المستوى:الثالثة ثانوي رياضيات	ديسمبر 2019
الاختبار الثلاثي الأول في الرياضيات	المدة :سا2.5

التمرين الأول(4.5 نقط)

اجب بصحيح و خطأ مع التبرير

1) f الدالة المعرفة على$[0\ ;\ 2\pi]$ كما يلي : $f(x) = e^{-x}.sinx$. (C_f) منحناها البياني .

ا) - من اجل كل عدد حقيقي x من $[0\ ;\ 2\pi]$ تكون : $f'(x) = e^{-x}.(sinx + \cos x)$

ب)- من اجل كل عدد حقيقيx من $[0\ ;\ 2\pi]$ تكون : $f'(x) = \sqrt{2}\, e^{-x}.\cos(x + \frac{\pi}{4})$

ج) - المماس للمنحنى (C_f) عند المبدأ معادلته هي :$y=x$.

2) نعتبر الدالة kالمعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $k(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}$. (C_k)منحناها البياني .

ا)– المبدأ O هو مركز تناظر للمنحنى (C_k)

ب)- $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$

ج) - من اجل كل عدد حقيقي x تكون : $k'(x) = \frac{2x(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$

التمرين الثاني(7.5 نقطة)

الجزء الأول

نعتبر الدالة f_α المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f_\alpha(x) = e^{2x} - 2\alpha e^x + 3$

و ليكن (C_α) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس .$(O\ ;\ \vec{i};\ \vec{j})$

1) عين حسب الوسيط الحقيقي α عدد القيم الحدية للدالة f_α .

عين بدلالة α إحداثيتي النقطة ω_α النقطة الحدية في حالة وجودها .

الجزء الثاني

نضع في كل ما يأتي : $\alpha=1$ ، و لتكن f_1 الدالة التي نريد دراستها و (C_1) تمثيلها البياني :

1) ادرس تغيرات الدالة f_1 و المستقيمات المقاربة .

2) عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_1) عند النقطة ذات الفاصلة $ln2$.

3) ارسم كلا من (T) و (C_1) .

4) ليكن (D_m) المستقيمات المعرفة ب : $y=mx+3-m\ ln\ 2$ ، حيث m وسيط حقيقي .

أ) بين أن المستقيمات (D_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثياتها.

ب) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد نقاط تقاطع (C_1) مع (D_m) .

5) نعتبر gالمعرفة على $\mathbb{R}$ ب:

الدالة$g(x) = -e^{2x} + 2e^x + 3$

أ) اكتب $g(x)$ بدلالة $f_1(x)$.

ثم بين أن (C') و (C_1) متناظران بالنسبة للمستقيم (d) يطلب تحديد معادلته.

ب) ارسم المنحى (C') منحنى الدالة g في المعلم السابق .

التمرين الثالث(8 نقطة)

الجزء الأول

نعتبر الدالتين h و g المعرفتين على المجال $]0 ;+\infty[$ ب:

$$g(x)=x-1-\ln x \quad ; \quad h(x)=x+(x-2)\ln x$$

1) أ) ادرس تغيرات الدالة g .

ب) استنتج أن $g(x)\geq 0$ من اجل كل x من المجال $]0 ;+\infty[$.

2) بين انه من اجل كل x من المجال $]0 ;+\infty[$: $h(x)=1+g(x)+(x-1)\ln x$

3) أ) بين انه من اجل كل x من المجال $]0 ;+\infty[$: $(x-1)\ln x\geq 0$

ب) استنتج إشارة $h(x)$.

الجزء الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0 ;+\infty[$ ب:

$$f(x)=1+x\ln x-(\ln x)^2$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس . $(O ;\vec{i};\vec{j})$

1) احسب النهايات عند أطراف مجال التعريف. فسر النتيجة هندسيا .

2) أ) بين انه من اجل كل x من المجال $]0 ;+\infty[$: $f'(x)=\frac{h(x)}{x}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول التغيرات .

3) أ) عين معادلة (Δ) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

ب) بين انه من اجل كل x من المجال $]0 ;+\infty[$: $f(x)-x=(\ln x-1)\,g(x)$

ج) ادرس إشارة $f(x)-x$ ثم استنتج الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المماس (Δ) .

4) أنشئ (C_f) و (Δ) .

الجزء الثالث

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n كما يلي :

$$\begin{cases} u_0=\sqrt{e} \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$$

1) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $1< u_n < e$

بالتوفيق

الرياضيات كالخيال و الخيال هو السلاح الوحيد الذي نمتلكه لمواجهة الواقع.

التصحيح النموذجي

<table>
<tr><th>رقم التمرين</th><th>الحل</th><th colspan="2">العلامة</th></tr>
<tr><td>التمرين 1</td><td>1) ا) خطأ لأن $f'(x) = e^{-x}.(\cos x - sinx)$
ب) صحيح.
ج) صحيح .
2) ا) خطأ الدالة زوجية معناه تقبل محور تناظر.
ب) خطأ لأن $\lim_{x\to+\infty} k(x)= -\infty$
ج) صحيح .</td><td>0.75
0.75
0.75
0.75
0.75
0.75</td><td>4.5 ن</td></tr>
<tr><td>التمرين 2</td><td>الجزء الأول
1) $f_\alpha'(x)=2e^{2x}-2\alpha e^x$
القيم الحدية للدالة تحقق $f_\alpha'(x)=0$ و منه $e^x=\alpha$
$\alpha \le 0$ لا توجد قيم حدية للدالة
$\alpha \ge 0$ تقبل قيمة حدية هي $w_\alpha(\ln\alpha ; f(\ln\alpha))$
2) القيمة الحدية هي $w_\alpha(\ln\alpha ; 3-\alpha^2)$
الجزء الثاني
1) دراسة تغيرات و المستقيمات المقاربة للدالة
$f_1'(x)=2e^{2x}-2e^x$
جدول الإشارة
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
</table>
f_1 متزايدة تماما على المجال]0 ; +∞[و متناقصة تماما على المجال]-∞ ; 0[
النهايات
$\lim_{x\to+\infty} f_1(x)=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f_1(x)=3$
و منه $y=3$ مستقيم مقارب افقي بجوار للمنحنى $-\infty$.</td><td>0.5
0.5
0.5
0.25
0.25
0.25
0.5
0.25</td><td>7.5 ن</td></tr>
</table>

جدول التغيرات

0.5

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	3 ↘	2	↗ $+\infty$

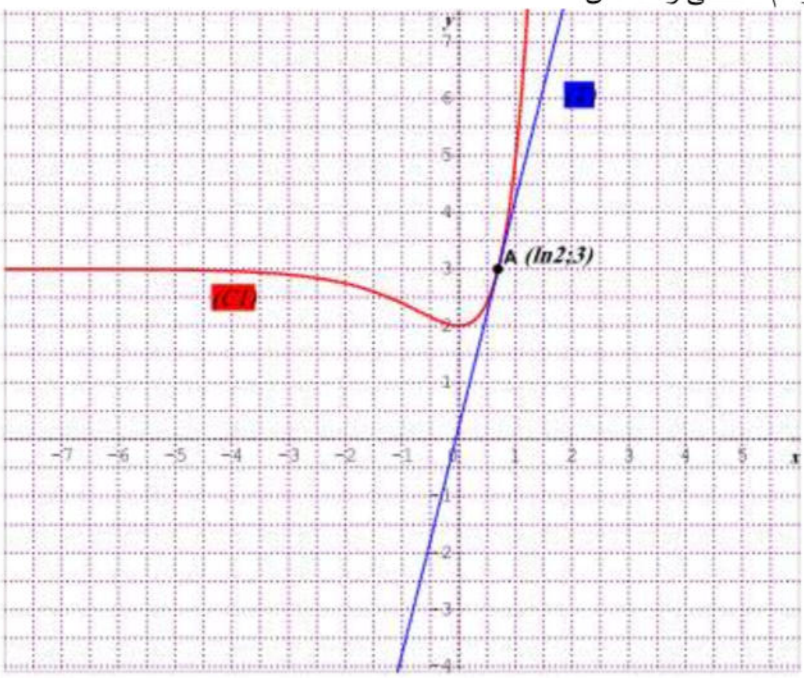
0.5

2) معادلة المماس

$$(T):y=4x-4\ln 2+3$$

0.75

3) رسم المنحنى و المماس



4) أ) المستقيمات (D_m) تشمل نقطة ثابتة ذات الإحداثيات $A(\ln 2\,;\,3)$

ب) المناقشة البيانية الدوارنية

عدد نقط تقاطع (C_1) مع (D_m)

لما $m\leq 0$ (C_1) يقطع (D_m) في نقطة وحيدة هي $A(\ln 2\,;\,3)$

0.75

لما $0<m<4$ (C_1) يقطع (D_m) في نقطتين إحداهما $A(\ln 2\,;\,3)$

لما $m=4$ (C_1) يمس (D_m) في النقطة $A(\ln 2\,;\,3)$

لما $m>4$ (C_1) يقطع (D_m) في نقطتين إحداهما $A(\ln 2\,;\,3)$

0.5

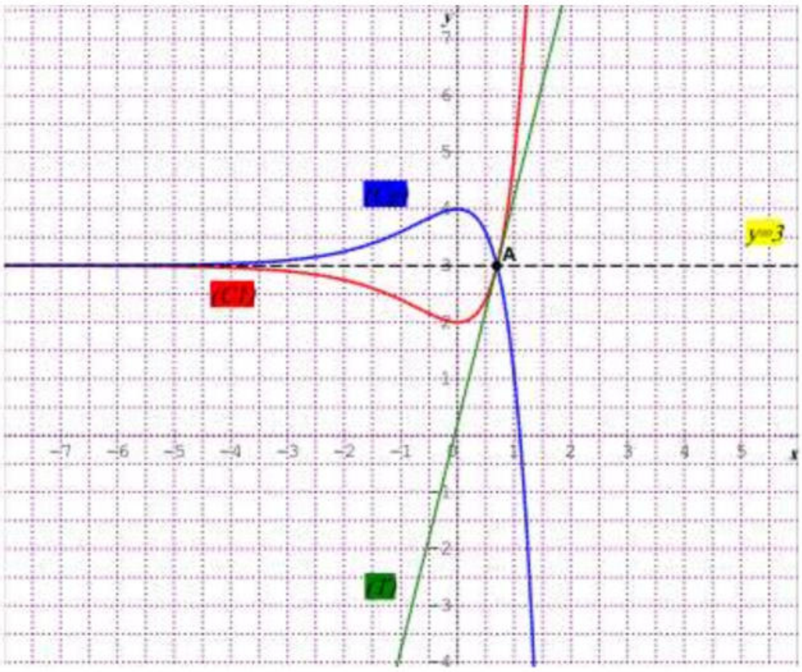
5) أ) $g(x)=6-f_1(x)$

(C') و (C_1) متناظران بالنسبة للمستقيم (d) ذو المعادلة $y=3$

0.25

ب) رسم المنحى (C')

0.5



0.75

التمرين3

الجزء الأول

1) أ) دراسة تغيرات الدالة g .

$$g'(x) = 1-\frac{1}{x}$$

0.25

جدول الإشارة

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

7 ن

0.25

g متزايدة تماما على المجال $[1 ; +\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]0 ; 1]$

جدول التغيرات

0.5

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

0.5

ب) استنتج أن $g(x) \geq 0$ من اجل كل x من المجال $]0;+\infty[$.
من جدول التغيرات نلاحظ أن الدالة تقبل قيمة حدية صغرى

0.5

2)نبين انه من اجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $h(x)= 1+ g(x) +(x-1) \ln x$

$h(x)=x + (x-2) \ln x$
$= x+x \ln x -2 \ln x$
$= x+x \ln x - \ln x-\ln x -1 +1$
$=1+(x - 1 - \ln x) +(x-1) \ln x$
$= 1+ g(x) +(x-1) \ln x$

0.5

3) أ) نبين انه من اجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $(x-1) \ln x \geq 0$
جدول الإشارة

x	0		1		$+\infty$
$(x-1)\ln x$		$+$	0	$+$	

0.5

ب) استنتاج إشارة $h(x)$.

0.5

$h(x) \geq 0$

الجزء الثاني

1

النهايات

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$;

$x=0$ مستقيم مقارب للمنحنى.

0.5

$f'(x) = \ln(x)+1-2\frac{\ln(x)}{x}$

$f'(x) = \frac{h(x)}{x}$

ب) اتجاه التغير
جدول الإشارة

0.5

x	0	$+\infty$

$h(x)$	+

f متزايدة تماما على $]0\,;+\infty[$

0.5

3) أ) معادلة (Δ) مماس (C_f)

$(\Delta) : y = x$

0.5

ب) نبين انه من اجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$: $f(x) - x = (\ln x - 1)\, g(x)$

$f(x) - x = 1 + x\ln x - (\ln x)^2 - x$

$= x(\ln x - 1) + 1 - (\ln x)^2$

$= x(\ln x - 1) - ((\ln x)^2 - 1)$

$= (\ln x - 1)(x - 1 - \ln x)$

و منه $f(x) - x = (\ln x - 1)\, g(x)$

0.5

ج) إشارة $f(x) - x$

جدول الإشارة

x	0		1		e		$+\infty$
$f(x) - x$		-	0	-	0	+	

0.5

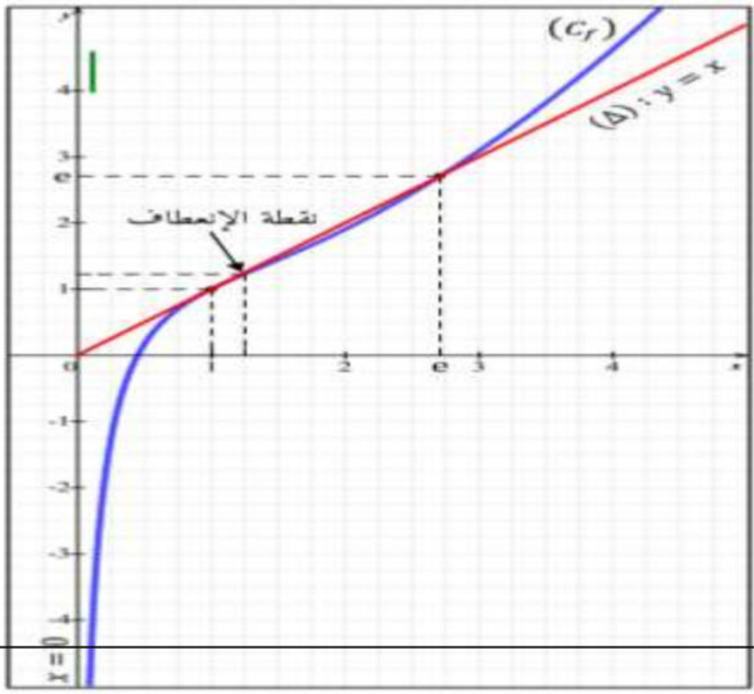
(C_f) فوق (Δ) في المجال $]e\,;+\infty[$

(C_f) تحت (Δ) في المجال $]0\,;1[\cup]1\,;e[$

0.5

(C_f) يقطع (Δ) في النقطتين $(e\,;e)$ و $(1\,;1)$

4) إنشاء (C_f) و (Δ)



	0.5	**الجزء الثالث** 1) البرهان بالتراجع أن : $P(n)$ ....$1< u_n < e$ من اجل $n=0$ فان $1< u_0 < e$ ادن $P(n)$ صحيحة . نبرهن صحة $1< u_{n+1} < e$. لدينا $1< u_n < e$. و الدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) متزايدة تماما على المجال $]1 ; e[$ ومنه $1< u_{n+1} < e$ و منه $P(n+1)$ صحيحة.	