

امتحان البكالوريا التجريبي

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :
الموضوع الأول:

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بعدها الأول u_0 ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 10^n (u_0 + 1) - 1$ حيث u_0 عدد طبيعي

- نعتبر المعادلة (E) في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ التالية: $61x - 39y = 38$
1) حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E) علما ان الثنائية $(23; 35)$ حلا خاصا لها.

2) أ) بين ان: $u_{1982} \equiv u_0 [33]$

ب) بملاحظة ان: $10^{60} \equiv 1 [61]$. بين ان $u_{1982} \equiv (39u_0 + 38) [61]$

ثم إستنتج ان: $u_{1982} \equiv 0 [61]$ يكافئ $u_0 \equiv 35 [61]$

3) أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $10^{7n} \equiv 10^n [70]$

ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $10^{7n} \equiv 10 [70]$

4) في هذا السؤال نفرض ان: $u_0 = 0$. أنشر العدد 2019 وفق الأساس 7 ثم عين باقي u_{2019} على 70.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

في الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. نعتبر المستقيمان (D_1) و (D_2) المعرفان بتمثيلهما

$$(D_2): \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = t \\ z = -2t + 4 \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad (D_1): \begin{cases} x = m \\ y = m - 1 \\ z = 1 \end{cases} ; m \in \mathbb{R}$$

1) أ) بين أن (D_1) و (D_2) متعامدان وليسا من نفس المستوي.

ب) تحقق أن الشعاع $\vec{n}(-1; 1; 1)$ هو شعاع عمودي على (D_1) و (D_2) .

2) أ) بين أن المعادلة الديكارتيّة للمستوي (P) الذي يحوي (D_1) والعمودي على (D_2) هي $x - y + 2z - 3 = 0$

ب) بين أن المستقيم (D_2) يقطع المستوي (P) في نقطة B يطلب تعيين إحداثياتها

3) بين أن المستقيم (D) الذي يشمل النقطة B وشعاع توجيهه \vec{n} يقطع المستقيم (D_1) في النقطة $A(1; 0; 1)$

4) ليكن (Q) المستوي الذي يحوي (D_1) ويكون عموديا على (P) و M نقطة متغيرة على (D_2)

أ) ادرسا لوضع النسبي بين المستوي (Q) و (D_2)

ب) استنتج المسافة بين M و (Q) .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

$$\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1 + i\sqrt{3} \\ (\sqrt{3} + 2i)z_1 - z_2 = (1 - \sqrt{3})i \end{cases}$$

2) في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين $z_A = 1 - i$ و

$$z_B = 2 + \sqrt{3} + i$$

أ) أكتب z_A على الشكل الأسّي.

(ب) بين ان : $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم إستنتج الشكل الأسي للعدد z_B .

(3) أوجد لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{6}$ -

(ب) احسب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BD]$ مقدره بوحدة المساحة .

(ج) عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $\arg[(z - z_B)^2] = \arg(z_B) - \arg(z_D)$

(4) لتكن النقطة C ذات اللاحقة $z_C = 1 + i$.

- عين طبيعة المثلث ABC ثم استنتج بدقة طبيعة الرباعي $ACBD$.

(5) ليكن التحويل النقطي S المعرف كما يلي : $S = r \circ h$ مع h تحاكي مركزه O ونسبته -2 -

(أ) عين طبيعة التحويل S مع تعيين خصائصه المميزة

(ب) نعرف من اجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ ، التحويل النقطي H_n كما يلي : $H_n = \underbrace{S \circ S \circ \dots \circ S}_n$

- عين قيم n حتى يكون H_n تحاكي يطلب تعيين خصائصه .

التبرين الرابع : (07 نقاط)

(I) 1) لتكن الدالة u المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $u(t) = 3\ln(1+t) - \frac{t}{1+t}$

- عين اتجاه تغير الدالة u .

2) ليكن الدالة f المعرفة على $[0;1]$ ب : $f(x) = x^3[\ln(1+x) - \ln x]$; $x \in]0;1]$
 $f(0) = 0$

(أ) أثبت أن f قابلة للإشتقاق على يمين 0 .

(ب) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in]0;1]$ ، $f'(x) = x^2 u\left(\frac{1}{x}\right)$ ،

(ج) عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(II) نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على $[0;1]$ ب : $g(x) = x^3 \ln(x+1)$ و $h(x) = x^3 \ln x$; $x \in]0;1]$
 $h(0) = 0$

وليكن على الترتيب (C_f) ، (C_g) ، و (C_h) منحنيات الدوال f ، g ، و h في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

بحيث : $\|\vec{i}\| = 4 \text{ cm}$

1) (أ) تحقق أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $[0;1]$: $f(x) = g(x) - h(x)$

(ب) عين الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_g) .

2) ليكن (T) و (T') مماسين لـ (C_f) و (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة $e^{-\frac{1}{3}}$ على الترتيب .

- أثبت أن (T) و (T') متوازيان .

3) أنشئ المنحنى (C_f)

4) لتكن H الدالة الأصلية الوحيدة لـ h على المجال $[0;1]$ والتي تنعدم عند 1 .

(أ) ليكن $\alpha \in]0;1]$ و $A_\alpha = \int_\alpha^1 x^3 \ln x dx$ ، عبر عن A_α بدلالة الدالة H

(ب) أحسب A_α باستعمال التكامل بالتجزئة ثم أستنتج $H(0)$.

5) عين مساحة الحيز من المستوي المحددة بالمنحنيين (C_f) و (C_g) والمستقيمين ذو المعادلتين $x=0$ و $x=1$.

التصحيح المفصل للباكالوريا التجريبي ماي 2019 الموضوع 01

تصحيح التمرين الأول (04 نقاط) الأعداد والحساب + المتاليات العددية التقط

1 حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E) :لتكن الثانية $(x; y)$ حل للمعادلة (E) يكافئ (1) $61x - 39y = 38$ بما الثانية $(23; 35)$ حل خاص لـ (E) نجد: (2) $61(23) - 39(35) = 38$ بطرح المعادلتين نجد: $61(x - 23) = 39(y - 35)$ لدينا، 61 يقسم $61(x - 23)$ منه نستنتج ان 61 يقسم $39(y - 35)$ بما ان 61 و 39 اوليان فيما بينهما فانه حسب مبرهنة غوص نجد ان 61 يقسم $y - 35$ وعليه نجد: $y = 61k + 35$ مع $k \in \mathbb{Z}$ - بتعويض قيمة y في المعادلة (1) نجد: $x = 39k + 23$ مع $k \in \mathbb{Z}$ الخلاصة: حلول المعادلة (E) هي: $S = \{(x; y) = (39k + 23; 61k + 35); k \in \mathbb{Z}\}$ 2 (أ) تبين ان: $u_{1982} \equiv u_0 [33]$:لدينا، $u_{1982} = 10^{1982}(u_0 + 1)$ لاحظ ان: $10^2 \equiv 1 [33]$ منه $10^{991} \equiv 1 [33]$ يكافئ $10^{1982} \equiv 1 [33]$ يكافئ $10^{1982}(u_0 + 1) \equiv u_0 + 1 [33]$ يكافئ $10^{1982}(u_0 + 1) - 1 \equiv u_0 [33]$ يكافئ $u_{1982} \equiv u_0 [33]$ (ب) تبين ان: $u_{1982} \equiv (39u_0 + 38)[61]$ بما ان: $10^{60} \equiv 1 [61]$ منه $10^{60} \equiv 1 [61]$ اي $10^{1980} \equiv 1 [61]$ منه $10^2 \times 10^{1980} \equiv 10^2 [61]$ منه $10^{1982} \equiv 39 [61]$ منه $10^{1982}(u_0 + 1) \equiv 39(u_0 + 1)[61]$ منه $u_{1982} \equiv 39u_0 + 38 [61]$ - استنتاج ان: $u_{1982} \equiv 0 [61]$ يكافئ $u_0 \equiv 35 [61]$:

الاستلزام الاول:

 $u_{1982} \equiv 0 [61]$ معناه $39u_0 + 38 \equiv 0 [61]$ اي $39u_0 + 38 = 61t$ مع $t \in \mathbb{Z}$ وعليه: $61t - 39u_0 = 38$ منه الثانية $(t; u_0)$ حل للمعادلة (E)اذن نجد ان: $u_0 = 61k + 35$ اي $u_0 \equiv 35 [61]$.الاستلزام العكسي: اذا كان $u_0 \equiv 35 [61]$ معناه $u_0 + 1 \equiv 36 [61]$ بما ان $10^{1982} \equiv 39 [61]$ نجد: $10^{1982}(u_0 + 1) \equiv 1404 [61]$ منه $10^{1982}(u_0 + 1) \equiv 1 [61]$ منه: $u_{1982} \equiv 0 [61]$

<p>0.25</p> <p>0.5</p> <p>0.25</p> <p>0.5</p>	<p>3) أ) تبين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $10^{7^n} \equiv 10^n [70]$ ،</p> <p>لدينا، $10^7 \equiv 10 [70]$ منه من اجل كل n من \mathbb{N} ، $10^{7^n} \equiv 10^n [70]$ اي $10^{7^n} \equiv 10^n [70]$</p> <p>ب) البرهان باتراجع:</p> <p>نضع من اجل كل عدد طبيعي n ، $P(n): 10^{7^n} \equiv 10 [70]$ ،</p> <p>المرحلة 01: التحقق من صحة $P(0)$</p> <p>من اجل $n=0$: $10 \equiv 10 [70]$ منه $P(0)$ محققة.</p> <p>المرحلة 02: من اجل n عدد طبيعي كفي ، نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن صحة</p> <p>$P(n+1): 10^{7^{n+1}} \equiv 10 [70]$</p> <p>لدينا ، $10^{7^{n+1}} = 10^{7(7^n)} = 10^{7 \cdot 7^n} = 10^{7^{n+1}}$ ، $10^{7(7^n)} \equiv 10^{7^n} [70]$ ،</p> <p>وحسب فرضية التراجع نجد: $10^{7^n} \equiv 10 [70]$ نجد: $10^{7(7^n)} \equiv 10^{7^n} [70]$</p> <p>منه: $10^{7^{n+1}} \equiv 10 [70]$ اي $P(n+1)$ محققة.</p> <p>الخلاصة: من اجل كل عدد طبيعي n فان $10^{7^n} \equiv 10 [70]$.</p> <p>4) نشر العدد 2019 وفق الالاساس 7 :</p> $\begin{array}{r} 2019 \overline{) 7} \\ \underline{3} \\ 288 \overline{) 7} \\ \underline{1} \\ 41 \overline{) 7} \\ \underline{6} \\ 5 \overline{) 7} \\ \underline{5} \\ 0 \end{array}$ <p>لدينا، $2019 = \overline{5613}^{(7)}$: منه</p> <p>تعيين باقي u_{2019} على 70 :</p> <p>لدينا ، $u_{2019} = 10^{2019} - 1$ ، بما ان $2019 = \overline{5613}^{(7)} = 3 + 7 + 6(7^2) + 5(7^3)$ ،</p> <p>منه : $10^{2019} = 10^{3+7+6(7^2)+5(7^3)} = 10^3 \times 10^7 \times 10^{6(7^2)} \times 10^{5(7^3)}$</p> <p>حساب السؤال السابق نجد: $10^{2019} \equiv 10^3 \times 10 \times 10^6 \times 10^5 [70]$ ، منه $u_{2019} \equiv 19 [70]$</p> <p>$\equiv 20 [70]$</p>
<p>التقيط</p>	<p>تصحیح التمرین الثاني (04 نقاط) الهندسة الفضائية</p>
<p>0.25</p> <p>0.75</p>	<p>1) أ) تبين ان (D_1) و (D_2) متعامدان و ليسا من نفس المستوي:</p> <p>لدينا، $\vec{u}(1;1;0)$ و $\vec{v}(-1;1;-2)$ اشعة توجيه المستقيمين (D_1) و (D_2) على الترتيب.</p> <p>لدينا، $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1 \times -1) + (1 \times 1) + (0 \times -2) = -1 + 1 + 0 = 0$</p> <p>منه: المستقيمين (D_1) و (D_2) متعامدين .</p> <p>- تبين ان (D_1) و (D_2) ليسا من نفس المستوي:</p> <p>بما ان المستقيمين (D_1) و (D_2) متعامدين فانما ليس من نفس المستوي او متقاطعين في نقطة</p> $\begin{cases} -t+1=m & \dots(1) \\ t=m-1 & \dots(2) \\ -2t+4=1 & \dots(3) \end{cases}$ <p>وحيدة $H(x;y;z)$ فهي تحقق $\begin{cases} H \in (D_1) \\ H \in (D_2) \end{cases}$ اي</p>

بحل الجملة (1) و (2) نجد: $t=0$ و $m=1$

- من اجل $t=0$ نجد: $H(1;0;4)$ ومن اجل $m=1$ نجد: $H(1;0;1)$
 بما النقطة H ليست وحيدة فان المستقيمين (D_1) و (D_2) ليسا من نفس المستوى.

ب) التحقق ان $\vec{n}(-1;1;1)$ هو شعاع عمودي على (D_1) و (D_2) :

لدينا، $\vec{u}(1;1;0)$ و $\vec{v}(-1;1;-2)$ اشعة توجيه المستقيمين (D_1) و (D_2) على الترتيب.

0.5

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n} = (-1 \times 1) + (1 \times 1) + (1 \times 0) = -1 + 1 + 0 = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{n} = (-1 \times -1) + (1 \times 1) + (1 \times -2) = 1 + 1 - 2 = 0 \end{cases}$$

بما ان :
 منه: $\vec{n}(-1;1;1)$ هو شعاع عمودي على (D_1) و (D_2) .

2) أ) المعادلة الديكارتية للمستوي (P) :

بما المستقيم (D_2) عمودي على المستوي (P) فان $\vec{v}(-1;1;-2)$ شعاع ناظمي لـ (P)

و عليه المعادلة الديكارتية للمستوي (P) من الشكل: $-x + y - 2z + d = 0$

- لتكن $A(1;0;1)$ نقطة من (D_1) فان $A \in (P)$ لان (D_1) محتوي في المستوي (P)

منه: $-x_A + y_A - 2z_A + d = 0$ اي $-1 - 2 + d = 0$ منه: $d = 3$

الخلاصة: المعادلة الديكارتية لـ (P) هي $-x + y - 2z + 3 = 0$ اي $x - y + 2z - 3 = 0$

ب) دراسة الوضع النسبي بين (D_2) و (P) :

بما ان المستقيم (D_2) عمودي على المستوي (P) فانهما متقاطعان وفق نقطة وحيدة

0.5

$$-t + 1 - t - 4t + 8 - 3 = 0 \quad \text{منه:} \quad \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = t \\ z = -2t + 4 \\ x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{اي:} \quad \begin{cases} B \in (D_2) \\ B \in (P) \end{cases}$$

منه: $-6t + 6 = 0$ منه: $t = 1$ و عليه نجد: $B(0;1;2)$

3) دراسة تقاطع (D) مع (D_1) : التمثيل الوسيطى للمستقيم (D) الذي يشمل B وموجه

0.5

$$\begin{cases} x = -k \\ y = 1 + k \\ z = 2 + k \end{cases} \quad \text{باشعاع } \vec{n}(-1;1;1) \text{ يكتب على الشكل: } k \in \mathbb{R}$$

من اجل الثانية: $(m;k) = (1;-1)$ نجد ان النقطة $A \in (D)$ و $A \in (D_1)$

منه: $(D) \cap (D_1) = \{A\}$.

4) أ) الوضع النسبي بين (Q) و (D_2) :

بما ان المستوي (Q) و المستقيم (D_2) عموديان على (P) نستنتج ان:

- (D_2) و (Q) متوازيان او (D_2) محتوي في (Q)

- لدينا، $B \in (D_2)$ وبما $B \notin (D_1)$ اي $B \notin (Q)$ و عليه (D_2) و (Q) متوازيان تماما

ب) استنتاج $d(M;(Q))$:

0.5

0.25

$$d(M;(Q)) = AB = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{3}$$

(1) تعیین العددين z_1, z_2 :

0.5

$$\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1 + i\sqrt{3} \\ (-2 + i\sqrt{3})z_1 - iz_2 = -1 + \sqrt{3} \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1 + i\sqrt{3} \\ (\sqrt{3} + 2i)z_1 - z_2 = (1 - \sqrt{3})i \end{cases} \text{ لدينا،}$$

باجمع نجد: $i\sqrt{3}z_1 = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$ اي $z_1 = 1 - i$ بتعويض قيمة z_1 نجد ان: $z_2 = 2 + \sqrt{3} + i$

0.25

(2) أ) كتابة z_A على الشكل الاسي: لدينا، $|z_A| = \sqrt{2}$ و $\arg(z_A) = -\frac{\pi}{4}$ منه: $z_A = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ (ب) تبين ان: $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{4}}$ لدينا،

0.25

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{2 + \sqrt{3} + i}{1 - i} = \frac{(2 + \sqrt{3} + i)(1 + i)}{2} = \frac{2 + 2i + \sqrt{3} + \sqrt{3}i + i - 1}{2} = \frac{1 + \sqrt{3} + i(3 + \sqrt{3})}{2}$$

$$= (1 + \sqrt{3}) \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \right) = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$$

استنتاج الشكل الاسي لـ z_B :

0.25

$$z_B = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}} z_A = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}} \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{2} + \sqrt{6})e^{i\frac{\pi}{12}}$$

(3) أ) إيجاد لاحقة النقطة D :

D صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{6}$ معناه: $r(B) = D$

0.5

$$z_D = e^{-\frac{\pi}{6}i} (\sqrt{2} + \sqrt{6})e^{i\frac{\pi}{12}} = (\sqrt{2} + \sqrt{6})e^{-\frac{\pi}{12}i}$$

الاستنتاج: $z_D = \overline{z_B}$ (ب) مساحة الدائرة (γ) :

0.5

لتكن S مساحة الدائرة (γ) التي قطرها [BD] منه: $S = \pi \frac{BD}{2} = \frac{\pi}{2} |z_B - z_D|$

$$z_D = \overline{z_B} \text{ فان } z_B - z_D = 2\text{Im}(z_B) = 2i \text{ منه: } S = \pi u.a$$

(ج) تعیین مجموعة النقط:

0.75

لدينا، $\arg[(z - z_B)^2] = \arg(z_B) - \arg(z_D)$ تكافئ $2\arg(z - z_B) = \frac{\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) + 2\pi k$

$$\arg(z - z_B) = \frac{\pi}{12} + \pi k \text{ تكافئ}$$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ مع } (\bar{u}; \overline{BM}) = \frac{\pi}{12} + \pi k \text{ تكافئ}$$

منه مجموعة النقط (Δ) هي المستقيم الموجه بالشعاع \bar{w} حيث $(\bar{u}; \bar{w}) = \frac{\pi}{12}$ و المار من النقطة B ولا يشملها.

<p>0.25</p> <p>0.5</p> <p>0.75</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p>	<p>(أ) طبيعة المثلث ABC :</p> $K = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{2 + \sqrt{3} + i - 1 - i}{1 - i - 1 - i} = \frac{1 + \sqrt{3}}{-2i} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i$ <p>لدينا، منه: $K = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ و $\arg(K) = \frac{\pi}{2}$ اذن: $BC \neq AC$ و $(\overline{CA}; \overline{CB}) = \frac{\pi}{2}$ منه المثلث ABC قائم في C</p> <p>(ب) طبيعة الرباعي ACBD :</p> <p>لدينا، منه $\overline{AC} = \overline{DB}$ اذن الرباعي ACBD متوازي اضلاع بما ان المثلث ABC قائم في C نجد ان هناك ضلعان متتاليان من الرباعي ACBD متعامدان و ليس متساويان منه نستنتج ان ACBD مستطيل .</p> <p>(5) أ) طبيعة التحويل S :</p> <p>r دوران مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{6}$: منه r هو تشابه مباشر مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{6}$ ونسبته 1 h تحاكي مركزه O ونسبته 2- منه h هو تشابه مباشر مركزه O وزاويته π ونسبته 2 اذن: التحويل $S = r \circ h$ هو تشابه مباشر مركزه O ونسبته 2 وزاويته $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$</p> <p>(ب) تعيين قيم n :</p> <p>لدينا، $H_n = S \circ S \circ \dots \circ S$ هو تشابه مباشر مركزه O ونسبته 2^n وزاويته $\frac{5\pi n}{6}$ H_n يكون تحاكي اذا كان $5n \equiv 0[6]$ اي $n \equiv 0[6]$ اي $n = 6\alpha / \alpha \in \mathbb{N}$. تعيين الخصائص:</p> <p>اذا كان: α عدد زوجي فان H_n تحاكي مركزه O ونسبته 2^n اذا كان: α عدد فردي فان H_n تحاكي مركزه O ونسبته -2^n</p>
التنقيط	<p>تصحیح التميرين الرابع (7 نقاط)</p> <p>الدوال العددية : الدالة اللوغارتمية</p>
<p>0.5</p> <p>0.5</p>	<p>(1) تعيين واتجاه تغير الدالة u : لدينا من اجل كل عدد حقيقي t من $]0; +\infty[$:</p> $u'(t) = \frac{3}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} = \frac{3(t+1) - 1}{(t+1)^2} = \frac{3t+2}{(t+1)^2}$ <p>من اجل من اجل كل عدد حقيقي t من $]0; +\infty[$: $u'(t) > 0$ منه u دالة متزايدة تماما على $]0; +\infty[$.</p> <p>(2) إثبات ان f قابلة للاشتقاق على يمين العدد 0 :</p> $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 [\ln(1+x) - \ln x]}{x}$ $= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 [\ln(1+x) - \ln x]$ $= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(1+x) - x^2 \ln x$ $= 0$ <p>منه: f دالة قابلة للاشتقاق على يمين العدد 0 و عدد المشتق $f'_d(0) = 0$</p>

ب) حساب $f'(x)$ من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;1[$:

0.5

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 [\ln(x+1) - \ln x] + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right) x^3 \\ &= x^2 \left[3(\ln(x+1) - \ln x) + \frac{x}{x+1} - 1 \right] \\ &= x^2 \left[3 \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \right] \\ &= x^2 u \left(\frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

ج) اتجاه تغير الدالة f :

0.5

لدينا من اجل كل x من $]0;1[$ فان $\frac{1}{x} \geq 1$ منه $u \left(\frac{1}{x} \right) \geq u(1)$ اي $u \left(\frac{1}{x} \right) > 0$
 منه من اجل كل x من $]0;1[$ نجد: $f'(x) > 0$
 اذن f دالة متزايدة تماما على المجال $]0;1[$.

- جدول التغيرات:

0.25

x	0	1
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$\ln 2$

II) 1) التحقق ان: $f(x) = g(x) - h(x)$:

0.25

من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;1[$:

$$f(x) = x^3 [\ln(x+1) - \ln(x)] = x^3 \ln(x+1) - x^3 \ln x = g(x) - h(x)$$

ب) دراسة الوضع النسبي بين (C_g) و (C_r) :

لدينا من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;1[$: $f(x) - g(x) = -h(x)$
 بما ان $h(x) < 0$ على المجال $]0;1[$ منه نجد:

0.75

x	0	1
x^3	○	+
$\ln x$		-
$-h(x)$	○	+

اذن: (C_r) يقع فوق (C_g) على المجال $]0;1[$.

(C_g) و (C_r) يتقطعان في القطبتين O و $A(1; \ln 2)$.

2) اثبات ان (T) و (T') متوازيان :

(T) و (T') مماسين لـ (C_g) و (C_r) عند $e^{-\frac{1}{3}}$ على الترتيب

0.5

معامل توجيههما على التوالي $f' \left(e^{-\frac{1}{3}} \right)$, $g' \left(e^{-\frac{1}{3}} \right)$

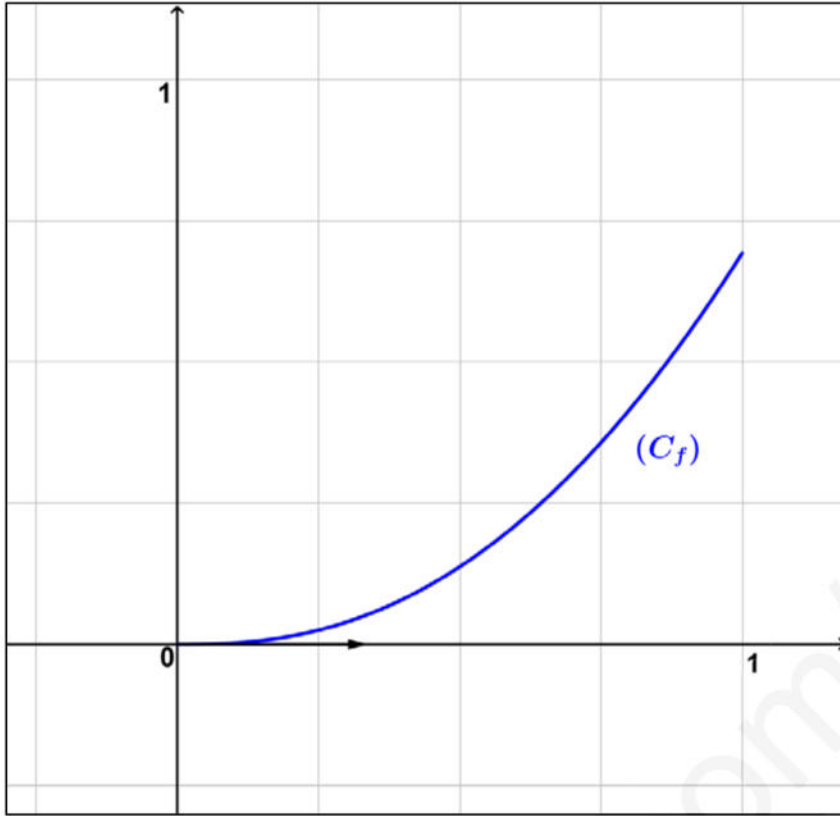
لدينا، من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;1[$: $f(x) - g(x) = h(x)$

$$\text{منه: } f'(x) - g'(x) = h'(x) = x^2 (3 \ln x - 1)$$

وعليه: $f' \left(e^{-\frac{1}{3}} \right) = g' \left(e^{-\frac{1}{3}} \right)$ اي $f' \left(e^{-\frac{1}{3}} \right) - g' \left(e^{-\frac{1}{3}} \right) = 0$

وعليه (T) و (T') متوازيان .

3) إنشاء (C_f) :



0.75

4) أ) التعبير عن A_α بدلالة الدالة H :

$$A_{\alpha} = \int_{\alpha}^1 x^3 \ln x dx = \int_{\alpha}^1 h(x) dx = [H(x)]_{\alpha}^1 = H(1) - H(\alpha) = -H(\alpha)$$

0.5

ب) حساب A_α باستعمال التكامل بالتجزئة :

$$\text{نضع: } \begin{cases} u(x) = \ln x & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x^3 & v(x) = \frac{x^4}{4} \end{cases} \text{ منه:}$$

0.75

$$A_{\alpha} = \left[\frac{x^4 \ln x}{4} \right]_{\alpha}^1 - \frac{1}{4} \int_{\alpha}^1 x^3 dx = \left(0 - \frac{\alpha^4 \ln \alpha}{4} \right) - \frac{1}{4} \left[\frac{x^4}{4} \right]_{\alpha}^1 = - \left[\frac{\alpha^4 \ln \alpha}{4} + \frac{1}{16} (1 - \alpha^4) \right]$$

استنتاج H(0) :

0.5

حساب السؤالين السابقين نستنتج ان: $H(\alpha) = \frac{\alpha^4 \ln \alpha}{4} + \frac{1}{16} (1 - \alpha^4)$

$$\text{منه: } H(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} H(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\alpha^4 \ln \alpha}{4} + \frac{1}{16} (1 - \alpha^4) = \frac{1}{16}$$

5) حساب المساحة:

$$S = \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx = - \int_0^1 h(x) dx = - [H(x)]_0^1 = H(0) - H(1) = \frac{1}{16} \text{ u.a}$$

0.5

بما ان: $S = 1 \text{ cm}^2$ نجد ان: $\text{u.a} = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = 16 \text{ cm}^2$

0.25

BAC 2019

بالتوفيق في البكالوريا إن شاء الله