ثانوية محمد بلخير　　　　　　　　　　　　　　　　الشعبة: رياضيات

## الامتحان التجريبي لشهادة البكالوريا دورة : جوان 2015

---

اختبار في مادة : **الرياضيات**　　　　　　　　　　　　المدة: **04 ساعات ونصف**

---

**على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين**

## الموضوع الأول : (20 نقطة)

### التمرين الأول:( 5 نقاط)

المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ ؛ (الوحدة $2cm$ ).

I. نعتبر النقطتين $A$ و $B$ ذات اللاحقتين $i$ و $2$ على الترتيب

1. عين لاحقة النقطة $B_1$ صورة النقطة $B$ بالتحاكي $\hbar$ الذي مركزه $A$ ونسبته $\sqrt{2}$
2. عين لاحقة النقطة $B'$ صورة النقطة $B_1$ بالدوران $\Re$ الذي مركزه $A$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$

II. نضع $f = \hbar o \Re$

1. ما طبيعة التحويل $f$ ؟ يطلب تعين عناصره المميزة
2. لتكن $M$ نقطة كيفية من المستوي ذات اللاحقة $z$ نرمز بـ $M'$ إلى صورة النقطة $M$ بالتحويل $f$ ونرمز بــ $Z'$ إلى لاحقة النقطة $M'$

أ. بين أن الكتابة المركبة للتحويل $f$ هي: $z' = (1+i)z + 1$

ب. من اجل كل عدد مركب $z$ يختلف عن $i$: أحسب $\frac{Z'-Z}{i-Z}$ ثم أعط تفسيرا هندسيا لطاولة وعمدة العدد $\frac{Z'-Z}{\boldsymbol{i}-Z}$

ت. استنتج طريقة لإنشاء $M'$ انطلاقا من النقطة $M$ من اجل $M$ تختلف عن $A$

3. لتكن ( ) مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $Z$ و التي تحقق $Z = 2+\sqrt{2}e^{i\theta}$ حيث $\theta$عدد حقيقي

أ. عين طبيعة والعناصر المميزة للمجموعة $(E)$

ب. استنتج انه إذا كانت النقطة $M$ تنتمي الى المجموعة $(E)$ فان صورتها $M'$ بالتحويل $f$ تنتمي الى دائرة $(E')$ يطلب تعين مركزها ونصف قطرها

ت. عين على الرسم النقط $B, A$ و $B'$ ثم ارسم $(E)$ و $(E')$

### التمرين الثاني: ( 4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

نعتبر النقط $A(0\,;4;1)$، $B(1;3;0)$, $C(2;-1;-2)$ و $D(7;-1;4)$.

1. بيّن أن $A$, $B$ و $C$ *ليست* على استقامة واحدة.
2. ليكن المستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة D و $\vec{u}(2;-1;3)$ شعاع توجيه له

أ. بيّن أن المستقيم $(\Delta)$ يعامد المستوي $(ABC)$ .

ب. اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$ .

ت.أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم$(\Delta)$.

ث.عين إحداثيات النقطة $H$ نقطة تقاطع المستقيم $(\Delta)$ والمستوي $(ABC)$ .

3. ليكن $(P_1)$ المستوي ذو المعادلته : $x+y+z=0$ و $(P_2)$ المستوي ذو المعادلته: $x+4y+2=0$

أ. بيّن أن المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$ يتقاطعان وفق مستقيم $(d)$

ب. تحقق أن الجملة $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x=-2-4t \\ y=t \\ z=2+3t \end{cases}$ هي تمثيل وسيطي للمستقيم $(d)$.

ت. هل المستقيم $(d)$ والمستوي $(ABC)$ متقاطعان او متوازيان ؟

**التمرين الثالث: (4,5نقطة)**

I. أحسب PGCD للعددين $4^5-1$ و $4^6-1$

II. نعرف المتتالية $(u_n)$ على المجموعة $\mathbb{N}$ كالاتي: $\begin{cases} u_0=0 \text{ و } u_1=1 \\ u_{n+2}=5u_{n+1}-4u_n \end{cases}$

1. احسب الحدود. $u_2$، $u_3$ و $u_4$
2. اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي $n$, $u_{n+1}=4u_n+1$
3. بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$, $u_n$ هو عدد طبيعي
4. استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي$n$, $PGCD(u_n\ ,u_{n+1})$

III. نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ كالاتي : $v_n=u_n+\frac{1}{3}$

1. بين أن المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعين أساسها وحدها الأول $v_0$
2. أكتب $v_n$ ثم $u_n$ بدلالة $n$.
3. عين من اجل كل عدد طبيعي$n$, $PGCD(4^{n+1}-1\ ,4^n-1)$

**التمرين الرابع : ( 6,5 نقطة)**

I. نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=xe^{x-1}+1$

ليكن $(C)$ المنحني الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. عين نهاية الدالة $f$ عند $-\infty$ ثم فسر النتيجة هندسيا.
2. عين نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$.
3. ادرس تغيرات الدالة $f$ ثم شكل جدول التغيرات.

II. ليكن $a$ عدد حقيقي موجب تماما الهدف هو البحث عن مماس للمنحني $(C)$ في النقطة ذات الفاصلة $a$ يشمل المبدأ $O$.

1. نسمي $(T_a)$ المماس للمنحني $(C)$ في النقطة ذات الفاصلة $a$ أكتب معادلة للماس $(T_a)$
2. بين أن المماس $(T_a)$ للمنحني $(C)$ في النقطة ذات الفاصلة $a$ يشمل المبدأ إذا وفقط إذا كان $1-a^2e^{a-1}=0$
3. بين أن $1$ هو الحل الوحيد للمعادلة $1-x^2e^{x-1}=0$ على المجال $]0,+\infty[$
4. استنتج من الأسئلة السابقة أنه يوجد مماس واحد $(T)$ للمنحني $(C)$ يشمل المبدأ $O$ *يطلب كتابة معادلة له*
5. نقبل أن المنحني $(C)$ يقع فوق المماس $(T)$ ارسم المماس $(T)$ ثم المنحني $(C)$.

III. نرمز بـ $\mathcal{D}$ الى مساحة الحيز المحدد بالمنحني $(C)$ والمستقيم $\Delta$ ذو المعادلة $y=2x$ و المستقيمين ذو المعادلتين $x=1$ و $x=0$

1. نضع $I=\int_0^1 xe^{x-1}dx$ باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن $I=\frac{1}{e}$
2. أستنتج القيمة المضبوطة لمساحة الحيز $\mathcal{D}$

## الموضوع الثاني:(20 نقطة)

### التمرين الأول: ( 5 نقاط)

المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس ومباشر $(o;\vec{u};\vec{v})$؛ (الوحدة $4cm$ ).

نعتبر النقط $A$ ،$B$ ،C و$D$ذات اللواحق $Z_A=2i$ ،$Z_B=i$ ، $Z_C=-1+i$ و $Z_D=1+i$ على الترتيب

نرمز بـ $f$إلى التحويل النقطي الذي يرفق كل نقطة $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ وتختلف عن النقطة $B$ بالنقطة $M'$ ذات اللاحقة $z'$ حيث $z'=i\dfrac{z-2i}{z-i}$

1. أنشر $(z-1+i)(z-1-i)$
2. عين لواحق النقط $M$ التي تحقق $f(M)=(M)$
3. من اجل كل عدد مركب $z$ يختلف عن $i$ بين أن $|z'|=\dfrac{AM}{BM}$
4. من اجل عدد مركب $z$ يختلف عن $i$ و$2i$ بين أن $Arg(z')\equiv(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM})+\frac{\pi}{2}[2\pi]$
5. عين المجموعة ( ) مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $Z$ بحيث $|z'|=1$
6. عين المجموعة ( ) مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $Z$ بحيث $Arg(z')\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$
7. من اجل كل عدد مركب $Z$ يختلف عن $i$ بين أن $z'-i=\dfrac{1}{z-1}$ ثم أستنتج أن $|z'-i|\times|z-i|=1$
8. لتكن النقطة $M$ ذات اللاحقة $z$ نقطة من الدائرة$(\Gamma)$ التي مركزها $B$ ونصف قطرها $\dfrac{1}{2}$

✓ بين أن النقطة $M'$ ذات اللاحقة $Z'$ تنتمي إلى دائرة مركزها $B$ ونصف قطرها $r$ يطلب تعيينه

### التمرين الثاني: (4,5نقطة)

نعتبر في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$النقط $A(1,0,0)$ $B(0,2,0)$ و$C(0,0,3)$

1. عين النقط $A$ ، $B$ و $C$ في المعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.
2. اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$ .
3. أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم$(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $O$ ويعامد المستوي$(ABC)$
4. بين أن المستقيم $(\Delta)$ والمستوي $(ABC)$ يتقاطعان في النقطة $H$ ذات الاحداثيات $\left(\frac{36}{49};\frac{18}{49};\frac{12}{49}\right)$
5. حساب المساحة والحجم

أ. احسب المسافة بين النقطة $O$ والمستوي$(ABC)$

ب. احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$ ثم استنتج مساحة المثلث $ABC$

ت. تحقق أن مربع مساحة المثلث$ABC$ يساوي مجموع مربعات مساحات الأوجه الأخرى لرباعي الوجوه

### التمرين الثالث: (4,5نقطة)

#### الجزء الأول:

**مبرهنة بيزو** يكون عددان صحيحان$a$ و $b$ أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا وجد عددان صحيحان $u$ و $v$ حيث :

$$a\,u+bv=1$$

**مبرهنة غوص** $a$ ، $b$ و $c$ ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .إذا كان $a$ يقسم الجداء $bc$ و كان $a$ أوليا مع $b$ ،

فإن $a$ يقسم $c$

- ✓ برهن مبرهنة غوص باستعمال مبرهنة بيزو

**الجزء الثاني:**

الهدف هو تعين المجموعة $(S)$ مجموعة الاعداد الصحيحة النسبية $n$ التي تحقق $\begin{cases} n \equiv 13\ [19] \\ n \equiv\ 6\ \ [12] \end{cases}$

1. البحث عن عنصر من المجموعة $(S)$

نرمز بـ $(u; v)$ إلى ثنائية الأعداد الصحيحة التي تحقق $19u + 12v = 1$

أ. برر وجود الثنائية $(u; v)$

ب. نضع $n_0 = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ بين أن $n_0$ ينتمي الى المجموعة $(S)$

ت. عين حل خاص للمعادلة $19u + 12v = 1$ ثم عين قيمة لـ $n_0$

2. البحث عن عناصر المجموعة $(S)$

ليكن $n$ عدد صحيح نسبي ينتمي الى المجموعة $(S)$

أ. بين أن $\begin{cases} n \equiv n_0\ [19] \\ n \equiv\ n_0\ \ [12] \end{cases}$

ب. بين انه إذا كان $\begin{cases} n \equiv n_0\ [19] \\ n \equiv\ n_0\ \ [12] \end{cases}$ فان $n \equiv n_0\ [12 \times 19]$

ت. استنتج أن عدد صحيح $n$ ينتمي إلى$(S)$ إذا وفقط إذا أمكن كتابته من الشكل $n = 228k + 212$ مع $k$ عدد صحيح نسبي

**التمرين الرابع: ( 6 نقاط)**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{ln(x+3)}{x+3}$

1. أ.بين أن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ ثم ادرس إشارة $f'$

ب. احسب نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$

ج. شكل جدول تغيرات الدالة $f$

2. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة بحدها العام $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)dt$

أ. بين انه إذا كان $n \le x \le n+1$ فان $f(n+1) \le f(x) \le f(n)$

ب. بين دون حساب $u_n$ انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ , $f(n+1) \le u_n \le f(n)$

ت. استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة يطلب تعين نهايتها

3. نضع من اجل كل عدد طبيعي $n$ , $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)dx$

أ. احسب $I_n$

4. نضع من اجل كل عدد طبيعي $n$ , $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$

أ. احسب $S_n$ . هل المتتالية $(S_n)$ متقاربة ؟