الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — ثانـــــــوية : خلفي بلحوت – عزيز -

امتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي — السنة الدراسية : 2019/2018

الشعبة : رياضي و تقني رياضي — دورة مــــــاي:2019

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة:04ساو 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول:(04 نقــاط)

نعتبر صندوقين متماثلين U_1 و U_2 بحيث كل الكرات لانفرق بينهما عند اللمس و:

U_1 يحتوي على خمس كرات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 0 وثلاث كرات خضراء تحمل الأرقام1 ، 1 ، 0 .

U_2 يحتوي على ثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 وكرتين خضراء تحمل الرقمين 1 ، 0 .

I) نختار عشوائيا أحد الصندوقين ، فإذا كان U_1 أحد نسحب منه كرتين على التوالي بدون إرجاع ، وإذا كان U_2 نسحب منه كرتين على التوالي بالإرجاع .

1. احسب احتمال الحوادث التالية :

A:"سحب كرتين من نفس اللون "

B: "سحب كرتين تحملان نفس الرقم "

C:"سحب كرة حمراء على الأقل "

2. هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟ علل .

3. إذا علمت أن الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفين . فماهو احتمال أن تكون من الصندوق U_1 ؟

II) نأخذ كل الكرات الموجودة في U_1 و U_2 ونضعها في صندوق آخر U_3. نسحب عشوائيا من الصندوق U_3 كرتين في آن واحد .وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع الأرقام التي تحملها الكريتين المسحوبتين .

1. عين قيم المتغير العشوائي X .

2. عين قانون الاحتمال لـ X ثم احسب أمله الرياضياتي .

التمرين الثاني: (04 نقـــاط)

A_0 و B_0 نقطتان من المستوي حيث: $A_0B_0=8$ (الوحدة هي السنتيمتر) ، ليـكن S التشابـه المباشر الذي مركزه النقطة A_0 ونسبتـــه $\frac{1}{2}$ وزاويتـــه $\frac{3\pi}{4}$.

نعرف متتــالية النقـــط (B_n) كمـــا يلي : $B_{n+1}=S(B_n)$ ، من أجل كل عدد طبيعي n .

1) أنشئ النقط B_1 ، B_2 ، B_3 و B_4.

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n المثلثان: $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان.

3) نعرف متتالية (u_n) بـ : $u_n=B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n.

أ/ أثبت أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب/ أكتب عبـارة u_n بـدلالة n.

ج/ نضع المجموع: $\delta_n=u_0+u_1+u_2+....+u_n$ ،أحسب δ_n بدلالة n ثم أوجد $\lim_{n\to+\infty}\delta_n$

4) أ/ حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $3x-4y=2$

ب/ ليكن (Δ) المستقيم العمودي على المستقيم (A_0B_0) في النقطة A_0.

جـد قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها تكون النقطة B_n تنتمي إلى المستقيم (Δ).

التمرين الثالث:(05 نقـــاط)

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $\bar{z}^3-3\bar{z}^2+3\bar{z}+7=0$ ... (E)

حيث: $\bar{z}$ هو مرافق العدد المركب z.

أ /بين أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $(\bar{z}+1)(\bar{z}^2-4\bar{z}+7)=0$.

ب / حـل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C و D لواحقها على الترتيب : $z_A=-1$ ، $z_B=2+i\sqrt{3}$ ، $z_C=\overline{z_B}$ ، $z_D=3$.

أ / عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B-z_A)^n$ عددا حقيقيا ســـالبا .

ب / عين طبيعة المثلث ABC .

3) أ/أكتب العدد $\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}$ على الشكل الأسي،ثم استنتج أن النقطة A صورة D بتحويل نقطي يطلب تعيينه.

ب/ أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD .

4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي لاحقتها z تحقق: $z+1=2\sqrt{3}.k.e^{i\frac{\pi}{6}}$ حيث k يمسح المجال $[0;+\infty[$

- عين قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$ ، ثم استنتج مجموعة النقط (Γ) .

5) أ/ عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث يكون : $-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}+\alpha\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

ب/ عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|-\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BM}-3\overrightarrow{DM}\right\|\leq 2\left\|\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}\right\|$

جـ/ استنتج مجموعة نقط تقاطع (E) و (Γ).

<u>التمرين الرابع:</u>(07نقـــاط)

1) g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ: $g(x)=x^2e^x$

أ/ أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

ب/ استنتج أنه : إذا كان $0\prec x\prec 1$ فإن $g(x)\prec g\left(\frac{1}{x}\right)$ و إذا كان $x\succ 1$ فإن $g(x)\succ g\left(\frac{1}{x}\right)$

2) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=(x^2-2x+2)e^x+e^{\frac{1}{x}}-3e$$

(C_f) تمثيـلها البيـاني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

h دالـة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=e^{\frac{1}{x}}-3e$. (C_h) تمثيلها البياني (<u>**أنظر الملحق**</u>)

أ/ أحسـب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

ب/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، ثم احسب $f'(1)$.

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

3) أ/ بين أن المعادلة: $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل حلين α و β حيــث: $1.5\prec\beta\prec 1.6$ و $0.5\prec\alpha\prec 0.6$ ،ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين .

ب / أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h).

ج / بين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها **1** يطلب كتابة معادلته .

4) أ / أرسم (T) و (C_f). **(الملحــق يعــاد مع ورقة الإجابـــة)**

ب / m عدد حقيقي موجب تماما، أوجد قيمة m حتى تقبل المعادلة (E) حلين متمايزين:

$$(E)\ldots f(x)=(m^2-2m+2)e^m+h(m)$$

5) أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $\int_1^x[f(t)-h(t)]dt=(x^2-4x+6)e^x-3e$

ب/ ليكن العدد λ من المجـال $]0;1[$ ، $A(\lambda)$ مسـاحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_h) و (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=\lambda$ و $x=1$

- استنتـــج $A(\lambda)$ (مقدرة بوحدة المساحة)، ثم احســب $\lim\limits_{\lambda\to 0}A(\lambda)$.

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقـــاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$، نعتبر النقط $A(3;1;0)$ ، $B(1;2;0)$ ، $C(3;2;1)$

و $D(0;0;m)$ حيث m عدد حقيقي موجب، (Q) مستوي معرف بـ: $\begin{cases} x = 2-2\alpha+\beta \\ y = \frac{3}{2}-4\alpha+2\beta \; ;(\alpha,\beta)\in \mathbb{R}^2 \\ z = -5\alpha \end{cases}$

1) أ/ أحسب الجداء السلمي $\overline{BA}.\overline{BC}$ ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $Cos ABC$ و $Sin ABC$.

ب/ أحسب مساحة المثلث ABC .

ج/ بين أن $\vec{n}(1;2;-2)$ شعاع نـاظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكـارتية له .

د/ بين أن $ABCD$ رباعي وجوه و أن حجمـه : $V = \frac{2m+5}{6}\, uv$

2) أ/ بين أن: (Q) هو المستوي المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ معادلته الديكارتية: $-2x+y=\frac{-5}{2}$.

ب/ استنتج أن المستويين (ABC) و (Q) متعامدان وأنهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيلها الوسيـــطي.

ج/ أحسب $d(D;(Q))$ ثم استنتج بدلالة m المسافة بين النقطة D و المستقيم (Δ) .

3) لتكن (S_m) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $x^2+y^2+z^2-2mz+m^2-9=0$

أ/ بين أنه من اجل عدد حقيقي m فان (S_m) سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

ب/عين قيمة m حتى يكون المستوي (ABC) مماسا لسطح الكرة (S_m).

4) أكتب معادلة المستوي (P) الموازي تماما للمستوي (ABC) و يمس سطح الكرة (S_m).

التمرين الثاني: (04 نقـــاط)

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $11x-5y=2$

أ/ أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $y\equiv 4[11]$.

ب/ استنتج حلول المعادلة (E).

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم ، نضـــع : $a=5n+2$ و $b=11n+4$.

أ/ عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

ب/عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون: $PGCD(a;b)=2$.

ج/ استنتج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما.

3) من أجل كل عدد طبيعي n، نضع : $A=5n^2+7n+2$ و $B=11n^2+15n+4$.

أ/ بين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B .

ب/استنتج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

التمرين الثالث: (05 نقــاط)

1)عين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث : $\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1 + i\sqrt{3} \\ (\sqrt{3}+2i)z_1 - z_2 = (1-\sqrt{3})i \end{cases}$

2)في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ ،نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين: $z_A = 1-i$ و $z_B = 2+\sqrt{3}+i$.

أ/اكتب z_A على الشكل الأسي .

ب/بين أن: $\frac{z_B}{z_A} = (1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم استنتج الشكل الأسي للعدد z_B .

ج/هل تـوجد قيم للعددالطبيعي n حتى تكون صورة العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ تنتمي إلى المنصف الأول؟

3)أ/ أوجد لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{-\pi}{6}$.

ب/احسب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BB']$. (مقـدرة بوحدة المساحة)

ج/ عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $\arg\left[(z-z_B)^2\right] = \arg(z_B) - \arg(z_{B'})$

د/عين z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $AB'BC$ مستطيل، ثم اوجد z_I لاحقة مركز ثقله.

4)نضـــع: $f = ros$ (يرمز o إلى تركيب التحويلين S و r) .

أ/عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S حيث يكون f تشابه مباشر مركزه O ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$

ب/ أوجد مساحة صورة الدائرة (γ) بالتشابه المباشر S (مقدرة بوحدة المساحة).

5) أ/ إذا كان $S(M) = M'$ ، ما طبيعة المثلث OMM' ؟

ب/عين مجموعة النقط M من المستوي التي يكون من أجلها : $\overline{AM}\cdot\overline{AM'} = 0$

التمرين الرابع: (07نقــاط)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - e + \ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x + e + \ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$

ب / احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

ج/ أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D') معادلتاهما:

$y = x - e$ و $y = -x + \ln 2 + e$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ على الترتيب.

ب/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيمين المقاربين (D) و (D').

ج/ بين أن المستقيم (Δ)ذو المعادلة $x=\frac{1}{2}\ln 2+e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f).

3) أرسم (Δ)، (D)، (D') و (C_f)

4) ليكن (D_m) المستقيم الذي معادلته : $y=mx-m\left(e+\frac{\ln 2}{2}\right)+\frac{\ln 2}{2}$ حيث m وسيط حقيقي.

أ/ بين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln 2}{2}+e\,;\,\frac{\ln 2}{2}\right)$.

ب/ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f) .

5) نضع: $I=\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}\left[f(x)-(x-e)\right]dx$ ، $I_n=\int_0^1 \ln\left(1+X^n\right)dX$ ، n عدد طبيعي غير معدوم

أ/ فسر هندسيا العدد I واحسب العدد I_1

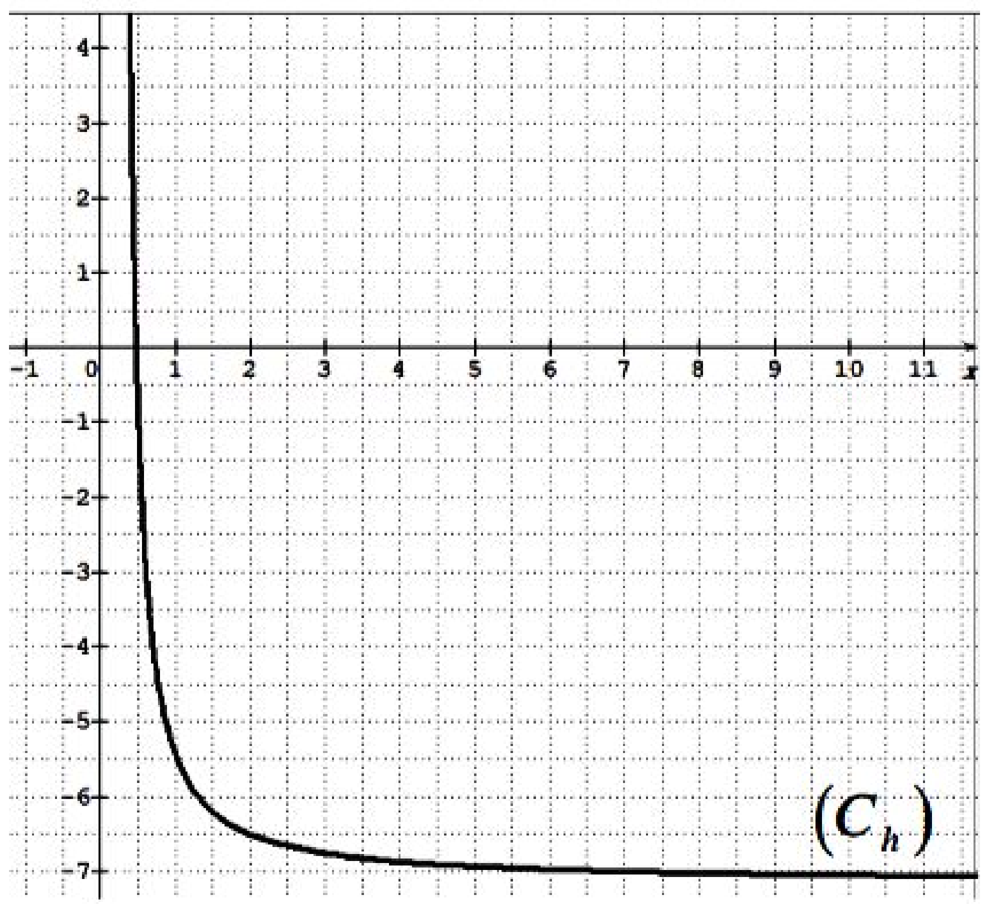
ب/ بين أن: $0\le I_n\le \ln 2$

ج/ عين اتجـاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

6) باستعمال : $\ln(1+X)\le X$ ،من أجل كل $X\in]0;+\infty[$

أ/ استنتج أن : $0\le I+I_1\le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}\,dx-1+\ln 4$

ب/ اعط حصرا للعدد $I+I_1$.



<u>الملحق:</u>

الاسم :............

اللقب :............

القسم :...........

حل التمرين 01

الصندوقان U_1 و U_2 متماثلان معناه $P(U_1)=P(U_2)=\frac{1}{2}$ و $P(U_1)+P(U_2)=1$

$\frac{1}{2} \rightarrow U_1$

$\frac{1}{2} \rightarrow U_2$

I) عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين على التوالي من الصندوق U_1 بدون إرجاع (ترتيبة)

$$A_n^p = A_8^2 = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8!}{6!} = \frac{8\times7\times6!}{6!} = 56$$

عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين على التوالي من الصندوق U_2 بالإرجاع (قائمة)

$$A^p = 5^2 = 25$$

1) A : "سحب كرتين من نفس اللون" معناه

$$P(A)=\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{A_5^2+A_3^2}{56}}_{U_1\text{ الصندوق}}+\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{3^2+2^2}{25}}_{U_2\text{ الصندوق}}$$

$$P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{20+6}{56}+\frac{1}{2}\times\frac{9+4}{25}=\frac{689}{1400}$$

B : "سحب كرتين تحملان نفس الرقم"

$$P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{A_2^2+A_5^2}{56}+\frac{1}{2}\times\frac{1^2+3^2+1^2}{25}=\frac{583}{1400}$$

C : سحب كرة حمراء على الأقل

$$P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{A_5^1\times A_3^1+A_3^1\times A_5^1+A_5^2}{56}$$

$$+\frac{1}{2}\times\frac{2\times3+3\times2+3^2}{25}=\frac{1213}{1400}$$

2) $A\cap B$ « سحب كرتين من نفس اللون وتحملان نفس الرقم »

$$P(A\cap B)=\frac{1}{2}\times\frac{A_3^2+A_2^2}{56}+\frac{1}{2}\times\frac{2^2+1^2+1^2+1^2}{25}$$

$$=\frac{37}{175}\simeq 0{,}211$$

$$P(A)\times P(B)=\frac{689}{1400}\times\frac{583}{1400}\simeq 0{,}205$$

ومنه $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$

الحادثتان A و B غير مستقلتين

3) $$P_{\bar{A}}(U_1)=\frac{P(U_1\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}$$

$$P(U_1\cap\bar{A})=\frac{1}{2}\times\frac{A_5^1\times A_3^1+A_3^1\times A_5^1}{56}$$

$$=\frac{15}{56}$$

$$P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{689}{1400}=\frac{711}{1400}$$

$$P(U_1\cap\bar{A})=\frac{1}{2}\times\frac{A_5^1\times A_3^1+A_3^1\times A_5^1}{56}=\frac{15}{56}$$

ومنه $P_{\bar{A}}(U_1)=\frac{125}{137}$

II) عدد الحالات الممكنة لهذا السحب

$$C_n^p=C_{13}^2=78$$

1) $X=\{0;1;2;3;4\}$

2)

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{78}$	$\frac{24}{78}$	$\frac{34}{78}$	$\frac{16}{78}$	$\frac{1}{78}$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{5} x_i p_i$$

$$=0+\frac{24}{78}+\frac{68}{78}+\frac{48}{78}+\frac{4}{78}$$

$$=\frac{144}{78}$$

$P(X=0)$: احتمال سحب كرتين من U_3 مجموع رقميهما 0

$$P(X=0)=\frac{C_3^2}{78}=\frac{3}{78}$$

$P(X=1)$: احتمال سحب كرتين من U_3 مجموع رقميهما 1

$$P(X=1)=\frac{C_3^1\times C_8^1}{78}=\frac{24}{78}$$

$P(X=2)$: احتمال سحب كرتين من U_3 مجموع رقميهما 2

$$P(X=2)=\frac{C_3^1\times C_2^1+C_8^2}{78}=\frac{34}{78}$$

$P(X=3)$: احتمال سحب كرتين من U_3 مجموع رقميهما 3

$$P(X=3)=\frac{C_8^1\times C_2^1}{78}=\frac{16}{78}$$

$P(X=4)$: احتمال سحب كرتين من U_3 مجموع رقميهما 4

$$P(X=4)=\frac{C_2^2}{78}=\frac{1}{78}$$

التمرين الثاني: (04 نقاط) $A_0B_0=8$ ، S التشابه المباشر مركزه A_0 ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ ، $B_{n+1}=S(B_n)$:

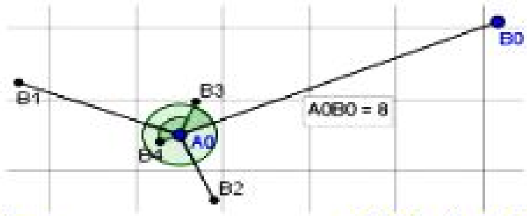
1) انشاء النقط B_1 ، B_2 ، B_3 و B_4:

$B_1=S(B_0)$ يكافئ: $\begin{cases} A_0B_1=\frac{1}{2}A_0B_0=4 \\ (\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_1})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$

$B_2=S(B_1)$ معناه $\begin{cases} A_0B_2=\frac{1}{2}A_0B_1=2 \\ (\overrightarrow{A_0B_1},\overrightarrow{A_0B_2})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$

$B_3=S(B_2)$ معناه $\begin{cases} A_0B_3=\frac{1}{2}A_0B_2=1 \\ (\overrightarrow{A_0B_2},\overrightarrow{A_0B_3})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$

$B_4=S(B_3)$ معناه $\begin{cases} A_0B_4=\frac{1}{2}A_0B_3=\frac{1}{2} \\ (\overrightarrow{A_0B_3},\overrightarrow{A_0B_4})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$



2) اثبات أن المثلثين $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ **متشابهان من أجل كل عدد طبيعي** n **:**

$B_{n+1}=S(B_n)$ معناه $A_0B_{n+1}=\frac{1}{2}A_0B_n$

و $(\overrightarrow{A_0B_n},\overrightarrow{A_0B_{n+1}})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$ ، بما أن:

$\frac{A_0B_{n+1}}{A_0B_n}=\frac{\frac{1}{2}A_0B_n}{A_0B_n}=\frac{1}{2}$ و $\frac{A_0B_{n+2}}{A_0B_{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}A_0B_{n+1}}{A_0B_{n+1}}=\frac{1}{2}$ و

$(\overrightarrow{A_0B_{n+1}},\overrightarrow{A_0B_{n+2}})=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0B_n},\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0B_{n+1}}\right)=(\overrightarrow{A_0B_n},\overrightarrow{A_0B_{n+1}})$

فإن المثلثين $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان (ضلعان و زاوية محصورة بينهما)ومنه: $\frac{B_{n+1}B_{n+2}}{B_nB_{n+1}}=\frac{1}{2}$

3) أ*/اثبات أن (u_n) **متتالية هندسية أساسها** $\frac{1}{2}$: نعرف متتالية (u_n) بـ $u_n=B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n.

$\frac{1}{2}=\frac{B_{n+1}B_{n+2}}{B_nB_{n+1}}=\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ومنـه: (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حـدها الأول $u_0=B_0B_1$

ب*/ كتابة عبارة u_n **بدلالة** n:

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=u_0\left(\frac{1}{2}\right)^n=B_0B_1\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ج*/ نضع المجموع: $\delta_n=u_0+u_1+u_2+....+u_n$ ،

حساب δ_n **بدلالة** n **ثم إيجاد** $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta_n$: δ_n م.ج.م.هندسية

$$\delta_n=u_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)=2B_0B_1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta_n=2B_0B_1$

4) أ*/ نحل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ **المعادلة :** $3x-4y=2 ...(1)$

(1) يكافئ $3x=4y+2$ يكافئ $3x\equiv2[4]$

يكافئ $7\times3x\equiv7\times2[4]$ يكافئ $x\equiv2[4]$

ومنه: $x=4\lambda+2$ ، $\lambda\in\mathbb{Z}$ بالتعويض في المعادلة (1) نجد

$y=3\lambda+1$ إذن: $S=\{(4\lambda+2;3\lambda+1);\lambda\in\mathbb{Z}\}$

ب*/ تعيين قيم العدد الطبيعي n **التي من اجلها تكون النقطة** B_n **تنتمي إلى المستقيم** (Δ):

لدينا: (Δ) العمودي على (A_0B_0) في النقطة A_0 وكذلك

$$(\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_n})=(\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_1})+(\overrightarrow{A_0B_1},\overrightarrow{A_0B_2})+...$$

$$....+(\overrightarrow{A_0B_{n-1}},\overrightarrow{A_0B_n})=\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}+...+\frac{3\pi}{4}=n\frac{3\pi}{4}$$

B_n تنتمي إلى (Δ) معناه $(\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_n})=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$

نجد: $n\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ يكافئ $3n=4\left(\frac{1}{2}+k\right)$

يكافئ $3n=2+4k$ يكافئ $3n-4k=2$

ومنه قيم n هي $n=4k'+2$ ، $k'\in\mathbb{N}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) أ*/نبين أن المعادلة (E) تكافئ: $(\bar{z}+1)(\bar{z}^2-4\bar{z}+7)=0$

لدينا : $\bar{z}^3-3\bar{z}^2+3\bar{z}+7=0 ...(E)$

$(\bar{z}+1)(\bar{z}^2-4\bar{z}+7)=0$ يكافئ $\bar{z}^3-4\bar{z}^2+7\bar{z}+\bar{z}^2-4\bar{z}+7=0$

يكافئ $\bar{z}^3-3\bar{z}^2+3\bar{z}+7=0$

ب* / نحل في $\mathbb{C}$ **المعادلة** (E) **:**

(E) تكافئ: $(\bar{z}+1)(\bar{z}^2-4\bar{z}+7)=0$

يكافئ $(z+1)(z^2-4z+7)=0$ يكافئ، $\overline{(z+1)(z^2-4z+7)}=0$

يكافئ $\begin{cases} z=-1 \\ z^2-4z+7=0 \end{cases}$ ، $\Delta=-12=(2\sqrt{3}i)^2$

$z_1=2-\sqrt{3}i$ و $z_2=2+\sqrt{3}i$

ومنه : $S=\left\{-1;2-\sqrt{3}i\ ;2+\sqrt{3}i\ \right\}$

2) أ*/تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب $(z_B-z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا: لدينا

$$(z_B-z_A)^n=(2+\sqrt{3}i+1)^n=(3+\sqrt{3}i)^n$$

ومنه $(z_B-z_A)^n=(2\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$

$(z_B-z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا معناه:

$\arg(z_B-z_A)^n=\pi+2k\pi$ ومنه $\frac{n\pi}{6}=\pi+2k\pi$

إذن $n=12k+6\ ;k\in\mathbb{N}$

ب*/تعيين طبيعة المثلث ABC

$$AC=|z_C-z_A|=|3-i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$$

$$AB=|z_B-z_A|=|3+i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$$

$$BC=|z_C-z_B|=|-2i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$$

بما ان : $AB=AC=BC$ فإن المثلث ABC متقايس الأضلاع

3) أ*/ كتابة العدد $\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}$ على الشكل الأسي:

$$\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}=\frac{-1-2+i\sqrt{3}}{3-2+i\sqrt{3}}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

***/استنتاج طبيعة التحويل الذي يحول A إلى D وعناصره المميزة:** $\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه $z_A-z_C=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_D-z_C)$

معناه النقطة A صورة النقطة D بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة C و نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ب/تعيين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD

لدينا: $\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه $\begin{cases}\left|\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}\right|=\sqrt{3}\\(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA})=\frac{\pi}{2}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

اذن المثلث ACD قائم في C ومنه مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ACD هو النقطة I منتصف الوتر $[AD]$

لاحقتها $z_I=\frac{z_A+z_D}{2}=\frac{3}{2}-i\frac{1}{2}$

4 */ تعيين قيس للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$:

لدينا : $(\vec{u};\overrightarrow{AB})=\arg(z_B-z_A)=\frac{\pi}{6}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}$

***/استنتاج (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث :**

$z-z_A=k(z_B-z_A)$ معناه $z+1=2\sqrt{3}ke^{i\frac{\pi}{6}}$

معناه $\overrightarrow{AM}=k\cdot\overrightarrow{AB}$

ومنه :من أجل k يمسح المجال $]0;+\infty[$ المجموعة (Γ) هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة A وشعاع توجيهه $\overrightarrow{AB}$

لاحقته : $2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}=3+i\sqrt{3}$

5) أ*/تعيين قيمة العدد α حيث $-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}+\alpha\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

$$-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}+\alpha\overrightarrow{CD}=\vec{0}$$

معناه النقطة C هي مرجح الجملة $\{(A;-1),(B;2),(D;\alpha)\}$

$\begin{cases}x_C=\frac{-x_A+2x_B+\alpha x_D}{-1+2+\alpha}\\y_C=\frac{-y_A+2y_B+\alpha y_D}{-1+2+\alpha}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}2=\frac{1+4+3\alpha}{1+\alpha}\\-\sqrt{3}=\frac{0+2\sqrt{3}+0\cdot\alpha}{1+\alpha}\end{cases}$ ومنه $\alpha=-3$

ب*/ تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوى حيث :

$$(*)...\left\|-\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BM}-3\overrightarrow{DM}\right\|\le2\left\|\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}\right\|$$

(*)تكافئ $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MD}\right\|\le2\left\|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC}\right\|$

(*)تكافئ $\left\|-\left(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MD}\right)\right\|\le2\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$

(*)تكافئ $\left\|(-1+2-3)\overrightarrow{CM}\right\|\le2BC$ تكافئ $CM\le BC$

ومنه مجموعة النقط (E) هي قرص مركزه النقطة C ونصف قطره هو : $BC=2\sqrt{3}$

جـ*/ استنتاج مجموعة نقط تقاطع القرص (E) و نصف المستقيم $[AB)$: لدينا القرص (E) مركزه C ونصف قطره $BC=2\sqrt{3}$ و $AC=2\sqrt{3}$ معناه A تنتمي إلى القرص (E)

ومنه تقاطع القرص (E) ونصف المستقيم $[AB)$ هو القطعة المستقيمة $[AB]$

التمرين الرابع: (07 نقـاط)

1) g معرفة على $]0;+\infty[$ بـــ : $g(x)=x^2e^x$

أ*/ دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$: $g'(x)=(x^2+2x)e^x$

بما ان $g'(x)\succ0$ فإن الدالة g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

ب*/ استنتاج أنه : إذا كان $0\prec x\prec1$ فإن $g(x)\prec g\left(\frac{1}{x}\right)$

و إذا كان $x\succ1$ فإن $g(x)\succ g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان $0\prec x\prec1$ فــإن $x\prec\frac{1}{x}$ و لدينا g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ، فــإن $g(x)\prec g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان $x\succ1$ فــإن $x\succ\frac{1}{x}$ ولدينا g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$، فــإن $g(x)\succ g\left(\frac{1}{x}\right)$

2) f معرفة على $]0;+\infty[$: $f(x)=(x^2-2x+2)e^x+e^{\frac{1}{x}}-3e$

أ*/ حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to 0^+} f(x)$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

ب*/ نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$f'(x)=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، **ثم حساب** $f'(1)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ دالتها المشتقة f' :

$$f'(x)=x^2e^x-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)$$

ومنه: $f'(1)=g(1)-g\left(\frac{1}{1}\right)=0$

ج*/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$:

إشـــارة $f'(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

f متزايدة تماما على $]1;+\infty[$

f متناقصة تماما على $]0;1[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-e=-2.71$	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ*/نبين أن المعادلة: $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل **حلين α و β حيث:** $1.5<\beta<1.6$ و $0.5<\alpha<0.6$

$(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تكافئ $(x^2-2x+2)e^x+h(x)=0$ تكافئ $f(x)=0$ ، لدينا: $f(0.5)\approx 1.25$ ، $f(0.6)\approx -0.74$

بما ان الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $[0.5;0.6]$

$f(0.5)\times f(0.6)<0$ فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن المعادلة $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل حل وحيد α

حيث: $0.5<\alpha<0.6$ ، $f(\alpha)=0$

لدينا: $f(1.5)\approx -0.60$ ، $f(1.6)\approx 0.44$

بما ان الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $[1.5;1.6]$

$f(1.5)\times f(1.6)<0$ فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن المعادلة $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل حل وحيد β

حيث: $1.5<\beta<1.6$ ، $f(\beta)=0$

***/استنتاج أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين:**

بما ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β فإن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β

ب*/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-h(x)=(x^2-2x+2)e^x$

$x^2-2x+2>0$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ لأن $\Delta=-4$

ومنه : (C_f) يقع فوق (C_h) على المجال $]0;+\infty[$

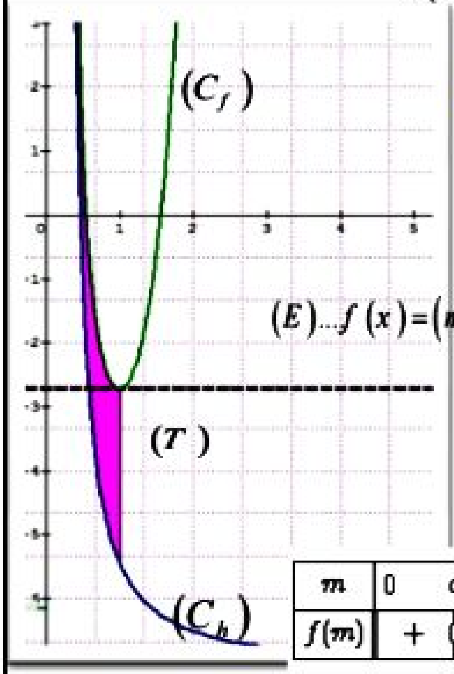
ج*/ نبين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته :

بما ان الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ فإن تمثيلها (C_f) يقبل عند كل نقطة فاصلتها من $]0;+\infty[$ مماسا

$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ، $f'(1)=0 ; f(1)=-e$

ومنه: $(T): y=-e$

4) أ*/ رسم (T) و (C_f):



ب*/إيجاد قيم m حتى تقبل المعادلة (E) حلين متمايزين:

لدينا m وسيط حقيقي حيث $m>0$

$(E)...f(x)=(m^2-2m+2)e^m+h(m)$

المعادلة (E) تكافئ:

$f(x)=f(m)$

إشارة $f(m)$:

m	0		α		1		β		$+\infty$
$f(m)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

من أجـــل $m=1$ المعادلة (E) تقبل حلا مضاعفا .

ومنـــه: المعادلة (E) تقبل حلين متمايزين لما $m\in]0;1[\cup]1;+\infty[$

5) أ*/ نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$$\int_1^x[f(t)-h(t)]dt=(x^2-4x+6)e^x-3e$$

لدينا: $\int_1^x[f(t)-h(t)]dt=\int_1^x(t^2-2t+2)e^t\,dt$

الدالة: $t\to(t^2-2t+2)e^t$ مستمرة على $]0;+\infty[$ فهي تقبل دوالا أصلية على $]0;+\infty[$

$$\left[(t^2-4t+6)e^t-3e\right]'=(t^2-2t+2)e^t$$

$$\int_1^x(t^2-2t+2)e^t\,dt=\int_1^x\left[(t^2-4t+6)e^t-3e\right]'dt=(x^2-4x+6)e^x-3e$$

ب*/ استنتاج $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_h) و (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=\lambda$ و $x=1$ (مقدرة بوحدة المساحة) حيث $\lambda\in]0;1]$:

$$A(\lambda)=\int_1^{\lambda}[f(t)-h(t)]dt=-\int_{\lambda}^{1}[f(t)-h(t)]dt$$

$$A(\lambda)=-\left[(\lambda^2-4\lambda+6)e^{\lambda}-3e\right]$$

$$=\left(3e-(\lambda^2-4\lambda+6)e^{\lambda}\right)ua$$

*/ حساب $\lim\limits_{\lambda\to 0} A(\lambda)$:

$$\lim_{\lambda\to 0}A(\lambda)=\lim_{\lambda\to 0}\left[3e-(\lambda^2-4\lambda+6)e^{\lambda}\right]=3e$$

الموضوع الثاني

التمرين الاول : (04 نقاط)

$A(3;1;0)$ ، $B(1;2;0)$ ، $C(3;2;1)$ و $D(0;0;m)$

1) أ*/ حساب $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{BA}(2;-1;0)$ ، $\overrightarrow{BC}(2;0;1)$

لدينا : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2(2)+0(-1)+1(0)=4$

*/ استنتاج القيمتين المضبوطتين لـ $Cos\,ABC$ و $Sin\,ABC$: لدينا $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\|\overrightarrow{BA}\|\cdot\|\overrightarrow{BC}\|Cos\,ABC$

ومنه: $Cos\,ABC=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\cdot\|\overrightarrow{BC}\|}=\frac{4}{\sqrt5\sqrt5}=\frac45$

لدينا: $\sin ABC^2=1-Cos\,ABC^2$

ومنه $\sin ABC=\frac35$ أو $\sin ABC=-\frac35$

ب*/ حساب مساحة المثلث ABC ولتكن S_{ABC}:

$S_{ABC}=\frac12 BA\times BC\times\sin ABC=\frac12\sqrt5\times\sqrt5\times\frac35=\frac32 ua$

ج*/ نبين أن $\vec n(1;2;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) :

بما أن $\vec n\cdot\overrightarrow{BC}=1(2)+2(0)-2(1)=0$ وكذلك

$\vec n\cdot\overrightarrow{BA}=1(2)+2(-1)-2(0)=0$

فإن $\vec n(1;2;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

*/ استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC):

لدينا $(ABC): x+2y-2z+d=0$

$A\in(ABC)$ تكافئ $3+2+d=0$ تكافئ $d=-5$

ومنه: $(ABC): x+2y-2z-5=0$

د*/ تبيان أن $ABCD$ رباعي وجوه:

نبين أن النقطة D لا تنتمي الى المستوي (ABC)

لدينا $0+2(0)-2m-5=0$ أي $m=-\frac52$ إذن: $D\notin(ABC)$

لأن m عدد حقيقي موجب ومنه: $ABCD$ رباعي وجوه

*/ نبين أن حجم رباعي الوجوه $ABCD$ هو $V=\frac{2m+5}{6}uv$

لدينا $V_{ABCD}=\frac13 S_{ABC}\times h$ ، $h=d(D,(ABC))$ هو الارتفاع

$$d(D;(ABC))=\frac{|-2m-5|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{2m+5}{3}$$

ومنه $V=\frac13\times\frac32\times\frac{2m+5}{3}=\frac{2m+5}{6}uv$

2) أ*/ نبين أن (Q) هو المستوي المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ معادلته الديكارتية $-2x+y=\frac{-5}{2}$:هناك عدة طرق منها

*/ إحداثيات $I(2;\frac32;0)$ منتصف $[AB]$ تحقق التمثيل الوسيطي لـ (Q) والشعاع $\overrightarrow{AB}(2,-1,0)$ عمودي على شعاعي توجيهه $\vec{u'}(1;2;0)$ و $\vec u(-2;-4;-5)$ ومنه (Q) مستوي محوري لـ $[AB]$

*/ تعيين معادلة (Q): لدينا

$$(Q):\begin{cases}x=2-2\alpha+\beta....(1)\\ y=\frac32-4\alpha+2\beta....(2)\\ z=-5\alpha.....(3)\end{cases};(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

من (1) نجد: $z=-5\alpha$

يكافئ: $\alpha=\frac{z}{-5}$ بالتعويض في (1) نجد: $x=2-2\left(\frac{z}{-5}\right)+\beta$

ومنه: $\beta=x-2-\frac{2z}{5}$ نعوض قيمة β و α في (2) نجد:

$y=\frac32-4\left(\frac{z}{-5}\right)+2\left(x-2-\frac{2z}{5}\right)$ ومنه : $-2x+y=\frac{-5}{2}$

ومنه معادلة (Q) هي: $-4x+2y+5=0$

*/ بطريقة أخرى: (Q) يشمل $I\left(2;\frac32;0\right)$ منتصف $[AB]$

و $\overrightarrow{AB}(-2;1;0)$ شعاع ناظمي له والتمثيل الوسيطي يحقق

ومنه المستوي المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ $(Q): -2x+y=\frac{-5}{2}$

ب*/ استنتاج ان المستويين (ABC) و (Q) متعامدان وهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيله الوسيطي:

بما أن $\vec n\cdot\overrightarrow{AB}=1.(-2)+2.(1)+0.(-2)=0$ فإن (Q) و (ABC) متعامدان فهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

*/ تعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ):

$$\begin{cases}x+2y-2z-5=0....(1)\\ -4x+2y+5=0.......(2)\end{cases}$$

بطرح (2) من (1) نجد:

$5x-2z-10=0$ نضع $z=t$ (t وسيط حقيقي) نجد

$x=\frac{2}{5}t+2$ و $y=\frac{4}{5}t+\frac{3}{2}$ إذن: $(\Delta):\begin{cases}x=\frac{2}{5}t+2\\ y=\frac{4}{5}t+\frac{3}{2};t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$

ج*/ حساب $d(D;(Q))$ ثم استنتاج بدلالة m المسافة بين D و (Δ):

$d(D;(Q))=\frac{|-4(0)+2(0)+5|}{\sqrt{16+4}}=\frac{5}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

بما أن (Q) و (ABC) متعامدان فإن حسب مبرهنة فيثاغورس

$d(D;(\Delta))^2=d(D;(Q))^2+d(D;(ABC))^2$

ومنه: $d(D;(\Delta))=\sqrt{\frac{5}{4}+\left(\frac{2m+5}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{16m^2+80m+145}}{6}$

3)أ*/تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي m ، (S_m) سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها:

لدينا: $x^2+y^2+z^2-2mz+m^2-9=0$

ومنه: $x^2+y^2+(z-m)^2=9$ إذن: (S_m) سطح كرة مركزها النقطة $D(0;0;m)$ و نصف قطرها $r=3$.

ب*/تعيين m حتى يكون المستوي (ABC) مماسا لسطح الكرة (S_m):

(ABC) مماس لسطح الكرة (S_m) يعني $d(D;(ABC))=3$ أي أن: $\frac{2m+5}{3}=3$ ومنه: $m=2$

4) معادلة المستوي (P) الموازي تماما للمستوي (ABC) ويمس (S_m):

لدينا: $(P): x+2y-2z+d=0$

المستوي (P) مماس لـ (S_m) يعني:

$d(D;(P))=\frac{|-4+d|}{3}=3$ أي $|-4+d|=9$

ومنه: $d=13$ أو $d=-5$ هو المستوي (ABC)

إذن: $(p): x+2y-2z+13=0$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1)أ*/إثبات أن: $y\equiv4[11]$ ، $(E)...11x-5y=2$

$11x-5y=2$ يكافئ $5y=11x+2$ ومنه $5y\equiv-2[11]$ أي $5y\equiv20[11]$ ومنه: $y\equiv4[11]$

ب*/استنتاج حلول المعادلة (E):

$y\equiv4[11]$ معناه $y=11k+4$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ،نعوض قيمة y في المعادلة (E) نجد: $x=5k+2$

ومنه: $S=\{(11k+4;5k+5)/k\in\mathbb{Z}\}$

2)أ*/تعيين القيم الممكنة لـ $d=PGCD(a;b)$:

$a=5n+2$ و $b=11n+4$ ، $n\in\mathbb{N}^*$

$11a-5b=11(5n+2)-5(11n+4)=55n+22-55n-20=2$

ومنه: $d/2$ إذن: $d\in D_2=\{1;2\}$.

ب*/تعيين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون: $PGCD(a;b)=2$

لدينا $PGCD(a;b)=2$ معناه 2 يقسم a و 2 يقسم b معناه 2 يقسم $b-2a$

أي 2 يقسم $11n+4-2(5n+2)$ وبالتالي 2 يقسم n .

ومنه n عدد زوجي يكتب من الشكل: $n=2\alpha\ /\ \alpha\in\mathbb{N}^*$

ج*/ استنتاج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما: من السؤال السابق

من أجل $PGCD(a;b)=2$ قيم n: $n=2\alpha\ /\ \alpha\in\mathbb{N}^*$

ومنه: قيم n حيث $PGCD(a;b)=1$ هي: $n=2\alpha+1/\alpha\in\mathbb{N}$

3) أ*/نبين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

$A=5n^2+7n+2$ و $B=11n^2+15n+4$ ، $n\in\mathbb{N}$

$A=(n+1)(5n+2)=a(n+1)$ ، $B=(n+1)(11n+4)=b(n+1)$

ومنه: $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

ب*/ استنتاج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B:

$PGCD(A;B)=PGCD(a(n+1);b(n+1))=(n+1)PGCD(a;b)$

ومنه نميز حالتين :

الحالة 1: إذا كان $PGCD(a;b)=2$ معناه $n=2\alpha/\alpha\in\mathbb{N}^*$

نجد: $PGCD(A;B)=(2\alpha+1)2=4\alpha+2$

الحالة 2: إذا كان $PGCD(a;b)=1$ معناه $n=2\alpha+1/\alpha\in\mathbb{N}$

نجد: $PGCD(A;B)=(2\alpha+1+1)1=2\alpha+2$

التمرين الثالث (05 نقاط)

1) تعيين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث:

$\begin{cases}2z_1+iz_2=1+i\sqrt{3}...(1)\\(\sqrt{3}+2i)z_1-z_2=(1-\sqrt{3})i..(2)\end{cases}$ نضرب طرفي المعادلة الأولى في $(-i)$ نجد

$\begin{cases}-2iz_1+z_2=-i+\sqrt{3}......(1')\\ \sqrt{3}z_1+2iz_1-z_2=i-i\sqrt{3}...(2)\end{cases}$

بجمع (1') و (2): $\sqrt{3}z_1=\sqrt{3}(1-i)$ ومنه $z_1=1-i$

بالتعويض في (1') نجد: $z_2=2+\sqrt{3}+i$

2)أ*/كتابة z_A على الشكل الأسي: $z_A=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

ب*/نبين أن: $\frac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$:

$\frac{z_B}{z_A}=\frac{2+\sqrt{3}+i}{1-i}=\frac{(2+\sqrt{3}+i)(1+i)}{2}=\frac{(1+\sqrt{3})+\sqrt{3}(1+\sqrt{3})i}{2}$

ومنه: $\frac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})\frac{(1+\sqrt{3}i)}{2}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$

*/استنتاج الشكل الأسي للعدد z_B :

$$z_B = z_A(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ومنه : $z_B=\sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{12}}$

ج*/تعيين قيم للعدد الطبيعي n حتى تكون صورة العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ تنتمي إلى المنصف الأول إن وجدت :

لدينا : $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n = (1+\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$ معناه $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n = \frac{\pi}{4}+k\pi$

أي : $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n = \frac{n\pi}{3}[2\pi]$ ومنه : $\frac{n\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$

أي $4n-12k=3$ ، $PGCD(12;4)=4$ و 4 لا تقسم 3 ومنه المعادلة لا تقبل حلول اذن لايوجد قيم لـ n تحقق المطلوب .

3) أ*/إيجاد لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{-\pi}{6}$

عبارة الدوران r من الشكل : $z'=e^{-i\frac{\pi}{6}}z$

$$z_{B'}=e^{-i\frac{\pi}{6}}z_B = e^{-i\frac{\pi}{6}}\sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{12}}=\sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

$$z_{B'}=\sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{-i\frac{\pi}{12}}=\overline{z_B}=2+\sqrt{3}-i$$

ب*/حساب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BB']$:لدينا

$$R=\frac{BB'}{2}=\frac{|z_{B'}-z_B|}{2}=\frac{|-2i|}{2}=\frac{2}{2}=1 \text{ ، } S=\pi R^2$$

ومنه : $s=\pi\ ua$

ج*/ تعيين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى حيث:

$\arg\left[(z-z_B)^2\right]=\arg(z_B)-\arg(z_{B'})$ أي أن

$2\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}+2k\pi$ ومنه $\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{12}+k\pi$

تفسيرها : $(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\frac{\pi}{12}+k\pi / k\in\mathbb{Z}$

ومنه مجموعة النقط هي المستقيم (OB) ماعدا النقطة B .

د*/تعيين z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $AB'BC$ مستطيل:

$$(\overrightarrow{B'B};\overrightarrow{B'A})=\arg\left(\frac{z_A-z_{B'}}{z_B-z_{B'}}\right)=\arg(z_A-z_{B'})-\arg(z_B-z_{B'})$$

$$(\overrightarrow{B'B};\overrightarrow{B'A})=\arg(1-i-2-\sqrt{3}+i)-\arg(2i)=\pi-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

ومنه نجد : $(\overrightarrow{B'B};\overrightarrow{B'A})=\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}$

يكفي أن نبين : $\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{AC}$ معناه : $\begin{cases}x_C=1\\y_C=1\end{cases}$ ومنه $z_C=1+i$

بطريقة اخرى :لدينا $z_{B'}=\overline{z_B}$ معناه BB' متناظرتان

بالنسبة لمحور الفواصل ولدينا : $B'(2+\sqrt{3};-1)$ و $A(1;-1)$

أي : AB' لهما نفس الترتيب معناه ينتميان إلى المستقيم معادلته $y=-1$ موازي لمحور الفواصل ومنه نجد :

$z_C=\overline{z_A}=1+i$.

*/ إيجاد z_I لاحقة مركز ثقل المستطيل $AB'BC$

$z_I=\frac{z_A+z_B+z_{B'}+z_C}{4}$ ومنه $z_I=\frac{1-i+4+2\sqrt{3}+1+i}{4}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

4) أ*/تعيين العبارة المركبة للتشابه المباشر S حيث يكون f تشابه مباشر مركزه O ونسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{3}$: $f=ros$

S تشابه مباشر مركزه O ونسبته k وزاويته θ أي ros

تشابه مباشر مركزه O ونسبته k وزاويته $\theta-\frac{\pi}{6}$

ومنه : $k=2$ و $\theta-\frac{\pi}{6}\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ أي $\theta\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

ومنه عبارة التشابه S هي : $z'=2e^{i\frac{\pi}{2}}z$ ونكتب $z'=2iz$

ب*/إيجاد مساحة صورة الدائرة (γ) بالتشابه المباشر S :

مساحة صورة الدائرة (γ) هي S' حيث : $s'=k^2s=4\pi\ ua$.

5) أ*/ إذا كان $S(M)=M'$ ،إيجاد طبيعة المثلث OMM':

$z'=2e^{i\frac{\pi}{2}}z$ ومنه : $\frac{z'}{z}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه $\arg\frac{z'}{z}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

معناه $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ و $\left|\frac{z'}{z}\right|=2$ أي $|z'|=2|z|$

معناه $\|\overrightarrow{OM'}\|=2\|\overrightarrow{OM}\|$ ومنه :المثلث OMM' قائم في O

ب*/تعيين مجموعة النقط M من المستوى التي يكون من أجلها : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'}=0$: $\overrightarrow{AM}(z-z_A)$ ، $\overrightarrow{AM}(x-1;y+1)$

و $\overrightarrow{AM'}(z'-z_A)$ أي $\overrightarrow{AM'}(2iz-z_A)$ ومنه $\overrightarrow{AM'}(-2y-1;2x+1)$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'}=0$ معناه $(x-1)(-2y-1)+(y+1)(2x+1)=0$

معناه $x+3y+2=0$

مجموعة النقط المطلوبة هي مستقيم معادلته $x+3y+2=0$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1) أ*/التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$f(x)=-x+e+\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$

$$f(x)=x-e+\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)=x-e+\ln\left(\frac{e^{2(x-e)}+2}{e^{2(x-e)}}\right)$$

$$=x-e+\ln\left(e^{2(x-e)}+2\right)-\ln\left(e^{2(x-e)}\right)=-x+e+\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$$

ب */ حساب النهايات $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

ج*/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{1-2e^{-2(x-e)}}{1+2e^{-2(x-e)}}$

$f'(x)=0$ معناه $1-2e^{-2(x-e)}=0$ معناه $x=e+\ln\sqrt{2}$

x	$-\infty$	$e+\ln\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

الدالة f متزايدة تماما على $[e+\ln\sqrt{2};+\infty[$

الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;e+\ln\sqrt{2}]$

تشكيل جدول تغيراتها :

x	$-\infty$	$\ln2/2+e$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$3\ln2/2+e$	$+\infty$

2) أ*/ نبين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D') معادلتاهما: $y=x-e$ و $y=-x+\ln2+e$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ على الترتيب: بما أن

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-e)]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)=\ln1=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+e+\ln2)]=\lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)-\ln2\right]=0$$

فإن: (D) مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

و (D') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$

ب*/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (D) و (D')

لدينا: $f(x)-(x-e)=\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)$

$1+2e^{-2(x-e)}\succ1$ معناه $\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)\succ\ln1=0$

ومنه: $f(x)-(x-e)\succ0$ إذن (C_f) يقع فوق م.م (D)

لدينا: $f(x)-(-x+e+\ln2)=\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)-\ln2$

$2+e^{2(x-e)}\succ2$ معناه $\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)\succ\ln2$ ومنه:

$f(x)-(-x+e+\ln2)\succ0$ إذن (C_f) يقع فوق م.م (D') من أجل كل عدد حقيقي x

ج*/ نبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=\frac{1}{2}\ln2+e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f):

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\left(2\left(\frac{\ln2}{2}+e\right)-x\right)$ من $\mathbb{R}$، لدينا

$$f\left(2\left(\frac{\ln2}{2}+e\right)-x\right)=f(\ln2+2e-x)$$

$$=-x+e+\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)=f(x)$$

ومنه: $(\Delta):x=\frac{1}{2}\ln2+e$ محور تناظر للمنحنى (C_f)

3) رسم (Δ)، (D)، (D') و (C_f).

4) أ*/ نبين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln2}{2}+e;\frac{\ln2}{2}\right)$: $(D_m):y=mx-m\left(e+\frac{\ln2}{2}\right)+\frac{\ln2}{2}$ حيث m وسيط حقيقي.

$y=mx-m\left(e+\frac{\ln2}{2}\right)+\frac{\ln2}{2}$ معناه

$m\left(x-e-\frac{\ln2}{2}\right)+\frac{\ln2}{2}-y=0$ معناه

$x-e-\frac{\ln2}{2}=0$ و $\frac{\ln2}{2}-y=0$ ومنه: جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln2}{2}+e;\frac{\ln2}{2}\right)$

ب*/ مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f) :

المستقيم (D_m) يدور حول النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln2}{2}+e;\frac{\ln2}{2}\right)$

إذا كان $m=1$ فإن (D_m) هو (D) لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m=-1$ فإن (D_m) هو (D') لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m=0$ فإن (D_m) هو $(D_0):y=\ln\sqrt{2}$ لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m\in]-1;1[$ فإنه لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m\in]-\infty;-1[$ فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة

إذا كان $m\in]1;+\infty[$ فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة

5) أ*/ التفسير الهندسي العدد I: هومساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم المقارب (D) والمستقيمين اللذيم معادلتيهما $x=\ln\sqrt{2}+e$ ، $x=\ln\sqrt{3}+e$

حساب العدد I_1: $I_1=\int_0^1\ln(1+X)dX$ بالمكاملة بالتجزئة

بوضع: $u(X)=\ln(1+X)$ ، $u'(X)=\frac{1}{1+X}$

$v'(X)=1$ ، $v(X)=X$

$$I_1=[X\ln(1+X)]_0^1-\int_0^1\frac{X+1-1}{X+1}dX$$

$$=[X\ln(1+X)]_0^1-\int_0^1 1dX+\int_0^1\frac{1}{X+1}dX$$

$$=[X\ln(1+X)-X+\ln(1+X)]_0^1=\ln4-1$$

ب*/ نبين أن $0\le I_n\le\ln2$: لدينا $I_n=\int_0^1\ln(1+X^n)dX$

$0\le X\le1$ معناه $1\le X^n+1\le2$ معناه $0\le\ln(X^n+1)\le\ln2$

ومنه: $0\le\int_0^1\ln(X^n+1)dX\le\int_0^1\ln2dX$ اذن $0\le I_n\le\ln2$

ج*/ تعيين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتاج أنها متقاربة:

$\begin{cases}0\le X\le1...(1)\\0\le X^n\le1\end{cases}$ بضرب أطراف المتباينة (1) في X^n نجد

$0 \le X^{n+1} \le X^n$ أي $0 \le X^{n+1}+1 \le X^n+1$

أي أن $0 \le \ln\left(X^{n+1}+1\right) \le \ln\left(X^n+1\right)$ ، $n \in \mathbb{N}^*$

نستنتج أن $0 \le \int_0^1 \ln\left(X^{n+1}+1\right)dX \le \int_0^1 \ln\left(X^n+1\right)dX$

$0 \le I_{n+1} \le I_n$ ومنه: المتتالية (I_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

بما ان (I_n) محدودة من الاسفل بالصفر ($0 \le I_n \le \ln 2$)

ومتناقصة تماما فإنها متقاربة نحو الصفر

ج*/ تعيين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتاج أنها متقاربة:

$\begin{cases} 0 \le X \le 1 \ldots (1) \\ 0 \le X^n \le 1 \end{cases}$ بضرب أطراف المتباينة (1) في X^n نجد

$0 \le X^{n+1} \le X^n$ أي $0 \le X^{n+1}+1 \le X^n+1$

أي أن $0 \le \ln\left(X^{n+1}+1\right) \le \ln\left(X^n+1\right)$ ، $n \in \mathbb{N}^*$

نستنتج أن $0 \le \int_0^1 \ln\left(X^{n+1}+1\right)dX \le \int_0^1 \ln\left(X^n+1\right)dX$

$0 \le I_{n+1} \le I_n$ ومنه: المتتالية (I_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

بما ان (I_n) محدودة من الاسفل بالصفر ($0 \le I_n \le \ln 2$)

ومتناقصة تماما فإنها متقاربة نحو الصفر

6) باستعمال: $\ln(1+X) \le X$ ،من اجل كل $X \in]0;+\infty[$

أ*/ استنتاج أن : $0 \le I + I_1 \le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx - 1 + \ln 4$

$\ln(1+X) \le X$ ،من اجل كل $X \in]0;+\infty[$

لدينا: $1+2e^{-2(x-e)} \succ 0$ بوضع: $X = 1+2e^{-2(x-e)}$ نجد:

$0 \le \ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right) \le 2e^{-2(x-e)}$ وبالتالي

$$0 \le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} \ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)dx \le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx$$

ومنه: $0 \le -1+\ln 4 \le I + I_1 \le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx - 1 + \ln 4$

اذن: $0 \le I + I_1 \le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx - 1 + \ln 4$

ب*/ اعطاءحصرا للعدد $I + I_1$:

$$0 \le I + I_1 \le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx - 1 + \ln 4$$

$$\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx = -\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} -2e^{-2(x-e)}dx = -\left[e^{-2(x-e)}\right]_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} = \frac{1}{6}$$

$0 \le I + I_1 \le \frac{1}{6} - 1 + \ln 4$ ومنه: $0 \le I + I_1 \le \frac{-5}{6} + \ln 4$

3) رسم (Δ) ، (D) ، (D') و (C_f):