الموضوع الأول:

التمرين الأول:

a و b عددان طبيعيان حيث: $a \equiv 3\ [4]$ و $b \equiv 2\ [4]$.

1) هل العدد $2a + 5b^3$ يقبل القسمة على 4؟
2) أحسب باقي قسمة العدد $a^2 - 2b^3$ على 4.
3) تحقق أن: $a \equiv -1\ [4]$.
4) استنتج باقي قسمة العدد $a^{1435} \times a^{2016}$ على 4.
5) استنتج أن: $a^{1435} + a^{2016} \equiv 0\ [4]$.

التمرين الثاني:

لتكن (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r، حيث:

$$u_3 = 1 \text{ و } u_{12} = 19$$

1) عين الأساس r والحد الأول u_0 لهذه المتتالية.
2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.
3) عين قيمة n حتى يكون: $u_n = 79$.
4) أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
5) استنتج المجموع S_{42}.

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ:

$$f(x) = 2 - \frac{2}{x+2}$$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ ثم فسر النتيجة بيانيا.
2) أحسب نهاية الدالة f عند -2 ثم فسر النتيجة بيانيا.
3) عين الدالة المشتقة f' للدالة f وادرس اشارتها.
4) شكل جدول تغيرات الدالة f على مجموعة تعريفها.
5) عين احداثيات نقط التقاطع مع المحاور.
6) أكتب معادلة المماس (Δ) لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$.
7) أرسم (Δ) و (C_f).

قال عالم الرياضيات والفيزياء سيمون دونيس:
في حياتنا شيئان مهمان:
أن نتعلم الرياضيات وأن نُدرس الرياضيات.

تصحيح الموضوع الأول:

التمرين الأول:

a و b عددان طبيعيان حيث: $a \equiv 3\ [4]$ و $b \equiv 2\ [4]$.

1) نبحث إن كان العدد $2a + 5b^3$ يقبل القسمة على 4:
نقول عن العدد $2a + 5b^3$ أنه يقبل القسمة على 4 إذا كان:

$$2a + 5b^3 \equiv 0\ [4]$$

لدينا: $a \equiv 3\ [4]$
نضرب طرفي الموافقة في العدد (2) ينتج: $2a \equiv 6\ [4]$
وبما أن: $6 \equiv 2\ [4]$
فإن (حسب خاصية التعدي): $2a \equiv 2\ [4] \dots (1)$
ولدينا: $b \equiv 2\ [4]$
وحسب خواص الموافقات: $b^3 \equiv 2^3\ [4]$
أي: $b^3 \equiv 8\ [4]$
وبما أن: $8 \equiv 0\ [4]$
فإن (حسب خاصية التعدي): $b^3 \equiv 0\ [4]$
نضرب طرفي الموافقة في العدد (5) ينتج: $5b^3 \equiv 0\ [4] \dots (2)$
بجمع الموافقتين (1) و (2) طرف لطرف ينتج:

$$2a + 5b^3 \equiv 2\ [4]$$

ومنه العدد $2a + 5b^3$ لا يقبل القسمة على 4.

2) نحسب باقي قسمة العدد $a^2 - 2b^3$ على 4:
لدينا: $a \equiv 3\ [4]$
وحسب خواص الموافقات: $a^2 \equiv 3^2\ [4]$
أي: $a^2 \equiv 9\ [4]$
وبما أن: $9 \equiv 1\ [4]$
فإن (حسب خاصية التعدي): $a^2 \equiv 1\ [4] \dots (3)$
ولدينا مما سبق أن: $b^3 \equiv 0\ [4]$
نضرب طرفي الموافقة في العدد (2) ينتج: $2b^3 \equiv 0\ [4] \dots (4)$
نطرح الموافقة (4) من (3) نجد:

$$a^2 - 2b^3 \equiv 1\ [4]$$

ومنه باقي قسمة العدد $a^2 - 2b^3$ على 4 هو 1.

3) نتحقق أن: $a \equiv -1\ [4]$.
لدينا: $a \equiv 3\ [4]$
نضيف العدد (1) لطرفي الموافقة: $a + 1 \equiv 3 + 1\ [4]$
أي: $a + 1 \equiv 4\ [4]$
وبما أن: $4 \equiv 0\ [4]$
فإن (حسب خاصية التعدي): $a + 1 \equiv 0\ [4]$
نطرح العدد (1) من طرفي الموافقة: $a + 1 - 1 \equiv 0 - 1\ [4]$
ومنه:

$$a \equiv -1\ [4]$$

4) استنتاج باقي قسمة العدد $a^{1435} \times a^{2016}$ على 4:
لدينا: $a \equiv -1\ [4]$
وحسب خواص الموافقات: $a^{1435} \equiv (-1)^{1435}\ [4]$

بما أن العدد 1435 فردي فإن: $(-1)^{1435} = -1$

فنكتب: $a^{1435} \equiv -1\ [4]$

أي: $a^{1435} \equiv 3\ [4] \dots (5)$

ولدينا: $a \equiv -1\ [4]$

وحسب خواص الموافقات: $a^{2016} \equiv (-1)^{2016}\ [4]$

بما أن العدد 2016 زوجي فإن: $(-1)^{2016} = 1$

فنكتب: $a^{2016} \equiv 1\ [4] \dots (6)$

نضرب الموافقة (5) في الموافقة (6) طرف لطرف نجد:

$$a^{1435} \times a^{2016} \equiv 3\ [4]$$

ومنه باقي قسمة العدد $a^{1435} \times a^{2016}$ على 4 هو 3.

5) استنتاج أن: $a^{1435} + a^{2016} \equiv 0\ [4]$.

بجمع (5) و (6) طرف لطرف ينتج: $a^{1435} + a^{2016} \equiv 4\ [4]$

وبما أن: $4 \equiv 0\ [4]$

فإن (حسب خاصية التعدي):

$$a^{1435} + a^{2016} \equiv 0\ [4]$$

التمرين الثاني:

لتكن (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r، حيث:

$$u_{12} = 19 \text{ و } u_3 = 1$$

1) نعين الأساس r والحد الأول u_0 لهذه المتتالية:

بما أن (u_n) متتالية حسابية فإن:

$$\begin{cases} u_3 = u_0 + 3r \\ u_{12} = u_0 + 12r \end{cases}$$

بعد التعويض ينتج:

$$\begin{cases} u_0 + 3r = 1 \quad (1) \\ u_0 + 12r = 19 \ (2) \end{cases}$$

بطرح (1) من (2) طرف لطرف ينتج:

$(u_0 - u_0) + (12r - 3r) = 19 - 1$

أي: $9r = 18$

ومنه نجد:

$$\mathrm{r} = 2$$

نعوض قيمة r في المعادلة (1) ينتج: $u_0 + 6 = 1$

ومنه نجد:

$$u_0 = -5$$

2) نكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام u_n لمتتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r بالعلاقة التالية:

$$u_n = u_0 + n \times r$$

بعد التعويض والترتيب نجد:

$$u_n = 2n - 5$$

3) نعين قيمة n حتى يكون: $u_n = 79$.

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: $u_n = 79$

أي: $2n - 5 = 79$

ومنه نجد:

$$n = 42$$

حيث:

$$u_{42} = 79$$

4) نحسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$$S_n = \frac{(\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})(\text{عدد الحدود})}{2}$$

ويحسب عدد الحدود بالعلاقة التالية:

عدد الحدود = دليل الحد الأخير في المجموع − دليل الحد الأول في المجموع + 1

حيث:

- الحد الأول في المجموع هو u_0.
- الحد الأخير في المجموع هو u_n.
- عدد الحدود هو $n + 1$.

ومنه: $S_n = \frac{(n+1)(-5+2n-5)}{2}$

أي: $S_n = \frac{(n+1)(2n-10)}{2}$

بعد الاختزال نجد:

$$S_n = (n+1)(n-5)$$

5) استنتاج المجموع S_{42}:

نعوض $n = 42$ في عبارة S_n ينتج: $S_n = (42+1)(42-5)$

ومنه نجد:

$$S_n = 1591$$

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ:

$$f(x) = 2 - \frac{2}{x+2}$$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) نحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

لدينا: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(2 - \frac{2}{x+2}\right)$

حيث: $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{2}{x+2}\right) = 0$

ومنه نجد:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

ولدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{2}{x+2}\right)$

حيث: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x+2}\right) = 0$

ومنه نجد:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

التفسير البياني:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب يوازي حامل محور الفواصل معادلته:

$$y = 2$$

2) **نحسب نهاية الدالة f عند -2:**

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \left(2 - \frac{2}{x+2}\right)$

بما أن: $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} (x+2) = 0^-$

فإن: $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \left(\frac{2}{x+2}\right) = -\infty$

ومنه نجد:

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = +\infty$$

ولدينا: $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \left(2 - \frac{2}{x+2}\right)$

بما أن: $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} (x+2) = 0^+$

فإن: $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \left(\frac{2}{x+2}\right) = +\infty$

ومنه نجد:

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = -\infty$$

التفسير البياني:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب يوازي حامل محور التراتيب معادلته:

$$x = -2$$

3) **نعين الدالة المشتقة f' للدالة f وندرس اشارتها:**

- **حساب $f'(x)$:**

لدينا: $f'(x) = 0 - \frac{0(x+2) - 1 \times 2}{(x+2)^2}$

ومنه نجد:

$$f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2}$$

- **دراسة إشارة $f'(x)$:**

لدينا:

$$\begin{cases} 2 > 0 \\ (x+2)^2 > 0 \, ; x \in]-\infty \, ; -2[\cup]-2 \, ; +\infty[\end{cases}$$

ومنه: $\frac{2}{(x+2)^2} > 0 \, ; x \in]-\infty \, ; -2[\cup]-2 \, ; +\infty[$

جدول الإشارة:

x	$-\infty$ -2	$+\infty$
$\frac{2}{(x+2)^2}$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$

من أجل كل x من $]-\infty \, ; -2[\cup]-2 \, ; +\infty[$ لدينا:

$$f'(x) > 0$$

4) **نشكل جدول تغيرات الدالة f على مجموعة تعريفها:**

x	$-\infty$ -2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 2$

5) **نعين احداثيات نقط التقاطع مع المحاور:**

- **<u>مع محور الفواصل:</u>**

نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل هي مجموعة حلول المعادلة:

$$f(x) = 0$$

نحل في المجال $]-\infty \, ; -2[\cup]-2 \, ; +\infty[$ المعادلة: $f(x) = 0$

أي: $2 - \frac{2}{x+2} = 0$

ومنه نجد: $x = -1$

ومنه (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة:

$$A(-1 \, ; 0)$$

- **<u>مع محور التراتيب:</u>**

نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور التراتيب هي مجموعة حلول المعادلة:

$$y = f(0)$$

لدينا: $f(0) = 1$

ومنه (C_f) يقطع محور التراتيب في النقطة:

$$B(0 \, ; 1)$$

6) **نكتب معادلة المماس (Δ) لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$:**

تعرّف معادلة المماس (Δ) بالعلاقة التالية:

$$(\Delta): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

<u>حيث:</u>

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ f'(0) = \frac{1}{2} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

بعد التعويض نجد:

$$(\Delta): y = \frac{1}{2}x + 1$$

7) **نرسم (Δ) و (C_f):**

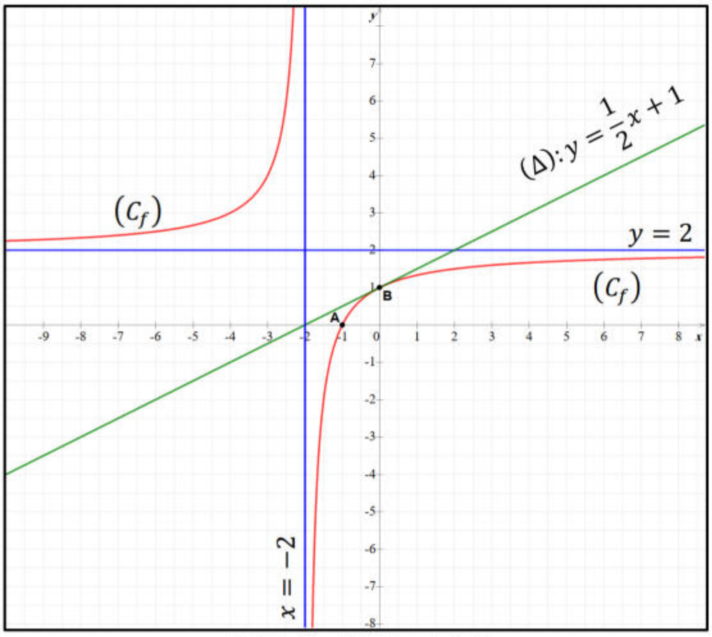
- **لرسم المماس (Δ) يكفي تعيين نقطتين اعتبارا من المعادلة:**

$$(\Delta): y = \frac{1}{2}x + 1$$

x	-2	0
y	0	1

فيصبح المماس (Δ) معرف بالنقطتين $(-2 \, ; 0)$ و $(0 \, ; 1)$.

- **لرسم المنحنى (C_f) نأخذ بعين الاعتبار ما يلي:**
- **المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f).**
- **نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل.**
- **نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور التراتيب.**



المنحنى البياني للدالة f

حظ سعيد

غالبا ما يكون النجاح حليف هؤلاء الذين يعملون بجرأة،
ونادرا ما يكون حليف المترددين الذين يتهيبون المواقف ونتائجها

05 56 24 69 06
bouguetof.hamid@yahoo.fr