ) | C_f يقطع (Δ) | C_f فوق (Δ) | C_f تحت (Δ) | C_f فوق (Δ) |

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

$$x^2 - 1 = 0 \quad x^2 = 1$$

$$x = 1 \quad \text{او} \quad x = -1$$

6/ اثبات ان $f(\alpha) = 1 + \frac{3\alpha+6}{\alpha^2-1}$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3 + \alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1}$$

$$= \frac{3\alpha + 4 + \alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha^2 + 3\alpha + 5}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha^2 - 1 + 1 + 3\alpha + 5}{\alpha^2 - 1}$$

$$= \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 - 1} + \frac{3\alpha + 6}{\alpha^2 - 1} = 1 + \frac{3\alpha + 6}{\alpha^2 - 1}$$

$$g(\alpha) = 0$$

$$\alpha^3 - 3\alpha - 4 = 0$$

$$\alpha^3 = 3\alpha + 4$$

استنتاج حصر لـ : $f(\alpha)$

$$2 \leq \alpha \leq 2.25$$

لدينا :

$$12 \leq 3\alpha + 6 \leq 12.75$$

..... (1)

باضرب في 3 و اضافة 6 الى جميع الاطراف نجد :

$$2 \leq \alpha \leq 2.25 \text{ : لدينا}$$

بتربيع اطراف المتراجحة ثم اضافة -1 الى جميع الاطراف نجد : $3 \leq \alpha^2 - 1 \leq 4.06$

$$\frac{1}{4.06} \leq \frac{1}{\alpha^2 - 1} \leq \frac{1}{3}$$

..... (2)

بقلب اطراف المتراجحة نجد

بضرب اطراف المتراجحة (1) في اطراف المتراجحة (2) نجد :

$$\frac{12}{4.06} \leq \frac{3\alpha + 6}{\alpha^2 - 1} \leq \frac{12.75}{3}$$

نضيف 1 الى جميع الاطراف نجد :

$$3.95 \leq \frac{3\alpha + 6}{\alpha^2 - 1} + 6 \leq 5.25$$

$$3.95 \leq f(\alpha) \leq 5.25$$

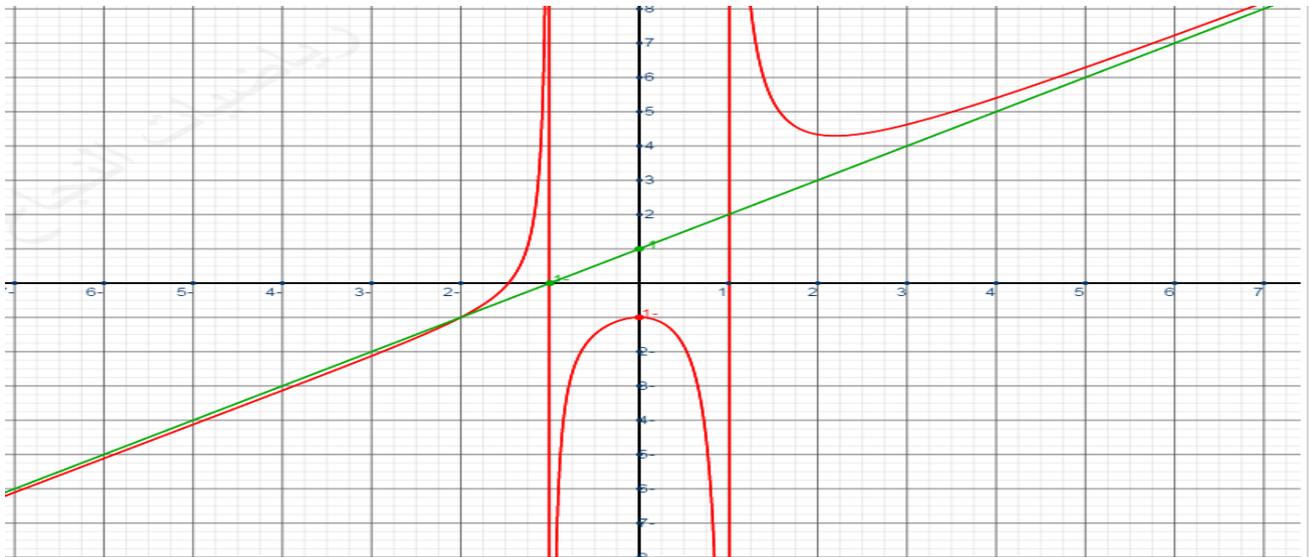
ومنه :

7/ اثبات ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α' حيث $-1.5 \leq \alpha' \leq -1.25$

- من جدول التغيرات f مستمرة ورتبية على المجال $[-1.5; -1.25]$
- لدينا : $f(-1.25) = \dots$ و $f(-1.5) = \dots$ ومنه فان : $f(-1.25) \cdot f(-1.5) \leq 0$

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α' حيث $-1.5 \leq \alpha' \leq -1.25$

8/ رسم C_f و (Δ)



$k(x) = \frac{1}{f(x)}$ دالة معرفة على $R - \{\alpha'\}$:-

19 / دراسة تغيرات الدالة k

• النهايات :-

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha'} k(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha'} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha'} k(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha'} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

• الدالة المشتقة : k دالة قابلة للاشتقاق على $R - \{\alpha'\}$:

$$k'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

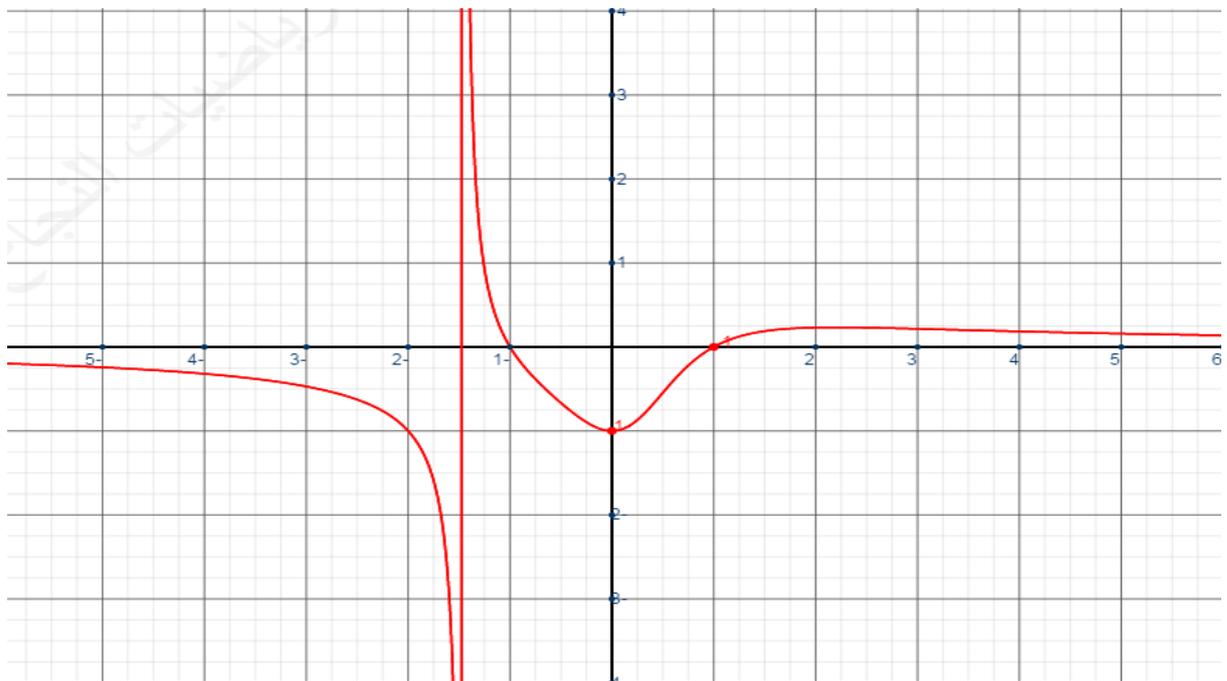
• جدول التغيرات :

| | | | | | |
|---------|-----------|-----------|-------|-------------|-----------|
| x | $-\infty$ | α' | 0 | α | $+\infty$ |
| $k'(x)$ | | - | - ○ + | ○ - | |
| $k(x)$ | 0 | $+\infty$ | -1 | $k(\alpha)$ | 0 |

$$(f(x))^2 > 0$$

ومنه إشارة k' من إشارة $-f'(x)$

رسم C_k



$h(x) = f((x+1)^2) : \mathbb{R} - \{-2, 0\}$: دالة معرفة على h

10 / دراسة تغيرات h

النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f((x+1)^2) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f((x+1)^2) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f((x+1)^2) = \lim_{y \rightarrow 1^+} f(y) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f((x+1)^2) = \lim_{y \rightarrow 1^-} f(y) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f((x+1)^2) = \lim_{y \rightarrow 1^-} f(y) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f((x+1)^2) = \lim_{y \rightarrow 1^+} f(y) = +\infty$$

الدالة المشتقة : h دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$

$$h'(x) = (2x+2) f'((x+1)^2)$$

إشارة الدالة المشتقة :

$$2x+2 = 0 \text{ يكافئ } x = -1$$

$$f'((x+1)^2) = 0 \text{ يكافئ } (x+1)^2 = 0 \text{ او } (x+1)^2 = \alpha$$

$$\text{يكافئ : } x = 0 \text{ او } x = -\sqrt{\alpha} - 1 \text{ او } x = \sqrt{\alpha} - 1$$

$$f'((x+1)^2) \leq 0 \text{ يكافئ : } 0 \leq (x+1)^2 \leq \alpha \text{ يكافئ : } -\sqrt{\alpha} - 1 \leq x \leq \sqrt{\alpha} - 1$$

جدول التغيرات :

| | | | | | | | |
|---------------|-----------|-------------------------|-----------|-----------|------|-------------------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $-\sqrt{\alpha} - 1$ | -2 | -1 | 0 | $-\sqrt{\alpha} - 1$ | $+\infty$ |
| $2x+2$ | | - | | - | + | | |
| $f'((x+1)^2)$ | | + | ○ | - | ○ | - | |
| $h'(x)$ | | - | ○ | + | ○ | - | |
| $h(x)$ | $-\infty$ | | $+\infty$ | | -1 | | $+\infty$ |
| | | $h(-\sqrt{\alpha} - 1)$ | | | | $h(-\sqrt{\alpha} - 1)$ | |
| | | | | $-\infty$ | | $-\infty$ | |

11/ مناقشة حلول المعادلة $f(x) = |m - 1|$

نضع $m - 1 = k$ تصبح المعادلة : $f(x) = |k|$

$f(x) = |m - 1|$ المعادلة $k \in] - f(\alpha); f(\alpha)[$ أي : $|k| \in]0; f(\alpha)[$ تقبل حل وحيد

$|k| = f(\alpha)$ أي $k = -f(\alpha)$ او $k = f(\alpha)$ المعادلة $f(x) = |m - 1|$ تقبل حلان

$|k| \in]f(\alpha); +\infty[$ أي : $k \in] - \infty; -f(\alpha)[\cup]f(\alpha); +\infty[$ المعادلة $f(x) = |m - 1|$ تقبل 3 حلول

المناقشة حسب قيم m لدينا : $m = k + 1$

$f(x) = |m - 1|$ المعادلة $m \in] - f(\alpha) + 1; f(\alpha) + 1[$ تقبل حل وحيد

$m = -f(\alpha) + 1$ او $m = f(\alpha) + 1$ المعادلة $f(x) = |m - 1|$ تقبل حلان

$f(x) = |m - 1|$ المعادلة $m \in] - \infty; -f(\alpha) + 1[\cup]f(\alpha) + 1; +\infty[$ تقبل 3 حلول

12/ مناقشة حلول المعادلة $f(\cos(\theta)) = \frac{1}{m}$

المعادلة $f(\cos(\theta)) = \frac{1}{m}$ تكافئ المعادلة : $\frac{1}{f(\cos(\theta))} = m$ تكافئ : $k(\cos(\theta)) = m$

نناقش بيانيا مع منحنى الدالة k وناخذ فقط الحلول المحصورة بين -1 و 1 لان $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$

$f(\cos(\theta)) = \frac{1}{m}$ المعادلة $m \in] - \infty; -1[\cup]0; +\infty[$ لا تقبل حلول

$f(\cos(\theta)) = \frac{1}{m}$ المعادلة $m = -1$ تقبل حل وحيد اذا كان المجهول $\cos(\theta)$ وتقبل حلان اذا كان المجهول θ

$f(\cos(\theta)) = \frac{1}{m}$ المعادلة $m \in] - 1; 0[$ تقبل حلان اذا كان المجهول $\cos(\theta)$ وتقبل 4 حلول اذا كان المجهول θ

$f(\cos(\theta)) = \frac{1}{m}$ المعادلة $m = 0$ تقبل حلان

13/ مناقشة حلول المعادلة $f(x) = \sin(\theta)$

نضع $\sin(\theta) = t$ تصبح المعادلة $f(x) = t$

من اجل $\theta = \frac{3\pi}{2}$ فان $t = -1$ المعادلة $f(x) = \sin(\theta)$ تقبل حلان

فان $-1 \leq t \leq 1$ المعادلة $f(x) = \sin(\theta)$ لا تقبل حلول $\theta \in]0; \frac{3\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$