الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية الأغواط

ثانوية الشَّيخ أحمد قصيبة

الاختبـار الأوّل في مــــادَّة الرياضيات لسنوات الثَّالثة رياضيات

2018/12/03

من 8:00 ← 11:00 إلى

ملاحظة

- يحتوي الموضوع على سؤال نظري و أربعة تمارين.
- كل التمارين إجبارية .
- تُمنح نُقْطَةٌ وَاحِدَةٌ عَلَى تَنْظِيمِ وَرَقَةِ الإِجَابَةِ.

السُّؤَالُ النَّظَرِي:(نُقْطَةٌ وَاحِدَةٌ)

علما أنّ الدالة "ln" مستمرة و قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$.

أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$, $ln'(x)=\frac{1}{x}$.

التمرين الأوّل: (03نِقَاطٍ):

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): x^2-5y^2=3$.

1) - أ) أثبت أنه إذا كان $(x;y)$ حلاً للمعادلة (E) فإنّ: $x^2\equiv 3\,[5]$.

1) - ب) عين البواقي الممكنة لقسمة x^2 على 5.

1) - ج) استنتج أنّ المعادلة (E) لا تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$.

2) - حل في $\mathbb{Z}$ الموافقة: $x^2+3x+1\equiv 0\,[5]$.

التمرين الثاني: (03نِقَاطٍ):

أجب بـ :صحيح أو خطأ مع التبرير.

1- من أجل كل x من $\mathbb{R}_+^*$, و من أجل كل n من $\mathbb{Q}$, $ln\left(ln\left((x)^{(2)^{(-n)}}\right)\right)=-n\,ln\,2+ln\left(ln(x)\right)$.

2- من أجل كل x من $[-1;0[$, $e^{|ln(|x|)|}=\frac{1}{x}$.

3- لدينا: n عدد طبيعي غير معدوم وَ x عدد حقيقي من $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

إذا كان: $\begin{cases} log(sin\,x)+log(cos\,x)=-1 \\ log(sin\,x+cos\,x)=\frac{1}{2}(-1+log\,n) \end{cases}$ فإنّ: $n=12$.

التمرين الثالث: (06نِقَاطٍ):

في الشكل المقابل , C_f هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بالعلاقة $f(x)=\frac{4x}{1+x}$. و لدينا $\Delta: y=x$.

I- تحقق أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;3]$.

II- لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدها الأوّل $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1}=\frac{4u_n}{1+u_n}$.

1) أعد رسم الشكل ثم مثل الحدود u_0, u_1, u_2 وَ u_3 على محور الفواصل دون حسابها, مُبرزا خطوط الإنشاء.

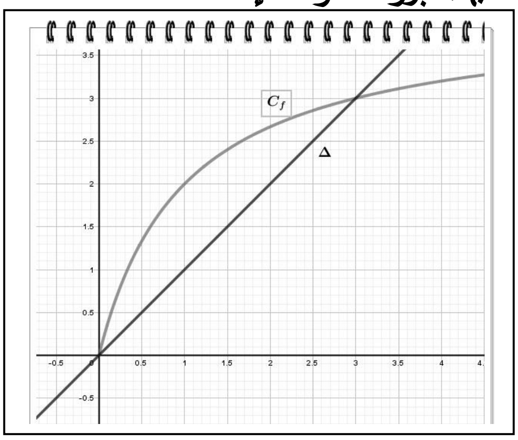
2) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها.

3) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n, $0<u_n<3$.

4) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة .

III- (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\frac{u_n-3}{u_n}$.

1) - أ) بين أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل.



1) - ب) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \dfrac{3}{1+2\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}$.

2) عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n = -\dfrac{341}{128}$.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n = \dfrac{3}{u_0} + \dfrac{3}{u_1} + \dfrac{3}{u_2} + ... + \dfrac{3}{u_n}$.

3) - أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n = \dfrac{8}{3}\left(1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + n + 1$.

3) - ب) أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$.

3) - ج) أدرس إتجاه تغير المتتالية (S_n).

التمرين الرابع (06نقاط):

الجزء الأول:

g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = e^x(2-x) - 2$. C_g تمثيلها في معلم متعامد و متجانس.

1) أحسب: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ وَ $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

2) أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.5 < \alpha < 1.6$.

4) أحسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة الدالة g على $\mathbb{R}$.

5) بين أن معادلة المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة α تُكتب على الشكل: $y = \dfrac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)}(x-\alpha)$.

6) لتكن الدالة العددية h المعرفة على $]0, +\infty[$ كما يلي: $h(x) = |g(x)|$.

- بين أنّ الدالة h غير قابلة للاشتقاق عند $x_0 = \alpha$.

الجزء الثاني:

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1}; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

1) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. ثم بـرّر أنها مستمرة على $\mathbb{R}$.

2) أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ثم بين أنّ: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$، $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(e^x - 1)^2}$.

4) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5) بين أنّ: $f(\alpha) = \alpha(2-\alpha)$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

6) أنشئ C_f منحنى الدالة f في معلم متعامد و متجانس.

7) ناقش بيانيا وَ حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = e^{-m}$.