مديرية التربية لولاية الأغواط	المستوى: السنة الثالثة ثانوي
الشُعب: العلوم التجريبية 1–2–3	02 ديسمبر 2019م
اختبار الفصل الأول في مادة: الرياضيات	المدة: ســاعـــتـــان

التمرين الأول: (06 نقاط)

أجب بصحيح أو خطأ على الآتي مع التبرير: (بيان طريقة الحساب)

- حلول المعادلة التفاضلية $y'+2y=3$ هي الدوال $f(x) = Ce^{-2x} - \frac{3}{2}$
- a و b عددان حقيقيان سالبان تماما بحيث $a < b$ فإنّ $\ln(-a) < \ln(-b)$
- مجموعة حلول المعادلة $2(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$ هي: $\left\{-2 \middle| \frac{3}{2}\right\}$
- من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;1[$ فإنَّ: $\ln x > O$
- $e^{\ln 5} + e^{\ln -5} = 0$
- عبارة التقريب التآلفي للدالة $f(x) = e^{2x} - \ln(x+1)$ المعرفة على $]-1;+\infty[$ بجوار 0 هي $y = 2x + e^1$.

التمرين الثاني: (14 نقاط)

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR بـــ: $f(x) = x + \frac{2}{e^x+1}$ وتمثيلها البياني (C_f) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0, \vec{I}, \vec{J})$

1. أدرس تغيرات الدالة f
2. بيِّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتهما $y = x$ و $y = x + 2$
3. أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 0.
4. بين أن A نقطة انعطاف لـــ: (C_f)
5. بين أنه مهما يكن x فإن: $f(x) + f(-x) = 2$
6. أثبت أن A مركز تناظر (Cf)
7. أحسب $f(1)$ و $f(2)$ ثم استنتج $f(-1)$ و $f(-2)$
8. بين أن المنحنى يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها α بحيث: $-2 < \alpha < -1$
9. أرسم (Δ) و (C_f).

الإجابة المفصلة لإختبار الفصل الأول لشعبة علوم تجريبية

التمرين الأول:

- خطأ لأن حلول المعادلة التفاضلية $y'+2y=3$ هي الدوال من الشكل $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ مع $C \in R$ أي $y' = -2y+3$ ومنه الحلول هي $f(x) = Ce^{-2x} + \frac{3}{2}$
- خطأ لأن من أجل كل a و b من $R*$ إذا كان: $-a > -b$ فإنّ: $ln(-a) > ln(-b)$
- خطأ لأن $2(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$ ………(1)

نضع: $t = ln\, x$ ومنه: المعادلة (1) تصبح $2t^2 + t - 6 = 0$ ونجد $\Delta = 49$ ومنه: $t = -2$ و $t = \frac{3}{2}$ وعليه نجد: $t = ln\, x = -2$ و $t = ln\, x = \frac{3}{2}$ أي: $S = \begin{cases} x = e^{-2} \\ x = e^{3/2} \end{cases}$

- خطأ من أجل $]0;1]$ لدينا: $ln\, x \le 0$
- خطأ لأنَّ: $e^{\ln 5} + e^{-ln\, 5} = e^{ln\, 5} + e^{ln\, 1/5} = 5 + \frac{1}{5} = \frac{26}{5} \neq 0$
- خطأ أحسن تقريب تآلفي للدالة $f(x)$ المعرفة على $]-1;+\infty[$ بجوار 0 هو:

$$y \approx f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$\approx f'(0)x + f(0)$$

لدينا: $f(x) = e^{2x} - \ln(x+1)$ وبالاشتقاق نجد: $f'(x) = 2e^{2x} - \frac{1}{x+1}$

ومنه: $f'(0) = 2 - 1 = 1$ و $f(0) = 1 + 0 = 1$

إذن وبعد التعويض في المعادلة $y \approx f'(0)x + f(0)$ نجد: $y \approx x + 1$

التمرين الثاني:

1- لدينا الدالة: $f(x) = x + \frac{2}{e^x+1}$

النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x + \frac{2}{e^x+1}\right) = -\infty$ لأنَّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x + \frac{2}{e^x+1}\right) = +\infty$ لأنَّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{1+e^x} = 0$

المشتقة: الدالة f قابلة للاشتقاق على IR أي: $f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1+e^{2x}}{(1+e^x)^2}$

إشارة المشتقة: لدينا: $e^x > 0$ وعليه: $(1+e^x)^2 > 0$ و $e^x + 1 > 0$ إذن: $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة متزايدة تماماً على مجال تعريفها.

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	↗ $+\infty$

2- بيان أن المنحنى يقبل مستقيمين مقاربين:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - y] = \lim_{x\to-\infty}\left[x + \frac{2}{1+e^x} - x - 2\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{1+e^x} - 2\right] = 2 - 2 = 0$$

أي أن المنحنى يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$ معادلته $y = x + 2$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y] = \lim_{x\to+\infty}\left[x + \frac{2}{1+e^x} - x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{1+e^x}\right] = 0$$

أي أن المنحنى يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y = x$

3- معادلة المماس (Δ) عند النقطة A:

لدينا: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

4- بيان أن A نقطة انعطاف:

لدينا: $f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$ وبالإشتقاق مرة ثانية نجد: $f''(x) = \frac{(1-e^x)2e^x}{(e^x+1)^3}$

<u>إشارة $f''(x)$:</u> لدينا: $(e^x + 1)^3 > 0$ و $2e^x > 0$ وعليه: $1 - e^x = 0$ أي: $x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

ومنه المشتقة الثانية انعدمت عند $x = 0$ مغيرة إشارتها وبالتالي النقطة $A\,(0, f(0))$ أي: $A(0,1)$ نقطة انعطاف.

5- بيان أن $f(x) + f(-x) = 2$:

$$f(x) + f(-x) = x + \frac{2}{e^x+1} - x + \frac{2}{e^{-x}+1} = \frac{2}{e^x+1} + \frac{2}{\frac{1}{e^x}+1} = \frac{2(e^x+1)}{e^x+1} = 2$$

6- الاستنتاج: نستنتج أن النقطة $A(0,1)$ مركز تناظر لـ(Cf)

7- حساب $f(2)$ و $f(1)$:

$f(2) = 2 + \frac{2}{e^2+1} \approx 2{,}24$ و $f(1) = 1 + \frac{2}{e^1+1} \approx 1{,}54$

8- استنتاج $f(-2)$ و $f(-1)$:

لدينا: $f(x) + f(-x) = 2$ وعليه:

$f(1) + f(-1) = 2$ ومنه: $f(-1) = 2 - f(1) = 2 - 1{,}54 = 0{,}46$

$f(2) + f(-2) = 2$ ومنه: $f(-2) = 2 - f(2) = 2 - 2{,}24 = -0{,}24$

9- بيان أنه (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث : $-2 < \alpha < -1$:

بما أن الدالة مستمرة ومتزايدة تماما على مجال تعريفها ولدينا: $f(-1)f(-2) < 0$

وعليه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة α حيث : $-2 < \alpha < -1$

تم بحمد الله

"رفعته الطالبة علاوي مريم جزاها الله ألف خير وجعله في ميزان حسناتها"