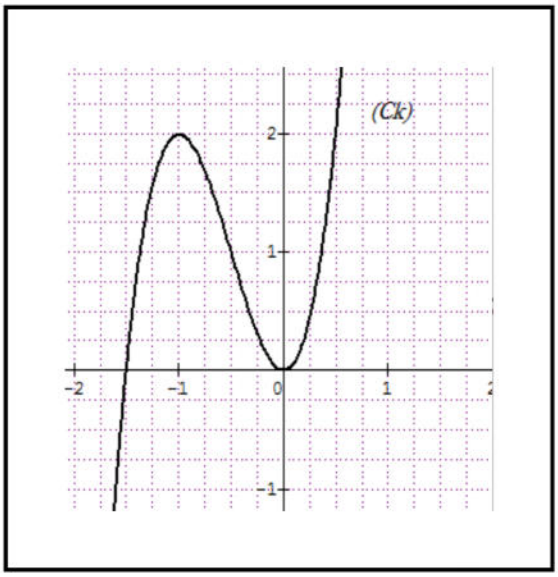
اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول (06 نقاط):



✓ k دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بتمثيلها البياني المقابل :

بقراءة بيانية اجب على مايلي:

1. شكل جدول تغيرات الدالة k
2. حدد إشارة $k(x)$ على مجال تعريفها

✓ نعتبر الدالة h المعرفة على $\left]-\frac{3}{2}\ ,\ 0\right[\cup \left]0\ ,+\infty\right[$ بـ:

$$h(x) = ln[k(x)]$$

1. احسب نهايات الدالة h عند أطراف مجال تعريفها
2. ادرس اتجاه تغير الدالة h واستنتج جدول تغيراتها

✓ لتكن الدالة F المعرفة على $\left]\frac{1}{2}\ ,\ 2\right[\cup \left]2\ ,+\infty\right[$ بـ : $F(x) = h(x-2) - 2$

1. اشرح كيفية إنشاء (C_F) المنحنى البياني لـ $F(x)$ انطلاقا من (C_h) التمثيل البياني للدالة h
2. ارسم (C_h) و (C_F) في نفس المعلم

التمرين الثاني (14 نقطة):

I) g دالة معرفة على R بالعبارة التالية : $g(x) = (a-2x)e^{x+1} + b$ حيث: $(a,b) \in R^2$

(C_g) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) عين العددان الحقيقيان a و b حتى يتحقق الشرطان معا :

✓ g هي حل للمعادلة التفاضلية : $(E)\text{: } y' - y = -2e^{x+1} - 2$

✓ المنحنى (C_g) يقبل مماس معامل توجيهه 1 عند النقطة التي فاصلتها $(x=-1)$

2) إذا اعتبرنا أن: $a = 1$ و $b = 2$

أ اكتب عبارة $g(x)$ ثم ادرس تغيراتها

ب بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\alpha \in \left]0.68, 0.69\right[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

II) نعتبر الدالة f دالة معرفة على R بالعبارة التالية : $f(x) = 1 + \frac{4x+2}{1+e^{x+1}}$

نسمي (C_f) منحناها البياني في المعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) أ احسب $f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f ثم بين انه من اجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = \frac{2g(x)}{(1+e^{x+1})^2}$$

ب استنتج إشارة الدالة f' على R

2) بين أن : $f(\alpha) = 4\alpha - 1$ ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$

3) أ/ تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f(x) - (4x-3) = \frac{(-2-4x)e^{x+1}}{1+e^{x+1}}$

ب/ احسب : $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (4x-3)]$ و $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 1]$ وماذا تستنتج؟

4) ادرس وضعية المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) الذي $y = 4x - 3$ معادلة له

5) شكل جدول تغيرات الدالة f ثم ارسم (C_f) و (Δ) والمستقيم الذي معادلته $y = 1$

III) لتكن الدالة h دالة معرفة على R بالعبارة التالية : $h(x) = 1 + \frac{4|x|+2}{1+e^{|x|+1}}$

1) بين أن الدالة h دالة زوجية

2) اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة ثم ارسم (C_h) التمثيل البياني للدالة h في نفس المعلم السابق

3) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$4|x| + 2 = (-1-m)(1+e^{|x|+1})$$

عندما تستبدل نظرتك السلبية بأخرى ايجابية

ستبدأ في الحصول على نتائج ايجابية

الإجابة النموذجية لاختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين الاول:

1 جدول تغيرات الدالة k

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$k'(x)$		+	0	-	0	+	
$k(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

2 إشارة $k(x)$ على مجال تعريفها:

x	$-\infty$		$-3/2$		0		$+\infty$
$k(x)$		-	0	+	0	+	

✓ نعتبر الدالة h المعرفة على $\left]-\frac{3}{2}\ ,\ 0\right[\cup \left]0\ ,+\infty\right[$ بـ : $h(x) = \ln[k(x)]$

1 نهايات الدالة h عند أطراف مجال تعريفها

* $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln[k(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
* $\lim\limits_{|x|\to 0} h(x) = \lim\limits_{|x|\to 0} \ln[k(x)] = \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$
* $\lim\limits_{x\to -3/2} h(x) = \lim\limits_{x\to -3/2} \ln[k(x)] = \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$

2 دراسة اتجاه تغير الدالة h واستنتاج جدول تغيراتها :

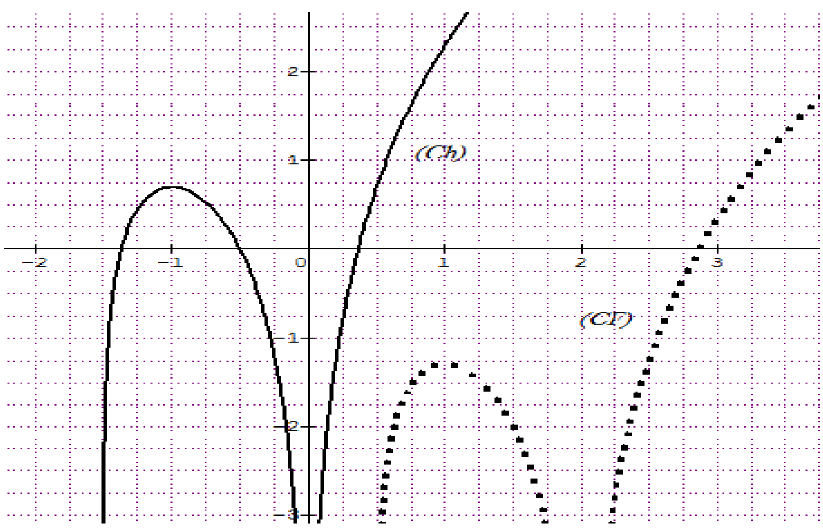
● نحسب الدالة المشتقة وندرس إشارتها: لدينا من اجل كل $x \in \left]-\frac{3}{2}\ ,\ 0\right[\cup \left]0\ ,+\infty\right[$: $h'(x) = \frac{k'(x)}{k(x)}$ إذن:

x	$-3/2$		-1		0		$+\infty$
$k'(x)$		+	0	-	‖	+	
$k(x)$		+		+	‖	+	
$h'(x)$		+		-	‖	+	

● جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	-	‖	+	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$\ln 2$	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3 المنحنى البياني (C_h) :



✓ لتكن الدالة F المعرفة على $\left]\frac{1}{2}\ ,\ 2\right[\cup\left]2\ ,+\infty\right[$ بـ : $F(x) = h(x-2) - 2$

1- يتم إنشاء (C_F) المنحنى البياني لـ $F(x)$: بانسحاب (C_h) بيان الدالة h بشعاع قدره : $\vec{v}\binom{2}{-2}$

التمرين الثاني:

I) g دالة معرفة على R بالعبارة التالية : $g(x) = (a-2x)e^{x+1} + b$

1- عين العددان الحقيقيان a و b: لدينا g هي حل للمعادلة التفاضلية (E): يعني أن : $g'(x) - g(x) = -2e^{x+1} - 2$

أي: $-2e^{x+1} + (a-2x)e^{x+1} - [(a-2x)e^{x+1} + b] = -2e^{x+1} - 2$

ومنه $-2e^{x+1} - b = -2e^{x+1} - 2$ و بالمطابقة نجد: $b = 2$

ولدينا: المنحنى (C_g) يقبل مماس معامل توجيهه 1 عند النقطة التي فاصلتها $(x=-1)$: يعني أن: $g'(-1) = 1$

حيث : $g'(x) = -2e^{x+1} + (a-2x)e^{x+1} = (a-2-2x)e^{x+1}$ ومنه : $(a-2-2(-1))e^{-1+1} = 1$

إذن: $a = 1$ وبالتالي: $g(x) = (1-2x)e^{x+1} + 2$

1- أ- دراسة اتجاه تغير الدالة g : g دالة معرفة على $\mathcal{R}$ بـ : $g(x) = (1-2x)e^{x+1} + 2$

- نحسب نهايات الدالة g:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left((1-2x)e^{x+1} + 2\right) = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left((1-2x)e^{x+1} + 2\right) = -\infty$$

- نحسب الدالة المشتقة وندرس إشارتها:

$$g'(x) = (-1-2x)e^{x+1}$$

لدينا من اجل كل $x\in\mathcal{R}$ $g'(x) = 0$ إذا كان : $(-1-2x) = 0$ أي $x = -\frac{1}{2}$

ومنه:

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-

إذن:

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	2	↗	$g\left(-\frac{1}{2}\right)$	↘	$-\infty$

ب- اثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا بحيث $\alpha\in\left]0.68\ ,\ 0.69\right[$:

- الدالة g دالة معرفة ومستمرة ومتناقصة تماما على $\left[-\frac{1}{2}\ ,+\infty\right[$ ادن فهي حتما معرفة ومستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0.68\ ,\ 0.69]$

- ولدينا $\begin{cases} g(0.68) = 0.0683 \\ g(0.69) = -0.0594 \end{cases}$ أي $g(0.68)\times g(0.69) < 0$

- ادن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن العادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا حيث $\alpha\in\left]0.68\ ,\ 0.69\right[$

استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathcal{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

II) نعتبر الدالة f دالة معرفة على R بالعبارة التالية : $f(x) = 1 + \frac{4x+2}{1+e^{x+1}}$

1) أ- بين انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{2g(x)}{(1+e^{x+1})^2}$:

$$f'(x) = \frac{4(1+e^{x+1}) - e^{x+1}(4x+2)}{(1+e^{x+1})^2} = \frac{4+4e^{x+1}-4xe^{x+1}-2e^{x+1}}{(1+e^{x+1})^2} = \frac{2e^{x+1}-4xe^{x+1}+4}{(1+e^{x+1})^2} = \frac{2g(x)}{(1+e^{x+1})^2}$$

ب- استنتاج إشارة الدالة f' على R :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-

2) بين أن : $f(\alpha)=4\alpha-1$ ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$

لدينا $f(\alpha)=1+\frac{4\alpha+2}{1+e^{\alpha+1}}$ ……….(1)

ولدينا : $g(\alpha)=(1-2\alpha)e^{\alpha+1}+2=0$ إذن : $e^{\alpha+1}=\frac{-2}{(1-2\alpha)}$ ………(2)

بالتعويض (2) في (1) نجد (1) ……… $f(\alpha)=1+\frac{4\alpha+2}{1+\frac{-2}{(1-2\alpha)}}$ و بعد توحيد المقامات والتبسيط نجد : $f(\alpha)=\frac{8\alpha^2+2\alpha-1}{1+2\alpha}$

وباستعمال القسمة الاقليدية نجد: $f(\alpha)=\frac{(1+2\alpha)(4\alpha-1)}{(1+2\alpha)}$ ومنه $\boxed{f(\alpha)=4\alpha-1}$

- حصر $f(\alpha)$: لدينا $0.68\le\alpha\le0.69$

بضرب طرفي المتباينة في العدد (4) نجد : $4(0.68)\le4\alpha\le4(0.69)$

بإضافة العدد (-1) إلى الطرفين نجد : $4(0.68)-1\le4\alpha-1\le4(0.69)-1$

ومنه نستنتج أن: $\boxed{1.72\le f(\alpha)\le1.76}$

3) أ/ التحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f(x)-(4x+3)=\frac{(-2-4x)e^{x+1}}{1+e^{x+1}}$

$$f(x)-(4x+3)=\frac{4x+2}{1+e^{x+1}}-4x-2=\frac{4x+2-4x-4xe^{x+1}-2-2e^{x+1}}{1+e^{x+1}}=\frac{(-2-4x)e^{x+1}}{1+e^{x+1}}$$

ب/ حساب: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(4x+3)]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-1]$ ثم تفسير النتائج هندسيا:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(4x+3)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{(-2-4x)e^{x+1}}{1+e^{x+1}}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{-2e^{x+1}-4xe^{x+1}}{1+e^{x+1}}\right]=0$

ومنه نستنتج أن $y=4x+3$ هي معادلة لمستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-1]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{4x+2}{1+e^{x+1}}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{4+\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{e^{x+1}}{x}}\right]=0$

ومنه نستنتج أن $y=1$ هي معادلة لمستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$

4) ادرس وضعية المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=4x+3$

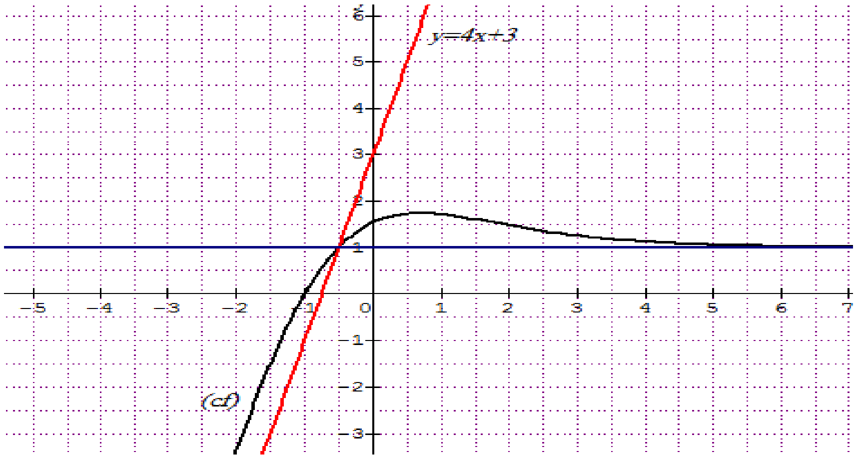
نحل المعادلة : $f(x)-(4x+3)=0$ أي $\frac{(-2-4x)e^{x+1}}{1+e^{x+1}}=0$ ويتحقق ذلك إذا كان $(-2-4x)=0$ أي $x=-\frac{1}{2}$

m	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)-y$	+	0	-
الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $\left(-\frac{1}{2},f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$	(C_f) تحت (Δ)

5) شكل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ 1

6) ارسم المستقيمات المقاربة والمنحنى البياني (C_f) :



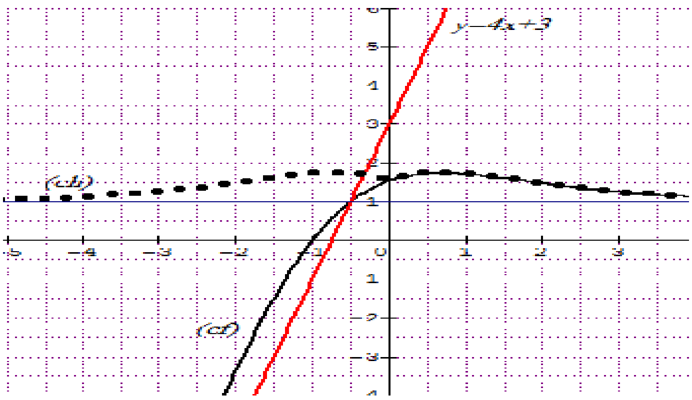
III) لتكن الدالة h دالة معرفة على R بالعبارة التالية : $h(x) = 1 + \frac{4|x|+2}{1+e^{|x|+1}}$

1) إثبات أن الدالة h دالة زوجية :

$h(-x) = 1 + \frac{4|-x|+2}{1+e^{|-x|+1}} = 1 + \frac{4|x|+2}{1+e^{|x|+1}} = h(x)$ لان : $|-x| = |x|$ ومنه $h(x)$ دالة زوجية

2) كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة ثم رسم (C_h) التمثيل البياني للدالة h في نفس المعلم السابق :

$$h(x) = \begin{cases} 1 + \frac{4x+2}{1+e^{x+1}} = f(x) & , \quad x \geq 0 \\ 1 + \frac{2-4x}{1+e^{1-x}} = f(-x) & , \quad x < 0 \end{cases}$$



3) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $e^{|x|+1} + 4|x| + 2 = -m(1 + e^{|x|+1}) - 1$:

لدينا: $e^{|x|+1} + 4|x| + 2 = -m(1 + e^{|x|+1}) - 1$

أي : $4|x| + 2 = -m(1 + e^{|x|+1}) - 1 - e^{|x|+1}$ ومنه $4|x| + 2 = -m(1 + e^{|x|+1}) - (1 + e^{|x|+1})$

وبقسمة الطرفين على $(1 + e^{|x|+1})$ نجد : $\frac{4|x|+2}{(1+e^{|x|+1})} = -m - 1$ أي: $\frac{4|x|+2}{(1+e^{|x|+1})} + 1 = -m$

وبالتالي المعادلة تصبح: $h(x) = -m$

المناقشة

- $m \in]-\infty, -f(\alpha)[$ المعادلة $h(x) = -m$ لا تقبل حل
- $m = -f(\alpha)$ المعادلة $h(x) = -m$ تقبل حلين مضاعفين احدهما موجب α والآخر سالب $-\alpha$
- $m \in]-f(\alpha), -f(0)[$ المعادلة $h(x) = -m$ تقبل أربعة حلول حلين موجبين وحلين سالبين
- $m = -f(0)$ المعادلة $h(x) = -m$ تقبل ثلاثة حلول حل معدوم وحل موجب وآخر سالب
- $m \in]-f(0), -1[$ المعادلة $h(x) = -m$ تقبل حلين احدهما موجب والآخر سالب
- $m \in [-1, +\infty[$ المعادلة $h(x) = -m$ لا تقبل حل