المستوى:الثالثة علوم تجريبية **نوفمبر 2022**

فرض الفصل الأول في مادة الرياضيات **المدة : ساعتين.**

التمرين

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = e^x + x - 2$

1) أدرس تغيرات الدالة g .

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.4 < \alpha < 0.5$

3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 1 - x + \frac{x-1}{e^x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ وحدته $2\ cm$.

1) بين أن :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x) = \frac{-g(x)}{e^x}$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) بين أن : $f(\alpha) = -\left(\alpha + \frac{1}{\alpha-2}\right)$ ، ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$.

5) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

6) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ)، ثم اكتب معادلته.

7) أحسب $f(0)$ و $f(1)$ ثم أنشئ $(T), (\Delta)$ و (C_f).

8) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة :

$$(m-1)e^x + 1 = x$$

9) أ) عين إشارة $f(x)$.

ب) أنشئ في نفس المعلم المنحنى (C_h) الممثل للدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = |f(x)|$$

بالتوفيق.

التصحيح النموذجي

العلامة	الحل	رقم التمرين
		التمرين

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = e^{x} + x - 2$

1)دراسة تغيرات الدالة g

- النهايات: (0.5 ن)

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

- الدالة المشتقة:

g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و g' دالتها المشتقة حيث :

من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $g'(x) = e^{x} + 1$

- إشارة $g'(x)$: (1 ن)

$g'(x) > 0$ لأن $1 > 0$ و $e^{x} > 0$

و منه g دالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

- جدول التغيرات (0.5 ن)

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2) نبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.4 < \alpha < 0.5$ (0.5 ن)

g دالة مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ومنه مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[0.4 ; 0.5]$

لدينا $g(0.4) = -0.11$; $g(0.5) = 0.15$ و منه $g(0.4)\times g(0.5) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.4 < \alpha < 0.5$

3) استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

0.5 ن

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 1 - x + \frac{x-1}{e^x}$

1) نبين أن : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(1 - x + \frac{x-1}{e^x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left[(x-1)\left(-1+\frac{1}{e^x}\right)\right] = -\infty$$

0.5 ن

لأن
$$\begin{cases}\lim_{x\to-\infty} x-1 = -\infty \\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x} = +\infty\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - x + \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = -\infty$$

لأن

0.5 ن

$$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty} 1-x = -\infty \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0\end{cases}$$

2) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = \frac{-g(x)}{e^x}$

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و f' دالتها المشتقة حيث :

من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x) = -1 + \frac{e^x - xe^x + e^x}{(e^x)^2}$

و منه : $f'(x) = \frac{-e^{2x} - xe^x + 2e^x}{(e^x)^2}$

2 ن

و منه: $f'(x) = \frac{-(e^x + x - 2)}{e^x}$

إذن : $f'(x) = \frac{-g(x)}{e^x}$

3) استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها.

- إشارة $f'(x)$: من إشارة $-g(x)$ لأن $e^x > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$-g(x)$		+	0	-	
$f'(x)$		+	0	-	

1.5 ن و منه f دالة متزايدة تماما على المجال $]-\infty ; \alpha]$
و متناقصة تماما على المجال $[\alpha ; +\infty[$

- جدول التغيرات

0.5 ن

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

4) نبين أن : $f(\alpha) = -\left(\alpha + \frac{1}{\alpha-2}\right)$

لدينا : $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{\alpha-1}{e^{\alpha}} \quad \ldots \quad (*)$

و لدينا مما سبق: $g(\alpha) = 0$ و منه $e^{\alpha} = -(\alpha - 2)$

1 ن بالتعويض في $(*)$ نجد : $f(\alpha) = 1 - \alpha - \left(\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\right)$

إذن : $f(\alpha) = -\left(\alpha + \frac{1}{\alpha-2}\right)$

- تعيين حصر لـ $f(\alpha)$.

0.5 ن لدينا : $0.4 < \alpha < 0.5$ و $f(\alpha) = -\left(\alpha + \frac{1}{\alpha-2}\right)$

و منه $0.126 < f(\alpha) < 0.267$

5) أ) نبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{e^x} = 0$$ 1 ن

و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

ب) الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

لدينا $f(x) - y = 0$ معناه $\frac{x-1}{e^x} = 0$ يكافئ $x-1 = 0$ لأن $e^x > 0$ و منه

$x = 1$.

إذن إشارة $f(x) - y$ من اشارة $x-1$ 1 ن

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضعية النسبية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;0)$	(C_f) فوق (Δ)

6) - نبين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يكون موازيا لـ (Δ)، و كتابة معادلته.

معناه : $f'(x) = -1$ و منه $\frac{-(e^x + x - 2)}{e^x} = -1$ أي 1 ن

$e^x + x - 2 = e^x$ إذن $x = 2$

و منه المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يكون موازيا لـ (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 2

- معادلة المماس (T)

لدينا $f'(2) = -1$ و $f(2) = -1 + \frac{1}{e^2}$ اذن : $(T): y = -x + 1 + \frac{1}{e^2}$ 0.5 ن

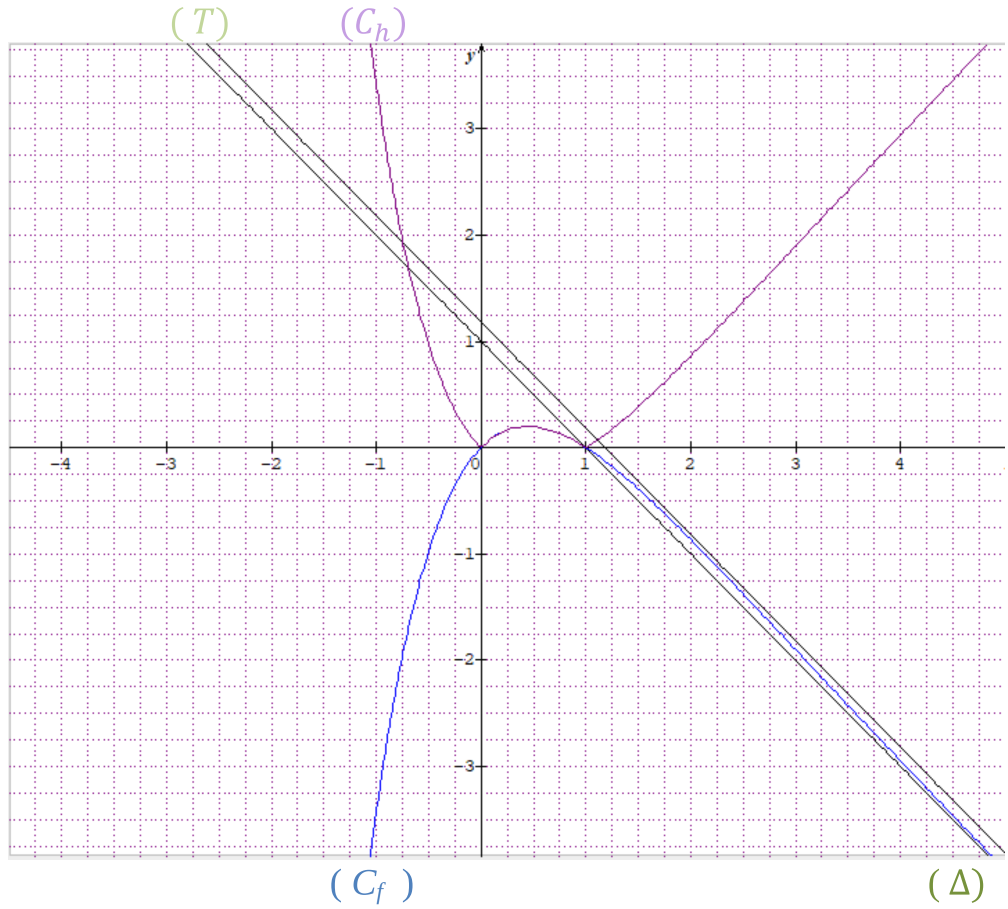
7) - حساب $f(0)$ و $f(1)$

$f(0) = 0$; $f(1) = 0$

0.5 ن

انشاء (Δ) ; (T) و (C_f).

1.5 ن



8) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m اشارة حلول المعادلة :
$(m-1)e^x+1=x$

لدينا $(m-1)e^x+1=x$ و منه $f(x) = -x+m$

إذن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) و المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة
$y = \; = -x+m$.

2 ن

- لما $m \in]-\infty;1]$ فإن المعادلة تقبل حل وحيد
- لما $m \in]1;1+\frac{1}{e^2}[$ فإن المعادلة تقبل حلين
- لما $m= 1+\frac{1}{e^2}$ فإن المعادلة تقبل حل وحيد
- لما $m \in]\frac{1}{e^2};+\infty[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول

9) أ) إشارة $f(x)$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	-	

1 ن

ب) انشاء في نفس المعلم المنحنى (C_h) الممثل للدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = |f(x)|$$

- لما $x \in [0;1]$ فإن (C_h) ينطبق على (C_f).
- لما $x \in]-\infty;0] \cup [1;+\infty[$ فإن (C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل .

2 ن