ثانوية محمود بن محمود/ قالمة — السنة الدراسية : 2020/2019

المادة : رياضيات — المستوى : 3 ع تج – المدة : 2 سا

اختبـــــار الثلاثـــي الأول

التمرين الأول : (08 نقاط)

عين الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقترحة مع التبرير (أي إجابة دون تبرير لا تؤخذ بعين الاعتبار)

1) العدد : $\frac{1}{2}Ln(125)+2Ln\left(\frac{1}{5}\right)+Ln\sqrt{5}$ هو عدد :

2) عدد حلول المعادلة : $e^{3x}-x-1=0$ هو :

3) عدد حلول المعادلة : $(Lnx)^2=Ln(x^2)$ هو :

4) حلول المتراجحة : $e^{x}-e^{-x}\geq 0$ هي :

معدوم	موجب تماما	سالب تماما
0	1	2
0	1	2
$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$[0;+\infty[$

5) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$ هي دالة :

زوجية	فردية	ليست زوجية وليست فردية

6) منحنى الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$ يقبل نقطة انعطاف فواصلها من الشكل :

$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}$	$x=\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{2}/k\in\mathbb{Z}$

7) الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ : $h(x)=\frac{mx^2}{x^2-1}$ حيث $m\in\mathbb{R}^*$ تقبل قيمة حدية محلية وحيدة من أجل :

$m\in\mathbb{R}_-^*$	$m\in\mathbb{R}^*$	$m\in\mathbb{R}_+^*$

8) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية : $y=y'-1$ الذي يحقق $y(Ln2)=1$ هو :

$x\mapsto e^{\frac{1}{2}(x+1)}+1$	$x\mapsto e^{(1-x)}-1$	$x\mapsto e^{x}-1$

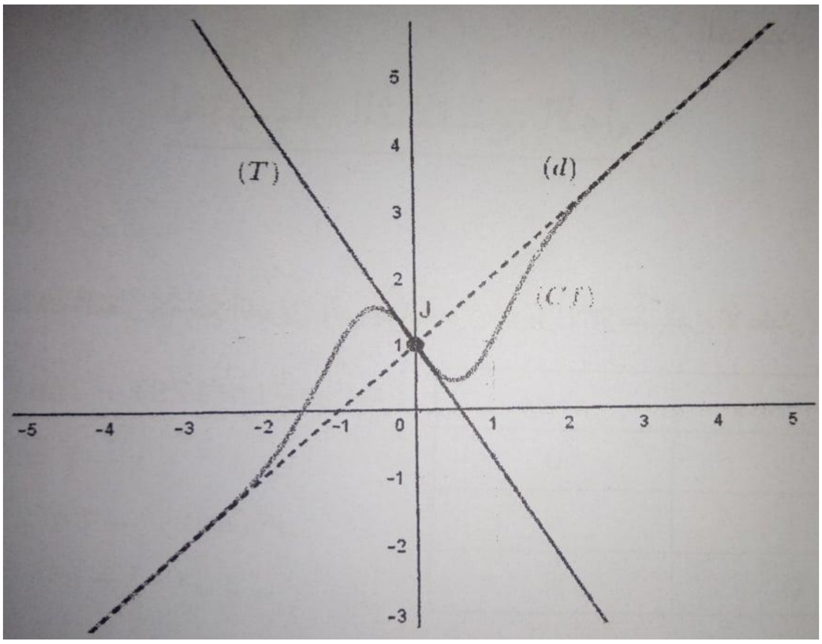
التمرين الثاني : (12 نقطة)

I) نعتبر الدالة f المعرفة والقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ،عبارتها هي : $f(x)=mx+p+(ax+b)e^{-x^2}$.
وليكن $(\mathcal{C}_f)$ منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$. (انظر الشكل) .

✎ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا (d) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

✎ المستقيم (T) هو المماس للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 والذي معادلته : $(T): y=(1-e)x+1$.

✎ النقطة $J(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.



1) اكتب معادلة المستقيم (d) .

2) علما أن $\lim_{|x|\to+\infty}\left(xe^{-x^2}\right)=0$ ، عين قيمتي كل من m و p .

3) احسب قيمة المجموع : $f(-x)+f(x)$ ، حيث $x\in\mathbb{R}$.

4) باستعمال بعض المعلومات السابقة عين كلا من a و b .

II) بوضع : $a=-e$ ، $b=0$ و $m=p=1$.

1)

أ) بين أن f' مشتقة الدالة f زوجية .

ب) بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=1+(2x^2-1)e^{-x^2+1}$.

ج) ادرس تغيرات الدالة f' وشكل جدول تغيراتها .

د) برهن أن المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث : $0.51<\alpha<0.52$ ثم استنتج حصرا لـ β .

2) عين معادلتي مماسي (C_f) ، (T_1) و (T_2) الموازيان لـ (d) .

3)

أ) ارسم (T_1) و (T_2) في المعلم السابق.

ب) ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x)=x+m$.

انتهى الموضوع

عرض حال الاختبار الثلاثي الأول

التمرين الأول: (08 نقاط)

تعيين الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقترحة مع التبرير:

1- العدد: $\frac{1}{2}\ln(125)+2\ln\left(\frac{1}{5}\right)+\ln\sqrt{5}$ هو: عدد معدوم (0,25)

التبرير: (0,75)

$\frac{1}{2}\ln(125)+2\ln\left(\frac{1}{5}\right)+\ln\sqrt{5}=\frac{1}{2}\ln(5^3)+2(-1\ln 5)$
$+\ln 5^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\ln 5-2\ln 5+\frac{1}{2}\ln 5$
$=2\ln 5-2\ln 5=0$

2- عدد حلول المعادلة: $e^{3x}-x-1=0$ هو: 2 (0,25)

التبرير: (0,75)

$e^{3x}-x-1=0$

بوضع: $f(x)=e^{3x}-x-1$

$f'(x)=3e^{3x}-1$

من أجل $x\in\mathbb{R}$: لدينا:

$3e^{3x}-1=0$
$3e^{3x}=1$
$e^{3x}=\frac{1}{3}\to 3x=\ln\left(\frac{1}{3}\right)\to x=-\frac{\ln 3}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{\ln 3}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\simeq 0,22$	$\nearrow$	$+\infty$

الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;-\frac{\ln 3}{3}[$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\cdot f\left(-\frac{\ln 3}{3}\right)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $]-\infty;-\frac{\ln 3}{3}[$

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\frac{\ln 3}{3};+\infty[$ و $f\left(-\frac{\ln 3}{3}\right)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن: المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $]-\frac{\ln 3}{3};+\infty[$

ومنه للمعادلة حلان.

3- عدد حلول المعادلة: $(\ln x)^2=\ln(x^2)$ هو: 2 (0,25)

التبرير: (0,75)

$(\ln x)^2=\ln(x)^2$
$(\ln x)^2-\ln(x^2)=0$
$(\ln x)^2-2\ln x=0$
$\ln x(\ln x-2)=0$

$\begin{cases}\ln x=0\\ \ln x-2=0\end{cases}$ $\begin{cases}\ln x=\ln 1\\ \ln x=2\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\ x=e^2\end{cases}$

4- حلول المتراجحة: $e^x-e^{-x}\geq 0$ هي: $[0;+\infty[$ (0,25)

التبرير: (0,75)

$e^x-e^{-x}\geq 0$
$e^x\geq e^{-x}$
$x\geq -x$
$x+x\geq 0\to 2x\geq 0\to x\geq 0$
$x\in[0;+\infty[$

5- الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$ هي دالة: زوجية. (0,25)

التبرير: (0,75)

$f(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$
$f(-x)=3\sin\left(-2x-\frac{\pi}{2}\right)=3\sin\left[-\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right]$
$f(-x)=-3\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=3\sin\left[\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-\pi\right]$
$f(-x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=f(x)$

ملاحظة: $\sin(\alpha-\pi)=-\sin(\alpha)$

6- منحنى الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x)=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$ يقبل نقط انعطاف فواصلها من الشكل:

$x=\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{2}\ /k\in\mathbb{Z}$ (0,25)

التبرير: (0,75)

$g(x)=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$
$g'(x)=-6\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$
$g''(x)=-12\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\to g''(x)=0$ معناه:
$\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=0\to 2x-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\ /k\in\mathbb{Z}$
$2x=\frac{2\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\to 2x=\pi+k\pi/k\in\mathbb{Z}$
$x=\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{2}\ /k\in\mathbb{Z}$

⑦ - الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ: $h(x)=\frac{mx^2}{x^2-1}$ حيث $m\in\mathbb{R}^*$ تقبل قيمة حدية محلية وحيدة من أجل: $m\in\mathbb{R}^*$ (0,25)

التبرير: (0,75)

$$h(x)=\frac{mx^2}{x^2-1}$$

$$h'(x)=\frac{2mx(x^2-1)-2x(mx^2)}{(x^2-1)^2}$$

$$h'(x)=\frac{\cancel{2mx^3}-2mx-\cancel{2mx^3}}{(x^2-1)^2}$$

$$h'(x)=\frac{-2mx}{(x^2-1)^2}$$

$h'(x)=0$ إذا كان $x=0$

⑧ - الحل الخاص للمعادلة التفاضلية: $y=y'-1$ الذي يحقق $y(\ln 2)=1$ هو: $x\mapsto e^x-1$ (0,25)

التبرير: (0,75)

$$y=y'-1$$

$$y'=y+1$$

$$x\mapsto Ce^x-1$$

$$Ce^{\ln 2}-1=1$$

$$2C=2\rightarrow C=1$$

ومنه: $x\mapsto e^x-1$

التمرين الثاني: (12 نقطة)

I)

① - معادلة المستقيم (d):

النقطتان: $B(-1,0)$, $A(0,1)$ تنتميان إلى المستقيم (d).

$(d): y=ax+b$

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-0}{0+1}=\frac{1}{1}=1 \quad (0,25)$$

$1=1(0)+b$

$b=1$ (0,25)

ومنه: $(d): y=x+1$ (0,25)

② - تعيين قيمتي m و p:

$$f(x)=mx+p+(ax+b)e^{-x^2}$$

$$f(x)-(mx+p)=(ax+b)e^{-x^2}$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(mx+p)\right]=\lim_{|x|\to+\infty}(ax+b)e^{-x^2}$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}(\underbrace{axe^{-x^2}}_{0}+\underbrace{be^{-x^2}}_{0})$$

$$=0$$

ومنه:

$$\lim_{|x|\to+\infty}f(x)-(mx+p)=0 \quad (0,25)$$

أي أن المستقيم ذو المعادلة $y=mx+p$ مقارب للمنحنى (C_f) في جوار $\pm\infty$ وهو المستقيم (d)

$(d): y=x+1$

$y=mx+p$

بالمطابقة: $\boxed{m=p=1}$ (0,25)

③ - حساب قيمة المجموع: $f(-x)+f(x)$ حيث: $x\in\mathbb{R}$

النقطة $J(0,1)$ هي مركز تناظر لـ (C_f) (0,25)

لأن: $f(2(0)-x)+f(x)=2(1)$

$f(-x)+f(x)=2$ (0,25)

تذكير: مركز التناظر: $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$ ، $J(\alpha;\beta)$ مركز تناظر لـ (C_f)

④ - تعيين a و b:

* لدينا: $f(-x)+f(x)=2$

$$f(-x)+f(x)=\cancel{-mx}+p\cancel{-axe^{-x^2}}+be^{-x^2}\cancel{+mx}+p\cancel{+axe^{-x^2}}+be^{-x^2}$$

$p=1$

$$f(-x)+f(x)=2p+2be^{-x^2}=2+2be^{-x^2}$$

$$2+2be^{-x^2}=2$$

$$2be^{-x^2}=0$$

$e^{-x^2}\neq 0$ ومنه: $\boxed{b=0}$ (0,25)

* لدينا: المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0 والذي معادلته: $(T): y=(1-e)x+1$

أي: $f'(0)=1-e$

$$f'(x)=m+ae^{-x^2}-2xe^{-x^2}(ax+b)$$

$$f'(x)=m+ae^{-x^2}-2ax^2e^{-x^2}-\cancel{2bxe^{-x^2}}$$

$$f'(x)=1+ae^{-x^2}-2ax^2e^{-x^2}$$

$$f'(0)=1+a$$

$$1+a = 1-e$$

ومنه : $\boxed{a=-e}$ 0,25

II

$$f(x) = x+1-exe^{-x^2}$$

1 /1- تبيان أن f' مشتقة الدالة f زوجية :

ط1 : لدينا :

$$f(x)+f(-x) = 2$$

$$f'(x)+(-f'(-x)) = 0$$

$$f'(x) = f'(-x)$$

ومنه $f'(x)$ دالة زوجية . 0,25

ط2 : لدينا : (4 س)

$$f'(x) = 1+a\,e^{-x^2} - 2a\,x^2e^{-x^2} \qquad a=-e$$

$$f'(x) = 1-e\,e^{-x^2} - 2e\,x^2e^{-x^2}$$

$$f'(-x) = 1-e\,e^{-(-x)^2} - 2e(-x)^2e^{-(-x)^2}$$

$$f'(-x) = 1-e\,e^{-x^2} - 2e\,x^2e^{-x^2} = f'(x)$$

ومنه $f'(x)$ دالة زوجية .

ب/- تبيان أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1+(2x^2-1)e^{-x^2+1}$$

لدينا :

$$f'(x) = 1-e\,e^{-x^2} - 2e\,x^2e^{-x^2}$$

$$f'(x) = 1-e^{-x^2+1} - 2x^2e^{-x^2+1}$$

$$f'(x) = 1-e^{-x^2+1}(1-2x^2)$$

$$f'(x) = 1+(2x^2-1)e^{-x^2+1}$$ 0,25

جـ/- دراسة تغيرات الدالة f' :

* حساب النهايات :

$$f'(x) = 1+2x^2e^{-x^2+1} - e^{-x^2+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(1+2x^2e^{-x^2+1} - e^{-x^2+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1+2x^2e^{-x^2}\cdot e^{1} - e^{-x^2}\cdot e^{1}\right)$$

بوضع $X=-x$ ومنه : $x\to-\infty$ فإن $X\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty}\left(1+2X^2e^{-X^2}e^{1} - e^{-X^2}e^{1}\right)$$

$$= \lim_{X\to+\infty}\left(1+2\frac{X^2}{e^{X^2}}e - \frac{1}{e^{X^2}}e\right)$$

$$= \lim_{X\to+\infty} 1+2\left(\frac{X}{e^{X}}\right)^2 e - \frac{1}{e^{X^2}}e = 1$$ 0,25

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+2x^2e^{-x^2+1} - e^{-x^2+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+2\frac{x^2}{e^{x^2}}e - \frac{e}{e^{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+2\left(\frac{x}{e^{x}}\right)^2 e - \frac{e}{e^{x^2}}\right) = 1$$ 0,25

$$f''(x) = 4x\,e^{-x^2+1} - 2xe^{-x^2+1}(2x^2-1)$$

$$f''(x) = 4xe^{-x^2+1} - 4x^3e^{-x^2+1} - 2xe^{-x^2+1}$$

$$f''(x) = (4x-4x^3-2x)e^{-x^2+1}$$

$$f''(x) = -2x(-2+2x^2-1)e^{-x^2+1}$$

$$f''(x) = -2x(2x^2-3)e^{-x^2+1}$$ 0,25

إشارة $f''(x)$ من إشارة $-2x$. $2x^2-3$

$$f''(x) = 0$$

معناه : إما : $-2x=0$

$$x=0$$

أو $2x^2-3=0$

$$2x^2=3$$

$x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ أو $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$-2x$		+		+	0	−		−	
$2x^2-3$		+	0	−		−	0	+	
$f''(x)$		+	0	−	0	+	0	−	
$f'(x)$	1	↗	$1+\frac{2}{\sqrt{e}}$	↘	$1-e$	↗	$1+\frac{2}{\sqrt{e}}$	↘	1

0,25 0,25

كتابة التغيرات لغويا

د - برهان أن المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حلا وحيدا 0,25 α حيث $0,51<\alpha<0,52$ ثم استنتاج حصر لـ β :

الدالة f' مستمرة ورتيبة تماما على $[0,51;0,52]$

و $f'(0,51)\times f'(0,52)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f'(x)=0$

تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,51<\alpha<0,52$ 0,25

* استنتاج حصر لـ β :

بما أن f' زوجية فإن : $f'(-\alpha)=f'(\alpha)=0$ 0,25

ومنه : $\beta=-\alpha$ أي $-0,52<\beta<-0,51$ 0,25

2- تعيين معادلتي مماسي (C_f)، (T_1) و (T_2) الموازيان لـ (d):

$(d): y = x+1$

نحل المعادلة:

$f'(x) = 1$

$1+(2x^2-1)e^{-x^2+1} = 1$

$(2x^2-1)e^{-x^2+1} = 0$

بما أن $e^{-x^2+1} \neq 0$

$2x^2-1 = 0$

$x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow$ إما $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ أو $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

0,25

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$(T_1): y = f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1+\left(2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-1\right)e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1}$

$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1+\left(\frac{2\times 2}{4}-1\right)e^{-\frac{2}{4}+1} = 1$

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}+1-e\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}+1-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{2}{4}+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}+1-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{2}}$

$(T_1): y = 1\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}+1-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e}$

$(T_1): y = x\cancel{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\cancel{+\frac{\sqrt{2}}{2}}+1-\frac{\sqrt{2e}}{2}$

$(T_1): y = x+1-\frac{\sqrt{2e}}{2}$ 0,25

$(T_2): y = f'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$f'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}+1+e\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{2}{4}+1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{2}}$

$(T_2): y = 1\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e}$

$(T_2): y = x\cancel{+\frac{\sqrt{2}}{2}}\cancel{-\frac{\sqrt{2}}{2}}+1+\frac{\sqrt{2e}}{2}$

$(T_2): y = x+1+\frac{\sqrt{2e}}{2}$ 0,25

3- أ- رسم (T_1) و (T_2) 0,5

ب- الحل البياني:

الحل البياني للمعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y_m = x+m$ الموازي لـ (d)، (T_1) و (T_2) 0,25×7

- إذا كان $m < 1-\frac{\sqrt{2e}}{2}$ فإن المعادلة $f(x)=x+m$ لا تقبل حلولا.
- إذا كان $m = 1-\frac{\sqrt{2e}}{2}$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا تماما.
- إذا كان $1-\frac{\sqrt{2e}}{2} < m < 1$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين تماما.
- إذا كان $m = 1$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما.
- إذا كان $1 < m < 1+\frac{\sqrt{2e}}{2}$ فإن المعادلة تقبل حلين سالبين تماما.
- إذا كان $m = 1+\frac{\sqrt{2e}}{2}$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا سالبا تماما.
- إذا كان $m > 1+\frac{\sqrt{2e}}{2}$ فإن المعادلة لا تقبل حلولا.