مديرية التربية لولاية البرج
امتحان تجريبي لبكالوريا التعليم الثانوي
الشعبة : 3 رياضيات + تقني رياضي

ثانوية : 18 فيفري - الحمادية -
ثانوية : بلعروسي بن يحي - الرابطة -
دورة : ماي 2019

اختبار في مادة : الرياضيات **المدة : 04 سا و 30 د**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

I) 1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 10 .

2) استنتج باقي قسمة العدد A على 10 حيث : $A = 2019^{2018} - 2017^{1440}$.

3) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $3n \times 1439^n + 1037^{2n+1} \equiv (n-1)3^{2n+1}[10]$.

4) استنتج قيم العدد الطبيعي n حتى يكون : $3n \times 1439^n + 1037^{2n+1} \equiv 0[10]$.

II) 1) أحسب : $PGCD(225;180)$.

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $225x - 180y = 90$.

3) نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث : $a = \overline{52}^{\alpha} = \overline{44}^{\beta}$ ، $b = \overline{252}^{\alpha} = \overline{206}^{\beta}$

- عيّن α ، β ثم a و b .

التمرين الثاني : (05 نقاط)

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$(E)...\ \bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0$ ، $\bar{z}$ هو مرافق العدد المركب z .

أ) بيّن أنّ المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $(\bar{z}+1)(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$.

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب : $z_A = -1$ ، $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = \bar{z}_B$ ، $z_D = 3$.

أ) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا .

ب) عيّن طبيعة المثلث ABC .

3) أ) أكتب العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج أن النقطة A صورة D بتحويل نقطي يطلب تعيينه .

ب) أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD .

4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي لاحقتها z تحقق : $z + 1 = 2\sqrt{3}.k\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ حيث k يمسح المجال $[0;+\infty[$

- عين قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$ ، ثم استنتج مجموعة النقط (Γ) .

5) أ) عيّن قيمة العدد الحقيقي α بحيث يكون : $-\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} + \alpha\overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

ب) عيّن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left\|-\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} - 3\overrightarrow{DM}\right\| \leq 2\left\|\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\right\|$

ج) استنتج مجموعة نقط تقاطع (E) و (Γ) .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

كيس يحتوي على 5 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء ، كل الكرات متماثلة و لا نفرق بينها عند اللّمس

1) نسحب من الكيس 3 كرات عشوائيا و في آن واحد .

- أحسب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية :

A : " الكرات المسحوبة كلها حمراء " . B : " توجد كرة واحدة حمراء في السحب " .

C : " توجد على الأقل كرة واحدة بيضاء في السحب " . D : " الكرات المسحوبة من ألوان مختلفة " .

2) ننزع من الكيس الكرات البيضاء و نضع مكانها n كرة سوداء حيث : $(n \geq 2)$ ثمّ نسحب كرتين على التوالي دون إرجاع

- نفرض أنّ سحب كرة حمراء يساوي (-10) نقطة ، و سحب كرة سوداء يساوي $(+5)$ نقطة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق كل سحب كرتين مجموع النقط المحصل عليها .

أ) أكتب قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثمّ أحسب الأمل الرياضي و الانحراف المعياري .

ب) عيّن قيمة n حتى تكون اللعبة مربحة .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ مع $\|\vec{i}\|=2cm$

1) أ) تحقق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$.

ب) أثبت أنّ الدالة f فردية ، ثم أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها .

ج) استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ فإن : $1-\frac{2}{e^x+1}\leq\frac{1}{2}x$.

3) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-1+\frac{1}{2}x\right]$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا .

ب) استنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلته .

4) أرسم المستقيم (d) ذو المعادلة $y=1-\frac{1}{2}x$ و المستقيم (Δ) ، ثم أنشئ المنحنى (C_f) .

5) ليكن λ عددا حقيقيا موجبا تماما

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

ب) أحسب بالـ cm^2 مساحة الحيز المستوي $A(\lambda)$ المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (d) والمستقيمين ذو المعادلتين :

$x=0$ و $x=\lambda$ ، ثم أحسب $A(\lambda)$ لما λ يؤول إلى $+\infty$.

II) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأوّل $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=1-\frac{2}{e^{u_n}+1}$.

1) أثبت بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $u_n>0$

2) أ) تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}\leq\frac{1}{2}u_n$.

ب) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متناقصة . ماذا يمكن القول عن تقاربها ؟

3) بيّن أنّه من أجل $n\in\mathbb{N}$ فإنّ : $u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (05 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{\alpha} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{\alpha\, n} u_n \quad : n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ (α عدد حقيقي $\alpha \geq 2$)

1) برهن بالتراجع أنّ من اجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$: $u_n > 0$.

2) أ- برهن ان من اجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$: $n+1-\alpha n \leq 0$.

ب- استنتج ان المتتالية u_n متناقصة.هل u_n متقاربة. علل.

3) لتكن v_n المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $v_n = \dfrac{1}{\alpha n} u_n$

أ- برهن أن من اجل كل طبيعي n من $\mathbb{N}^*$: $v_n = \dfrac{1}{\alpha^{n+1}}$.

ب- أكتب u_n بدلالة n و α ثم برهن ان : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 0$.

4) نعتبر المتتالية s_n المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $s_n = u_1 + \dfrac{1}{2}u_2 + \dfrac{1}{3}u_3 + \ldots + \dfrac{1}{n}u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} u_k$.

أ- أكتب s_n بدلالة n و α .

ب- أوجد α علما ان : $\lim\limits_{n\to+\infty}(s_n) = \dfrac{1}{2018}$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء ، نعتبر النقط $A(1;-2;2)$ ، $B(1;0;1)$

و لتكن (s) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث : $(s): x^2+y^2+z^2+2x-4z=0$

1) برهن ان (s) سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

2) ليكن (P) المستوي الذي يعامد (AB) ويشمل النقطة $E(1;1;-1)$

أ- برهن ان معادلة المستوي (P) هي : $2y - z - 3 = 0$.

ب-برهن ان (P) يمس (s) في نقطة H يطلب تعيين احداثياتها.

3) ليكن (Q) المستوي الذي يمس (s) في النقطة B

أ- برهن ان معادلة المستوي (Q) من الشكل : $-2x + z + 1 = 0$.

ب- برهن ان (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب اعطاء تمثيل وسيطي له.

4) ليكن (Q_m) مستوي حيث : $(Q_m): -2x + z + m = 0$

أ- عين حسب قيم m طبيعة المجموعة $(s)\cap(Q_m)$.

ب- برهن ان (Q_0) يقطع (s) وفق دائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

1) ليكن العددان المركّبان z_1 و z_2 حيث : $z_1=\sqrt{2}(1-i)$ و $z_2=\dfrac{\sqrt{2}+\left(-1+\sqrt{2}\right)i}{1-z_1}$

أ - أكتب العدد z_1 على الشكل المثلّثي و الشكل الاسي و z_2 على الشكل الجبري.

2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر ، M و M' نقطتان لاحقتاهما z و z' على الترتيب ؛ نضع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$. نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M، النقطة M'

حيث : $\begin{cases} x'=\sqrt{2}(x+y+1) \\ y'=\sqrt{2}(-x+y+1)-1 \end{cases}$.

أ - بين أن العبارة المركبة للتحويل S هي من الشكل: $z'=\sqrt{2}(1-i)z+\sqrt{2}+i\sqrt{2}-i$.

ب - استنتج الطبيعة والعناصر المميّزة للتحويل S .

ج - Δ المستقيم ذو المعادلة $x+y+1=0$ ، أكتب معادلة لصورة المستقيم Δ بالتحويل S

3) أ - أكتب العبارة المركّبة للتحويل $S\circ S$. واستنتج طبيعته وعناصره المميزة.

ب - قارن بين العناصر المميّزة للتحويليين S و $S\circ S$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $g(x)=x^2+2x-ln(x+1)^2$

1) أدرس تغيرات الدالة g واستنتج إشارة $g(x)$.

II) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ حيث: $f(x)=\dfrac{x^2+x+2\ln|x+1|}{x+1}$.

(c_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

أ- عين العددين الحقيقيين $b;a$ بحيث يكون من أجل كل $x\neq-1$: $f(x)=ax+\dfrac{b\ln|x+1|}{x+1}$

ب- بين أنه من أجل كل $x\neq-1$: $f'(x)=\dfrac{g(x)+3}{(x+1)^2}$

ت-أدرس تغيرات الدالة f .

ث-بين أن (c_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) يطلب تعيينه. ثم أدرس وضعية (c_f) بالنسبة إلى (D).

III) أ- برهن على وجود مماسين $(T);(T')$ لـ (c_f) يوازيان (D) اكتب معادلتيهما.

ب- برهن أن النقطة $\Omega(-1;-1)$ مركز تناظر للمنحنى (c_f).

ت- أنشئ: (D) ،$(T);(T')$ ، (c_f) (الوحدة 2cm).

ث- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (c_f) والمستقيمات : $y=x$; $x=2$; $x=\dfrac{-2}{3}$

ج- ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقاط تقاطع المنحنى (c_f) والمستقيمات (D_m) التي معادلاتها $y=x+m$

 بالتوفيق