البكالوريا التجريبية في مادة الرياضيات

المستوى: ثالثة علوم تجريبية		المدّة: 3 ساعات ونصف

على المترشح اختيار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التّمرين الأول: (4 نقاط)

يحتوي صندوق على ثماني كرات منهم : 3 كرات حمراء و 3 كرات خضراء و كرتين بيضاوين الكرات متماثلة و لا نفرق بينها باللمس . نسحب عشوائيا على التوالي ودون ارجاع كرتين من الصندوق

1) نعتبر الحدث A التالي : الحصول على كرة بيضاء واحدة على الأقل .
و الحدث B : الحصول على كرتين من نفس اللون .

أ) بين أن $P(A)=\dfrac{13}{28}$ ، $P(B)=\dfrac{1}{4}$

ب) نضيف الى الصندوق n كرة بيضاء ، نعتبر الحدث C :الحصول على كرتين بيضاوين

بين أن : $P(C)=\dfrac{(n+2)(n+1)}{(n+8)(n+7)}$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} p(C)$ و ماذا تستنتج .

2) نسحب عشوائيا و في أن واحد 3 كرات من الصندوق -وضعية الصندوق الأولى- و نعتبر المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

أ) أعط قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضياتي.

ب) احسب التباين و الانحراف المعياري.

التّمرين الثاني: (4 نقاط)

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة ب: $u_{n+1}=\dfrac{u_n^2}{2u_n^2-2u_n+1}$ و $u_0=\dfrac{3}{4}$

1) برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $\dfrac{1}{2}<u_n<1$.

2) بين أن (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة .

3) نعتبر المتتالية $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة ب: $t_n=\ln\left(\dfrac{1-u_n}{u_n}\right)$

أ- بين أن المتتالية t_n هندسية أساسها 2 ثم عبر عن t_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

ب- عين $\lim\limits_{n\to+\infty}(t_n)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$.

4) أحسب الجداء $P_n=t_0\times t_1\times ....\times t_n$

أحسب المجموع $S_n=\dfrac{1}{t_0}+\dfrac{1}{t_1}+.......+\dfrac{1}{t_n}$

التّمرين الثالث: (5 نقاط)

1) حل، في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$، المعادلة $\left(z-i\sqrt{3}\right)\left(z^2+-2z+4\right)=0$.

2) المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. نعتبر النّقطة A، B و C التي لواحقها على الترتيب: $z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$، $z_C=i\sqrt{3}$

أ) أكتب على الشكل الأسي z_A ، z_B، z_C ثم أحسب العدد $\left(z_A\right)^{2019}+\left(z_B\right)^{1440}+\left(z_C\right)^{2969}$

ب) أكتب على الشكل الأسي العدد $L=\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ ثم حدد طبيعة المثلث ABC.

ت) استنتج طبيعة التحويل S الذي مركزه A و يحول النقطة B إلى النقطة C مبرزا عناصره المميزة.

3) لتكن G مرجح الجملة $\left\{\left(A,1\right);\left(B,\alpha\right);\left(C,1\right)\right\}$ حيث $\alpha\neq-2$ عيين قيمة α حتى تنتمي النقطة G إلى المتوسط المتعلق بالضلع $\left[BC\right]$ في المثلث ABC.

4) حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $\left|iz+\sqrt{3}-i\right|=\left|\bar{z}+i\sqrt{3}\right|$.

التّمرين الرابع: (07 نقاط)

I. لتكن g دالّة عدديّة مُعرّفة على $\left]-2,+\infty\right[$ بـ : $g(x)=-1+(x+2)e^x$.

1) أدرس تغيرات الدّالّة g، ثُمّ شكّل جدول تغيُّراتها.

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيد α بحيث $-0,5<\alpha<-0,4$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. لتكن f دالّة عدديّة مُعرّفة على $\left]-2,+\infty\right[$ بـ $f(x)=e^x-\ln\left(x+2\right)$

و ليكن $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي.

1) أحسُب نهايات الدّالّة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها. ثم فسر النتائج هندسيا .

2) أثبت أنه من أجل كل x من $\left]-2,+\infty\right[$: $f'(x)=\dfrac{g\left(x\right)}{x+2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغيُّر الدّالّة f، ثُمّ شكّل جدول تغيُّراتها.

3) أكتب معادلة (Δ) مماس المنحنى $\left(C_f\right)$ عند مبدأ المعلم O

4) أنشئ $\left(C_f\right)$ و (Δ). تعطى $f(\alpha)\simeq0,2$

5) أحسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى $\left(C_f\right)$ و المستقيم (Δ) و $x=0$ و $x=1$.

6) ناقش، بيانيّاً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة، ذات المجهول الحقيقي x، حيثُ $e^x+\ln\left(\dfrac{m+2}{x+2}\right)=e^m$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التّمرين الأول: (04 نقاط)

لتكن h دالّة عدديّة مُعرّفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ $h(x)=\dfrac{4x-1}{x+2}$. و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي. (أنظر الملحق) و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$

1) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة بـ: $u_{n+1}=\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}$ و $u_0=5$

أ- مثل الحدود u_0,u_1,u_2,u_3 على حامل محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط الرسم

ب- أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية وتقاربها (u_n)

2) بين أنه من أجل كل x من $]0,+\infty[$ أنه $h'(x)=\dfrac{9}{(x+2)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

3) أ-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n>1$.

ب-أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

4) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة بـ: $v_n=\dfrac{1}{u_n-1}$

أ- بين أن (v_n) حسابية يطلب تعين أساسها وحدها الأول .

ب- عبر عن (v_n) بدلالة n ثم استنتج (u_n) بدلالة n. عين $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$.

5) أحسب الجداء $P_n=e^{v_0}\times e^{v_1}\times e^{v_2}\times\ldots\ldots\times e^{v_n}$

التّمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس. نعتبر النّقط $A(2,1,3)$ ، $B(-3,-1,7)$ و $C(3,2,4)$.

1) أثبت أنّ النقط A ، B و C تعين مستو يا وحيدا (ABC) .

2) ليكن (Δ) المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي (Δ) $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=-7+2t\\y=-3t\\z=4+t\end{cases}$.

بين أن المستقيم (Δ) يُعامد المستوي (ABC)،ثم أكتُب معادلة ديكارتيّة للمستوي (ABC).

3) نسمي H النقطة المشتركة بين (Δ) و (ABC).

بين أن H هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,-2);(B,-1);(C,2)\}$

4) نعتبر $(T_1),(T_2)$ مجموعتي النقط من الفضاء و التي تحقق :

$(T_1):(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0$ و $(T_2):\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$

عين طبيعة كل من المجموعتين $(T_1),(T_2)$، ثم عين طبيعة تقاطعهما .

التّمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر في مايلي النّقط A، B و C التي لواحقها $z_A = 4-3i$، $z_B = 4+3i$ و $z_C = 7$ على التّرتيب عين الاقتراح الصحيح مع التعليل من بين الاقتراحات التالية:

1) المعادلة $z^3 - 15z^2 + 81z - 175 = 0$ للمتغيّر المركّب z حيث $z_0 = 7$ حلا لها تقبل ثلاث حلول هي:

أ) $S = \{7, 4-3i, 4+3i\}$ ب) $S = \{7, -4-3i, -4+3i\}$ ج) $S = \{-7, 4-3i, 4+3i\}$

2) العدد $\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right)^{2018}$ يساوي:

أ) 1 ب) 0 ج) -1.

3) لدينا $z_A - z_C = i(z_B - z_C)$ المثلّث ABC

أ) قائم في C ب) قائم في C و متساوي الساقين ج) متساوي الساقين.

4) العبارة المركبة للدوران R الذي مركزه ω ذات اللاحقة $z_\omega = 4$ و يُحوّل النّقطة C إلى النّقطة B فإن العبارة المركبة لهذا التحويل:

أ) $z' = iz + 4 - 4i$ ب) $z' = 2iz + 3 - 4i$ ج) $z' = iz + 3 - 4i$.

5) (T) مجموعة النّقط M،ذات اللاّحقة z، من المستوي المركّب حيثُ يكون $\frac{z - z_B}{z - z_C}$ تخيّليّاً صرفاً جزؤه التّخيّلي موجب.هي:

أ)المستقيم (AB) ب) دائرة قطرها $[AB]$ ج) هي نصف دائرة قطرها $[BC]$ باستثناء النّقطتين B و C

التّمرين الرابع: (07 نقاط)

I. لتكن g الدالّة العدديّة المُعرّفة على المجال $]0,+\infty[$ $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln(x)$.

1) أدرس تغيُّرات الدّالّة g، ثُمّ شكّل جدول تغيُّراتها.

2) أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق $1 < \alpha < 2$

3) استنتج اشارة $g(x)$ من أجل كل x من $]0,+\infty[$.

II. لتكن f الدالّة العدديّة المُعرّفة على $]0,+\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2\ln x}{x^2 + x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي. وحدة الطول : محور الفواصل $1 \to 1cm$، محور التراتيب $1 \to 5cm$.

1) أُحسُب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ فسِّر هندسيّاً النّتائج.

2) أ- بين أنّه من أجل كل x من المجال $]0,+\infty[$ أن $'(\ ) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}(x)$.

ب - استنتج اتجاه تغيُّر الدّالّة f، ثُمّ شكّل جدول تغيُّراتها.

3) عين معدلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 1

4) أنشئ (Δ) و (C_f). تعطى $f(\alpha) = 0,4$

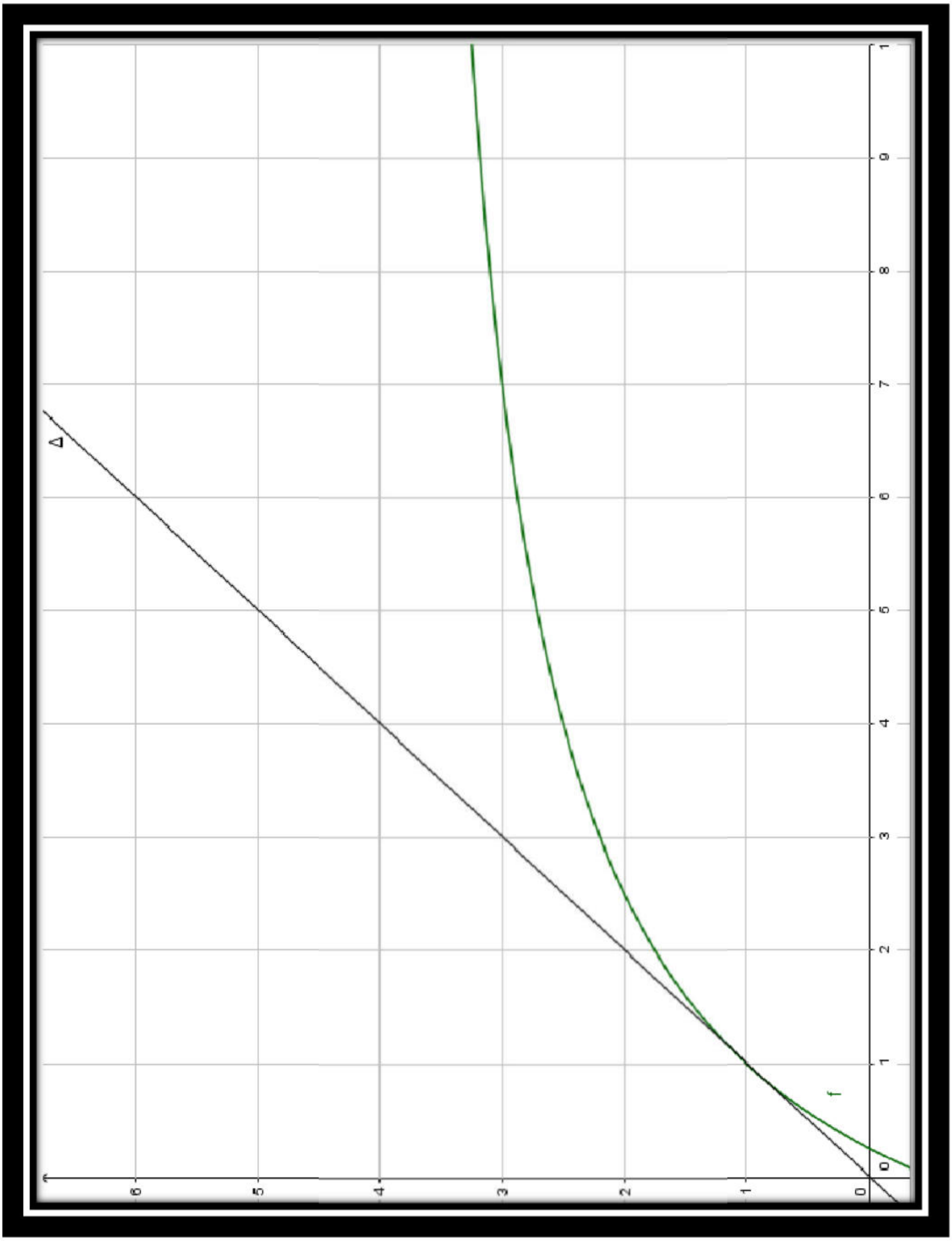
5) ناقش، بيانيّاً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة، ذات المجهول الحقيقي x، حيثُ $x^2 + x + 2\ln x = m(x^3 + x^2)$

انتهى الموضوع الثاني

بالتوفيق ☹ والنجاح ☺ في شهادة البكالوريا 2019 ❀❀

الأساتذة

الملحق: خاص بالتمرين الأول الموضوع الثاني



التَصْحِيحْ المفصّل للبكالُوريَا التجْريبي دَورة مَايٍْ 2019 الموضوع 01

تصحيح التمرين الأول (04 نقاط) (الإحتمالات)	التنقيط

1 I) أوّلا نحسب عدد الحالات الممكنة للسحب : $A_8^2 = \frac{(8)!}{(8-2)!} = 8\times 7 = 56$.

$$C_{n+8}^2 = \frac{(n+8)!}{2!(n+6)!} = \frac{(n+8)(n+7)(n+6)!}{2(n+6)!} = \frac{(n+8)(n+7)}{2}$$

1) الحدث A إحتمال سحب كرة بيضاء على الأقل :

$$P(A) = \frac{A_2^1\times A_6^1 + A_6^1\times A_2^1 + A_2^2}{56} = \frac{26}{56} = \frac{13}{28}$$

الحدث B إحتمال سحب كرتين من نفس اللون:

$$P(B) = \frac{A_3^2 + A_3^2 + A_2^2}{56} = \frac{14}{56} = \frac{1}{4}$$

ب❖ الحدث C إحتمال سحب كرتين بيضاوين بعد اضافة n كرة بيضاء:

أوّلا نحسب عدد الحالات المكنة للسحب :

$$A_{8+n}^2 = \frac{(8+n)!}{(6+n)!} = \frac{(8+n)(7+n)(6+n)!}{(6+n)!} = (8+n)(7+n)$$

ثانيا نحسب عدد الحالات الملائمة للسحب :

$$A_{n+2}^2 = \frac{(n+2)!}{(n+2-2)!} = \frac{(n+2)(n+1)(n)!}{(n)!} = (n+2)(n+1)$$.

إذن إحتمال سحب كرتين بيضاوين هو: $P(C) = \frac{(n+2)(n+1)}{(n+8)(n+7)}$.

ب) حساب $\lim\limits_{n\to\infty} P(n)$ ، ثم نفسر النتيجة:

$$\lim_{n\to\infty} P(c) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{(n+8)(n+7)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$$.

التفسير : الحادثة " سحب كرتين بيضاويين " تكون <u>حادثة أكيدة</u> لما n يكون كبيرا بالقدر الكافي .

II) **1) قيم المتغير العشوائي X :**

المتغير العشوائي يعبّر عن عدد الكرات الحمراء المسحوبة

و منه قيم المتغير العشوائي X هي : $(X=0),(X=1),(X=2),(X=3)$.

2) تعيين قانون الإحتمال ، و حساب أمله الرياضي:

- حالة $(X=0)$ أي االكرات المسحوبة ا من لون اخر ، إذن : $\frac{10}{56} = \frac{C_5^3}{C_8^3} = P(X=0)$ ، أي :.

- حالة $(X=1)$ أي سحب كرة حمراء وكرتين من الباقي $P(X=1) = \frac{C_5^2 C_3^1}{C_8^3} = \frac{30}{56}$

. حالة $(X=2)$ أي سحب كرتين حمراء وكرة من الباقي $P(X=2) = \frac{C_5^1 C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56}$

حالة $(X=3)$ أي سحب ثلاثة كرات حمراء $P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}$

حساب الأمل الرياضي : $E(X) = \sum_{i=0}^{3} X_i . P_i$ ، أي: $E(X) = \frac{63}{56}$.

حساب التباين : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ ، أي: $V(X) = \frac{99}{56} - \left(\frac{63}{56}\right)^2 = 0,36$

حساب الانحراف المعياري : $\delta(X) = \sqrt{V(X)}$ ، أي: $\delta(X) = \sqrt{0,36} = 0,6$

تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط) (المتتاليات العددية)	التنقيط

لدينا : $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n^2 - 2u_n + 1}$ و $u_0 = \frac{3}{4}$:

$P(n) : \frac{1}{2} < u_n < 1$

المرحلة1: من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = \frac{3}{4}$ أي : $\frac{1}{2} < u_0 < 1$ و منه $P(0)$ محققة.

المرحلة2: نفرض صحة $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n.

و نبرهن صحة $P(n+1)$ من أجل كل عدد طبيعي n. أي نفرض أن $\frac{1}{2} < u_n < 1$ صحيحة و نبين أن: $\frac{1}{2} < u_{n+1} < 1$.

- لدينا فرضا أنّ: $\frac{1}{2} < u_n < 1$ ، إيكفي أن نبرهن أن : $u_{n+1} < 1$ و $\frac{1}{2} < u_{n+1}$ ،

نبيّن أنّ: $u_{n+1} < 1$.

نحسب $u_{n+1} - 1$:

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n^2}{2u_n^2 - 2u_n + 1} - 1 = \frac{u_n^2 - 2u_n^2 + 2u_n - 1}{2u_n^2 - 2u_n + 1} = \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{2u_n^2 - 2u_n + 1} = \frac{-(u_n - 1)^2}{2u_n^2 - 2u_n + 1}$$ ، أي

أنّ: $u_{n+1} < 1$

نبيّن أنّ: $\frac{1}{2} < u_{n+1}$. **نحسب** $u_{n+1} - \frac{1}{2}$:

$\frac{1}{2} < u_{n+1}$: أي أنّ ، $u_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{u_n^2}{2u_n^2 - 2u_n + 1} - \frac{1}{2} = \frac{2u_n^2 - 2u_n^2 + 2u_n - 1}{2\left(2u_n^2 - 2u_n + 1\right)} = \frac{2u_n - 1}{2\left(2u_n^2 - 2u_n + 1\right)}$

،وعليه : $\frac{1}{2} < u_{n+1} < 1$.

و أخيرا الخاصية $P(n)$ **محققة من أجل كل عدد طبيعي** n .

2) دراسة رتابة المتتالية (u_n) **:**

من أجل كل عدد طبيعي n **ندرس إشارة الفرق :** $u_{n+1} - u_n$:

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2u_n^2 - 2u_n + 1} - u_n = \frac{u_n^2 + 2u_n^2 - 2u_n^3 - u_n}{2u_n^2 - 2u_n + 1} - u_n = \frac{u_n\left(-2u_n^2 + 3u_n + 1\right)}{2u_n^2 - 2u_n + 1}$ ،

لدينا $\frac{1}{2} < u_n < 1$ **، لدينا :** $-2u_n^2 + 3u_n + 1 > 0$ **لما** $\frac{1}{2} < u_n < 1$

و منه المتتالية (u_n) **متزايدة على** $\mathbb{N}$.

3)إستنتاج أنّ المتتالية (u_n) **متقاربة و حساب نهايتها:**

بما أنّ المتتالية (u_n) **متزايدة وَ محدودة من الأعلى بـ** 1 **، إذن هي متقاربة.**

3)أ) بيان أن (t_n) **متتالية هندسية :**

لدينا: $t_n = \ln\left(\frac{1 - u_n}{u_n}\right)$ **،أي :**

$$t_{n+1} = \ln\left(\frac{1-u_{n+1}}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{1-\frac{u_n^2}{2u_n^2-2u_n+1}}{\frac{u_n^2}{2u_n^2-2u_n+1}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{u_n^2-2u_n+1}{2u_n^2-2u_n+1}}{\frac{u_n^2}{2u_n^2-2u_n+1}}\right) = \ln\frac{\left(1-u_n\right)^2}{\left(u_n\right)^2} = \ln\left(\frac{1-u_n}{u_n}\right)^2 = 2\ln\left(\frac{1-u_n}{u_n}\right) = 2t_n$$

و منه : $t_{n+1} = 2.t_n$ **، إذن المتتالية** (t_n) **هندسية أساسها** $q = 2$ **، و حدها الأول :**

$t_0 = \ln\left(\frac{1 - u_0}{u_0}\right) = \ln\left(\frac{1 - \frac{3}{4}}{\frac{3}{4}}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln 3$.

ب) التعبير عن t_n **بدلالة** n **و** u_n **بدلالة** n **:**

- **عبارة** t_n **:** $t_n = t_0 \times q^n$ **، أي :** $v_n = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \times (2)^n$.
- **عبارة** u_n **: لدينا** $t_n = \ln\left(\frac{1 - u_n}{u_n}\right)$ **أي:** $e^{t_n} = \frac{1 - u_n}{u_n}$ **أي:،** $u_n e^{t_n} = 1 - u_n$ **، أي :**

$u_n e^{t_n} + u_n = 1$ **أي:** $u_n\left(e^{t_n} + 1\right) = 1$ **أي:** $u_n = \frac{1}{\left(e^{t_n} + 1\right)}$ **أي:** $u_n = \frac{1}{\left(e^{t_n} + 1\right)}$ **أي أن**

$$u_n=\frac{1}{\left(e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)(2)^n}+1\right)}=\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}+1}$$

ج) حساب نهاية المتتالية (u_n): ————————————————————————

نعلم أنّ: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}=0$ ، لأنّ $\lim_{n\to+\infty} t_n=\ln\left(\frac{1}{3}\right)\times(2)^n=-\infty$ و: $u_n=\frac{1}{\left(e^{t_n}+1\right)}$، و منه:

$\lim_{n\to\infty}u_n=1$.

5) حساب الجداء المجموع S_n : ————————————————————————

حساب الجداء $P_n=t_0\times t_1\times.......\times t_n$ تكافئ $P_n=\left(t_0\times q^0\right)\times\left(t_0\times q^1\right).......\times\left(t_0\times q^1\right)$

تكافئ $P_n=\left(t_0\times t_0\times....t_0\right)\times\left(q^0\times q^1\times......\times q^n\right)$ تكافئ

$P_n=\left(t_0\right)^{n+1}\times\left(q^{0+1+2+......+n}\right)=\left(t_0\right)^{n+1}\times(q)^{\frac{(n)(n+1)}{2}}$ تكافئ $P_n=\left(\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right)^{n+1}\times(2)^{\frac{(n)(n+1)}{2}}$

حسب المجموع $S_n=\frac{1}{t_0}+\frac{1}{t_1}+.......+\frac{1}{t_n}=\frac{1}{t_0\times q^0}+\frac{1}{t_0\times q^1}+.......+\frac{1}{t_0\times q}$

تكافئ $S_n=\frac{1}{t_0}\left(\frac{1}{q^0}+\frac{1}{q^1}+.......+\frac{1}{q^n}\right)$ تكافئ $S_n=\frac{1}{t_0}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{q}\right)}\right)$ تكافئ

$$S_n=\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right)$$

تصحيح التمرين الثالث (05 نقاط) (الأعداد المركبة)	التنقيط

1) حل، في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$، المعادلة $\left(z-i\sqrt{3}\right)\left(z^2+-2z+4\right)=0$.

ب) المستوي المركّب منسوب إلى لدينا $P(z)=0$ يكافئ $\left(z-i\sqrt{3}\right)\left(z^2+-2z+4\right)=0$ يكافئ

$$\begin{cases}\left(z-i\sqrt{3}\right)=0..............(1)\\ \left(z^2+-2z+4\right)=0....(2)\end{cases}$$

من المعادلة (1) نجد أنّ $z=i\sqrt{3}$.

المعادلة (2) من الدّرجة الثانية، نحلّها باستخدام المميّز Δ حيثُ $\Delta=-12=12i^2$، إذن

فهي تقبل حلّين مترافقين هما $z_1=\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=1-i\sqrt{3}$ و

$z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 1 + i\sqrt{3}$، و عليه مجموعة حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي $S = \left\{ i\sqrt{3}, 1 + i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3} \right\}$.

أ) ❖ كتابة على الشكل الأسي z_A ، z_B، z_C ثم أحسب العدد $\left(z_A\right)^{2019} + \left(z_B\right)^{1440} + \left(z_C\right)^{2969}$

$$z_C = i\sqrt{3} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \quad z_B = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad z_A = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

- حساب العدد $\left(z_A\right)^{2019} + \left(z_B\right)^{1440} + \left(z_C\right)^{2969}$

$$\left(z_A\right)^{2019} + \left(z_B\right)^{1440} + \left(z_C\right)^{2969} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2019} + \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{1440} + \left(\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2969}$$

$$\left(2^{2019} e^{i\frac{2019\pi}{3}}\right) + \left(2^{1440} e^{-i\frac{1440\pi}{3}}\right) + \left(\sqrt{3}^{2969} e^{i\frac{2969\pi}{2}}\right) = 2^{2019} e^{i673\pi} + 2^{1440} e^{-i480\pi} + \sqrt{3}^{2969} e^{i\left(1484\pi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$2^{2019} e^{i\pi} + 2^{1440} e^{i0} + \sqrt{3}^{2969} e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -2^{2019} + 2^{1440} + \sqrt{3}^{2969} i$$

ب) كتابة على الشكل الأسي العدد $L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ثم تحديد طبيعة المثلث ABC.

$$L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}} = \frac{1}{i2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6} i = \frac{\sqrt{3}}{6} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

لدينا $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = |L| = \frac{\sqrt{3}}{6}$ أي أنّ $AC \neq BC$، كذلك لدينا $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(L) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$، و منه $\left(\overrightarrow{AB}, AC\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$، و عليه يكون المثلّث ABC قائم في A.

ت) استنتاج طبيعة التحويل S الذي مركزه A و يحول النقطة B إلى النقطة C و عناصره المميزة.

لدينا $\begin{cases} z_A = az_A + b \ldots .(1) \\ z_C = az_B + b \ldots .(2) \end{cases}$، بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نحصل على $z_C - z_A = a\left(z_B - z_A\right)$ و منه $a = L = \frac{\sqrt{3}}{6} e^{-i\frac{\pi}{2}}$ إذن ، و عليه التحويل S تشابه مباشر نسبته $|L| = \frac{\sqrt{3}}{6}$ و زاويته $\arg(L) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ و مركزه A .

ب) لدينا $z_D = iz_B + 4 - 4i$ و منه $z_D = 7$.

3) لتكن G مرجح الجملة $\left\{ (A,1); (B,\alpha); (C,1) \right\}$ حيث $\alpha \neq -2$ عيين قيمة α حتى تنتمي النقطة G إلى المتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث ABC.

لاحقة النقطة G هي $z_G = \frac{z_A + \alpha z_B + z_C}{\alpha + 2} = \frac{1 + \alpha + i(2 - \alpha)\sqrt{3}}{\alpha + 2}$ لتكن النقطة D

منتصف الضلع $[BC]$ إذن $z_D = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{1}{2}$

حتى تنتمي النقطة G إلى المتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث ABC، يجب أن يكون

العدد $K = \frac{z_G - z_A}{z_G - z_D}$ حقيقيا بحتا و حتي يكون كذلك $\bar{K} = K$ تكافئ $\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$

تكافئ $\alpha = -2$ مرفوض أو $\alpha = 1$

4) تحديد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $\left|iz + \sqrt{3} - i\right| = \left|\bar{z} + i\sqrt{3}\right|$ تكافئ

$\left|i(z - i\sqrt{3} - 1)\right| = \left|\bar{z} - \left(-i\sqrt{3}\right)\right|$ تكافئ $|i|\left|(z - i\sqrt{3} - 1)\right| = \left|\bar{z} - \left(-i\sqrt{3}\right)\right|$ تكافئ

$\left|z - \left(i\sqrt{3} + 1\right)\right| = \left|\bar{z} - \left(-i\sqrt{3}\right)\right|$ تكافئ $\left|z - z_A\right| = \left|\bar{z} - \bar{z}_c\right|$ تكافئ $\left|z - z_A\right| = \left|\overline{z - z_C}\right|$ تكافئ

$\left|z - z_A\right| = \left|z - z_C\right|$ تكافئ $AM = CM$ ومنه مجموعة النقط $M(z)$ هي المستقيم المحوري

للقطعة $[AC]$

تصحيح التمرين الرابع (7 نقاط) (الدالة الأسية)	التنقيط

الجزء الأول:

1) دراسة إتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $]-2;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي:

$g'(x) = (x+3)e^x$.

جدول التغيرات الدالة g

x	-2 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-1 \nearrow +\infty$

نلاحظ أنه من أجل كل $x \in [0;+\infty[$: $g'(x) \leq 0$.

الخلاصة: الدالة g متزايدة على $]-2;+\infty[$.

– حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x+2)e^x - 1 == +\infty$

$\lim\limits_{x\to-2} g(x) = \lim\limits_{x\to-2} (x+2)e^x - 1 = -1$

2) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $]-2;+\infty[$:

الدالة g مستمرة و رتيبة تماما على $]-2;+\infty[$ و لدينا .

$-0,5 < \alpha < -0,4$: بما أنّ : $\begin{cases} g(-0;5) = -0, \\ g(-0,4) = +0, \end{cases}$ أي $g(-0,5) \times g(-0,4) < 0$ ، و بتالي حسب

نظرية القيم المتوسطة فإنه $g(x) = 0$: تقبل حل وحيد α على $g(\alpha) = 0$ $]1,14;1,15[$

إشارة $g(x)$:-

x	-2	α $\quad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$	$+$

الجزء الثاني: لدينا : $f(x) = e^x - \ln(x+2)$

حساب $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = \lim\limits_{x\to-2} \left[e^x - \ln(x+2)\right] = +\infty$:

المستقيم الذي معادلته $x=-2$ مقارب عمودي لـ (C_f)

نهاية f عند $+\infty$: ——————————————————

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[e^x-\ln(x+2)\right]=\lim_{x\to+\infty}(x+2)\left[\frac{e^x}{x+2}-\frac{\ln(x+2)}{x+2}\right]=+\infty$$

2) أ) بيان أنّه من أجل كل $]-2;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{e^x\times g(x)}{(xe^x+1)^2}$: ——————————

الدالة f قابلة للإستقاق على $[0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=e^x-\frac{1}{x+2}=\frac{xe^x+2e^x-1}{x+2}=\frac{(x+2)e^x-1}{x+2}=\frac{g(x)}{x+2}$$

ب) إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة f ، و تشكيل جدول تغيّراتها : ——————نلاحظ أنّ إشـارة $f'(x)$ من إشـارة $g(x)$.

x	-2 α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$

- الدالة f متناقصة تماما على $]-2;\alpha[$
- الدالة f متزايدة تماما على $]\alpha;+\infty[$

- جدول التغيرات

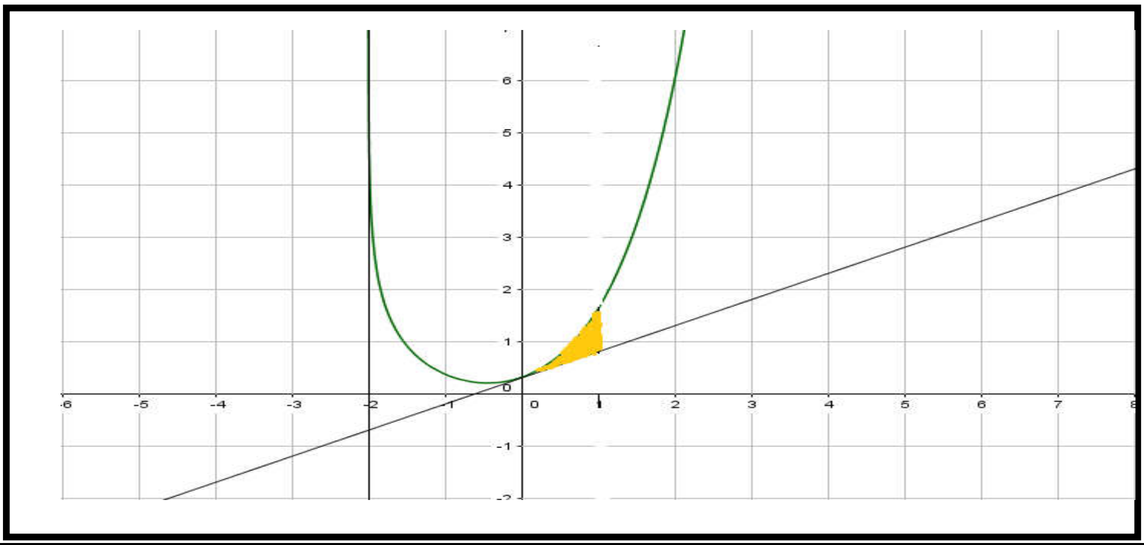
x	-2 α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $f(\alpha)$	↗ $+\infty$

.

3) كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 : ——————————

$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$ **أي** $(\Delta): y=\dfrac{1}{2}x+1-\ln 2$

4) رسم كلا من (Δ) و المنحنى (C_f) : ——————————————



الجزء الثالث :

5) حساب بـ cm^2 **مساحة الحيز المحدد بـ** (C_f) **وَ** (T) **و محور التراتيب و** $x=1$: ——————————

$A=\int_0^1\left[f(x)-\left(\frac{1}{2}x+1-\ln(2)\right)\right]dx=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1\left(\frac{1}{2}x+1-\ln(2)\right)dx$ ، أي :

$$A=\int_0^1 e^x dx-\int_0^1\ln(x+2)dx-\int_0^1\left(\frac{1}{2}x+1-\ln(2)\right)dx$$

$A=\left[e^x-(x+2)\ln(x+2)-\frac{1}{4}x^2+x\ln 2\right]_0^1\approx 0,25u.c^2$.

المناقشة بيانيًّا، $e^x+\ln\left(\frac{m+2}{x+2}\right)=e^m$ **تكافئ** $e^x+(m+2)-\ln(x+2)=e^m$ **تكافئ** $e^x-\ln(x+2)=e^m-(m+2)$ **تكافئ** $f(x)=f(m)$ **وهي مناقشة أفقية حلولها فواصل نقط تقاطع** (C_f) **مع المستقيم المتحرك ذو المعادلة** $y=f(m)$

من أجل $m=\alpha$ **المعادلة تقبل حلا مضاعفا**

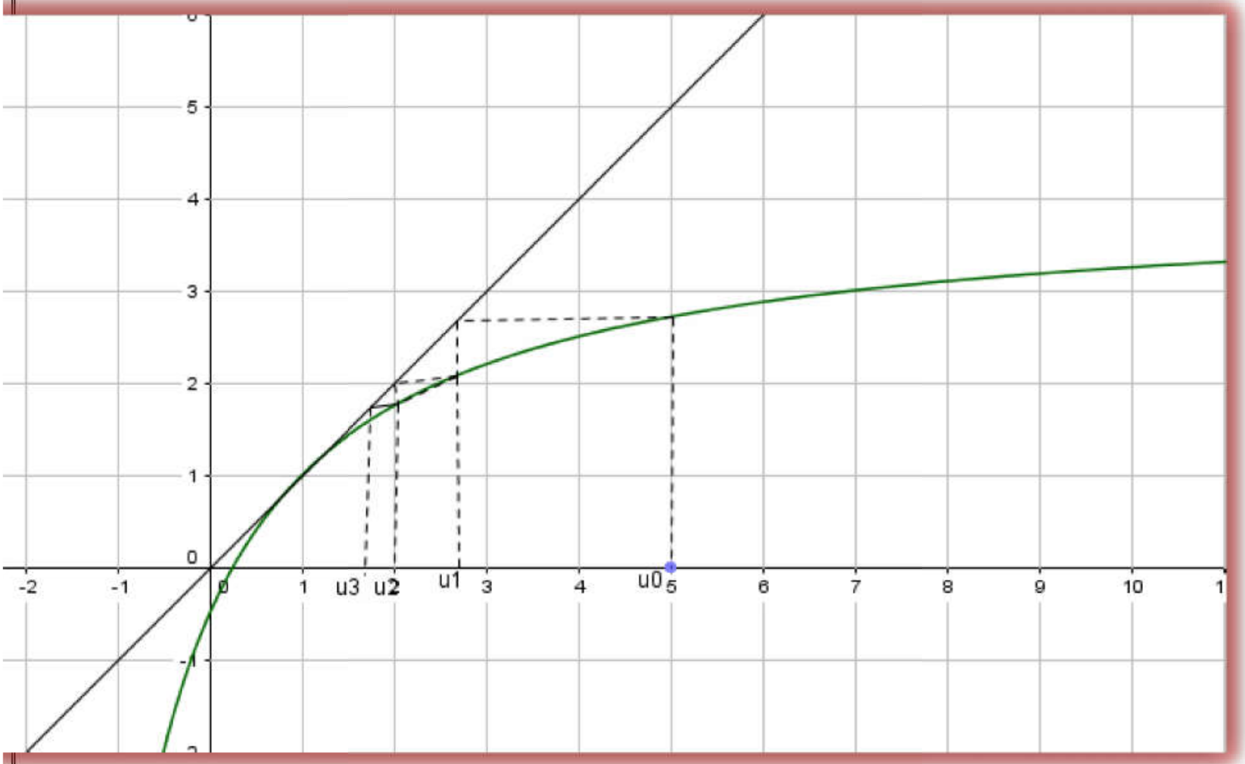
من أجل $m\in]-2;\alpha[\cup]\alpha;+\infty[$ **المعادلة تقبل حلا ن متمايزان**

إعداد الاستاذ : زايدي علاء الدين

التَصْحِيحْ المفصّل للبكالُوريَا التجْريبي دَورة مَايْ 2019 الموضوع 02

تصحيح التمرين الأول (04 نقاط) (المتتاليات) التنقيط

1- 1 أ- تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على حامل محور الفواصل



ب- التخمين $u_0 \succ u_1 \succ u_2 \succ u_3$ إذن من الواضح أن المتتالية u_n متناقصة تماما
بما أن المتتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو نقطة تقاطع .

2- نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة ب: $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$ و $u_0 = 5$

من أجل كل x من $]0, +\infty[$ أنه $h'(x) = \dfrac{4(x+2) - 1(4x-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{8+1}{(x+2)^2}$ تكافئ

$h'(x) = \dfrac{9}{(x+2)^2} \rangle 0$ ومنه الدالة h متزايدة تماما على $]0, +\infty[$

3) أ – البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 1$.

الشرط الأوّل

لنتأكد من صحة $P(0)$ لدينا $u_0 = 5$ تكافئ : $u_0 > 1$ ومنه $P(0)$ صحيحة.

الشرط الثاني

لنفرض أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} > 1$

حسب فرضية التراجع $u_n > 1$ نلاحظ أن $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} = f(u_n)$

تكافئ: $f(u_n) > f(1)$ و تكافئ $u_{n+1} > 1$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة. $P(n)$ و منه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه ن أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 1$.

ب- أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{4u_n - 1 - (u_n)^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{-(u_n)^2 + 2u_n - 1}{u_n + 2}$$

نلاحظ أن $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 2} < 0$ المتتالية u_n متناقصة تماما .

3) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة ب: $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$

أ- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حسابية معناه أن $v_{n+1} - v_n = r$

لدينا $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ تكافئ $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} = \dfrac{1}{\dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1} = \dfrac{1}{\dfrac{4u_n - 1 - u_n - 2}{3u_n + 4}} = \dfrac{u_n + 2}{3u_n - 3}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3u_n + 2}{3u_n - 3} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 2 - 3}{3u_n - 3} = \frac{1}{3}\left(\frac{u_n - 1}{u_n - 1}\right) = \frac{1}{3}$$

ومنه (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 1} = \dfrac{1}{4}$

ب- عبارة v_n بدلالة n: $v_n = v_0 + nr = \dfrac{1}{4} + (\dfrac{1}{7})n$

استنتج (u_n) بدلالة n لدينا: $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ تكافئ $v_n(u_n - 1) = 1$ تكافئ

$$u_n = \frac{1 + v_n}{v_n} = \frac{1}{v_n} + 1 = \frac{1}{\frac{1}{4} + (\frac{1}{7})n} + 1 = \frac{28}{4n + 7} + 1$$

تعين $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 1$.

4) حساب الجداء $P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_2} \times \ldots\ldots \times e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + \ldots + v_n} = e^{\frac{(n+1)}{2}(v_0 + v_n)}$

التنقيط	(الهندسة الفضائية)	تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط)

لدينا : $A(2;1;3)$ ، $B(-3;-1;7)$ ، $C(3;2;4)$.

1) أ) بيان أن النقط $A;B;C$ تعيّن مستويا :

1- لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\-2\\4\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ، $\left(\dfrac{-2}{1} \neq \dfrac{-5}{1}\right)$. أي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطيا ، و منه النقط $A;B;C$ تعيّن مستويا .

2) المعادلة الديكارتية هي ....

لدينا (Δ) **المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي** (Δ) $t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}$.

المستقيم (Δ) **يُعامد المستوي** (ABC)**،معناه أن** $\vec{n}_{(ABC)} = \vec{u}_{(\Delta)}$

نفرض أنّ $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ **و منه** $\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$ **إذن** $\begin{cases} 5a + 2b - 4c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$ **ومنه** $\begin{cases} b = \dfrac{-3}{2}a \\ c = -a - b \end{cases}$

إذن $\begin{cases} a = a \\ b = -\dfrac{3}{2}a \\ c = \dfrac{1}{2}a \end{cases}$ **وبالتالي** $\vec{n}(a, \dfrac{-3}{2}a, \dfrac{1}{2}a)$; $a \in \mathbb{R}^*$ **يوجد عدد غير منته من الأشعة تكون ناظمية**

للمستوى (ABC) **من أجل** $a = 2$ **فإنّ** $\vec{n}(2,-3,1)$ **معناه أن** $\vec{n}_{(ABC)} = \vec{u}_{(\Delta)}$ **أي أن المستقيم** (Δ) **يُعامد المستوي** (ABC)

المعادلة الديكارتية هي $(ABC): 2x - 3y + z + d = 0$ **وبما أن** $A \in (ABC)$ **فإنّ**

$(ABC): 2x - 3y + z - 4 = 0$

3) احداثيات H **:** ——————————————————————————

لدينا H **النقطة المشتركة بين** (Δ) **و** (ABC)**. أي أن إحداثيات** H **تحقق الجملة**

$$t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = -7 + 2t \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ y = -3t \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \\ z = 4 + t \ldots\ldots\ldots\ldots(3) \\ 2x - 3y + z - 4 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(4) : (ABC) \end{cases}$$

بالتعويض نجد $t = 1$ **و بتعويض قيمتها في المعادلات نجد** $H(-5;-3;5)$

H **هي مرجح الجملة المثقلة** $\{(A,-2);(B,-1);(C,2)\}$ **لدينا** $\alpha + \beta + \gamma = -2 + 2 - 1 \neq 0$ **إذن** H **موجود و وحيد**

$$\begin{cases} x_H = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} = -5 \\ y_H = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} = -3 \\ z_H = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma} = 5 \end{cases}$$

تعين طبيعة كل من المجموعتين $(T_1),(T_2)$**، ثم عين طبيعة تقاطعهما .**

$(T_1): (-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$ **تكافئ** $(\overrightarrow{MH})(\overrightarrow{BC}) = 0$ **هي المستوي الذي ناظمه**

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ **ويشمل النقطة** H **المعادلة الديكارتية له هي** $6x + 3y - 3z + d = 0$ **وبما أن** $G \in (T_1)$

فإنّ $(T_1): 2x+y-z+18=0$

تعين طبيعة (T_2)

$$(T_2): \left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$$

تكافئ $MH=\sqrt{29}$ إذن مجموعة النقط (T_2) هي سطح كرة مركزها H و نصف قطرها $\sqrt{29}$.

$$d\left(H;(s)\right)=\frac{\left|ax_H+by_H+cz_H+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\left|2(-5)+-3+-5+18\right|}{\sqrt{6}}=0$$

• بما أن $d(H;(S))\prec R$ فإن المستوي يقطع سطح الكرة (S) في دائرة مركزها النقطة G ونصف قطرها r

حيث: $r=\sqrt{R^2-d^2}$

تصحيح التمرين الثالث (05 نقاط) (الأعداد المركبة)	التنقيط

إختيار من متعدد

1) لدينا $P(7)=0$، باستخدام خوارزميّة القسمة الإقليدية نجد أنّ $P(z)=(z-7)(z^2-8z+25)$.

ت) لدينا $P(z)=0$ يكافئ $(z-7)(z^2-8z+25)=0$ يكافئ $\begin{cases} z-7=0 ....(1) \\ z^2-8z+25=0 ....(2)\end{cases}$

من المعادلة (1) نجد أنّ $z=7$.

المعادلة (2) من الدّرجة الثانية، نحلّها باستخدام المميّز Δ حيثُ $\Delta=-36$، إذن فهي تقبل حلّين مترافقين هما $z_1=\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=4-3i$ و $z_2=\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=4+3i$، و عليه مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي $S=\left\{7,4-3i,4+3i\right\}$. الاقتراح - أ -

2) العدد $\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)^{2018}=i^{2018}=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2018}=e^{i\frac{2018\pi}{2}}=e^{i1009\pi}=e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

الاقتراح - ج -

3) المثلّث ABC قائم في C و متقايس السّاقين. الاقتراح - ب -

لدينا $z_A-z_C=i\left(z_B-z_C\right)$ و منه $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=i$، كذلك لدينا $\left|\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right|=|i|=1$ أي أنّ $AC=BC$، كذلك لدينا $\arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$، و منه $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$، و عليه يكون المثلّث ABC قائم في C و متقايس السّاقين.

4) أ) العبارة المركّبة للدّوران R من الشكل $z'=az+b$.

لدينا $\begin{cases} z_\Omega=az_\Omega+b ....(1) \\ z_B=az_C+b ....(2)\end{cases}$، بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نحصل على $z_B-z_\Omega=a\left(z_C-z_\Omega\right)$ و منه $a=i$ إذن $b=4-4i$، و عليه العبارة المركّبة للدّوران R هي

$z' = iz + 4 - 4i$. الاقتراح - أ-

5) العدد $\frac{z-z_B}{z-z_C}$ تخيّلي صرف جزؤه التّخيّلي موجب يعني أنّ $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أي أنّ

$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$، و عليه (Ψ) هي نصف دائرة قطرها $[BC]$ باستثناء النّقطتين B و

C و الزّاوية $\widehat{MBC}$ موجّهة في الاتجاه الموجب. الاقتراح -ج-

تصحيح التمرين الرابع (7 نقاط)	(الدالة اللوغاريتمية)	التنقيط

الجزء الأول: لدينا : $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln(x)$.

1 دراسة تغيُّرات الدّالّة ....

تعيين نهايات الدالة g :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \left[\frac{x+1}{2x+1} - \ln(x)\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x+1}{2x+1} - \ln(x)\right] = -\infty$$ ،،

دراسة إتجاه تغير الدالة g و تشكيل جدول تغيّراتها: ——————————————————

—— ة g قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$$g'(x) = \frac{-1}{(2x+1)^2} - \frac{1}{x} = -\frac{(4x^2+5x+1)}{(2x+1)^2}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة : $(x-1)(3x^2+3x+2)$.

جدول التغيرات :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

❖

2) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $]-2;+\infty[$: ——————————

الدالة g مستمرة و رتيبة تماما على $]0;+\infty[$ و لدينا، .

$1 < \alpha < 2$: ↖ بما أنّ: $\begin{cases} g(1) = 0,66 \\ g(2) = -0,09 \end{cases}$ أي $g(1) \times g(2) < 0$ ، و بتالي حسب نظرية القيم المتوسطة

فإنه $g(x) = 0$: تقبل حل وحيد α على $]1;2[$ $\quad g(\alpha) = 0$

❖ **إشـارة** $g(x)$

x	0 $\qquad$ α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	$-$

الجزء الثاني: لدينا : $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x^2 + x}$

حساب $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\ln x}{x^2 + x} = -\infty$:

المستقيم الذي معادلته $x = 0$ **مقارب عمودي لـ** (C_f)

نهاية f **عند** $+\infty$: ———————————————————————

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\ln x}{x^2 + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{2}{x+1} \times \dfrac{\ln x}{x}\right] = 0$ **المستقيم الذي معادلته** $y = 0$ **مقارب أفقي لـ** (C_f)

2) أ) **بيان أنّه من أجل كل** $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} g(x)$: ———————————

الدالة f **قابلة للإستقاق على** $]0;+\infty[$ **و دالتها المشتقة هي :**

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x}(x^2 + x) - 2x\ln x}{(x^2+x)^2} = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} g(x)$$

ت) **إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة** f **، و تشكيل جدول تغيّراتها :** ———————————

نلاحظ أنّ إشـــارة $f'(x)$ **من إشـــارة** $g(x)$.

- **الدالة** f **متزايدة تماما على** $]0;\alpha[$
- **الدالة** f **متناقصة تماما على** $]\alpha;+\infty[$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$

- **جدول التغيرات**

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ 0

.

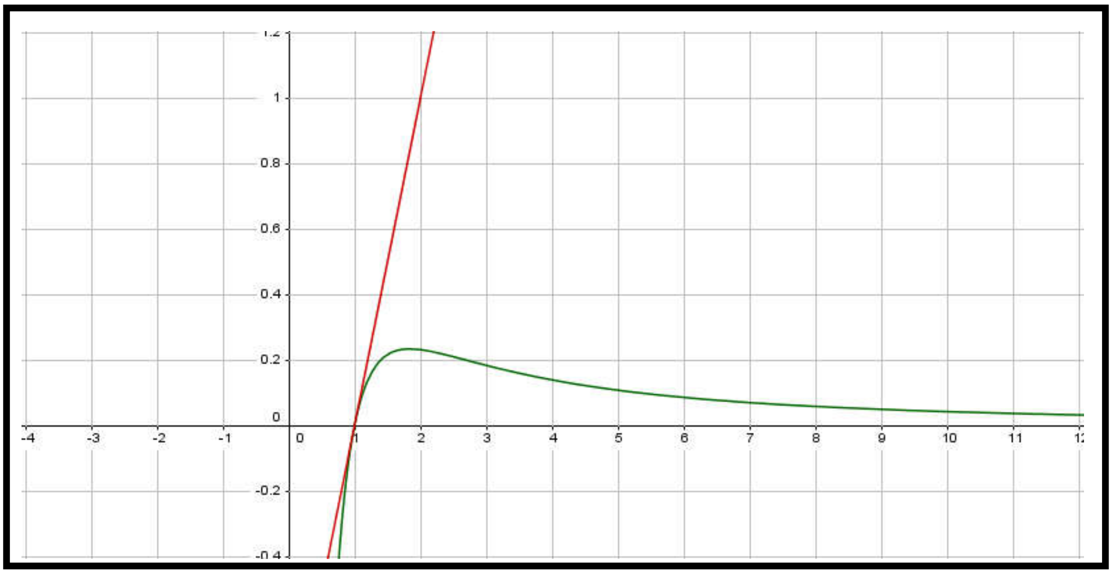
❖

3) **كتابة معادلة المماس** (Δ) **لـ** (C_f) **عند النقطة ذات الفاصلة** 1 : ———————————

$(\Delta) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ ،

أي : $(\Delta) : y = x + 1$ ، **لأنّ :** $\begin{cases} f'(1) = 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$.

4) رسم كلا من (Δ) و المنحني (C_f) :



الجزء الثالث :

المناقشة بيانيًا، $x^2 + x + 2\ln x = m\left(x^3 + x^2\right)$ تكافئ $x^2 + x + 2\ln x = mx\left(x^2 + x\right)$ تكافئ $\frac{x^2 + x}{\left(x^2 + x\right)} + \frac{2\ln x}{\left(x^2 + x\right)} = mx$ تكافئ $\frac{2\ln x}{\left(x^2 + x\right)} = mx - 1$ تكافئ $f\left(x\right) = mx - 1$ وهي مناقشة دورانية حلولها فواصل نقط تقاطع $\left(C_f\right)$ مع المستقيم المتحرك ذو المعادلة $y = mx - 1$ الذي يدور حول نقطة ثابتة $\left(0;-1\right)$

من أجل $m \in \left]-\infty;0\right[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

من أجل $m \in \left]0;1\right[$ المعادلة تقبل حلان متمايزان

من أجل $m = 1$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

من أجل $m \in \left]1;+\infty\right[$ المعادلة لا تقبل حلولا

إعداد الأستاذ : زايدي علاء الدين

بالتوفيق في البكالوريا 2019 إن شاء الله