الاختبار الثاني في مادة الرياضيات

المستوى: ثالثة علوم تجريبية　　　　　　　　　　　　　　　　المدة: 3 ساعات ونصف

التمرين الأول: 5ن

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $\left(z-1-\sqrt{3}i\right)\left(z^2+2z+2\right)=0$

2- في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

النقط C,B,A لواحقها: $z_C=1+\sqrt{3}i$　　$z_A=-1+i$　　$z_B=\overline{z_A}$

أ- اكتب العددان المركبان: z_A,z_C على الشكل الأسي، استنتج الشكل الأسي لـ z_B.

ب- اكتب العدد المركب $\dfrac{z_C}{z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي.

ج- استنتج القيمة المضبوطة لـ : $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

3- عيّن النقط D لاحقة z_D بحيث يكون الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع.

4- عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد: $\left(\dfrac{z_C}{z_A}\right)^n\in\mathbb{R}$.

5- عيّن (E_1) و (E_2) مجموعتي النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث:

$$(E_1):\left|z+1-i\right|=\left|\overline{z}+1-i\right|$$

$$(E_2):Arg(z)=Arg\left(\overline{z}\right)+\pi+2k\pi\qquad(k\in\mathbb{Z})$$

التمرين الثاني: 4ن

1- لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي: $u_0=e^2$ و $u_n=\sqrt{\dfrac{u_{n-1}}{e}}$.

أ- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $u_n\succ\dfrac{1}{e}$.

ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)، ثم استنتج أنها متقاربة .

2- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\dfrac{1}{2}\ln(u_n)+\dfrac{1}{2}$.

أ- بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل .

ب- أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n.

جـ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=v_0-v_1-\dots-v_n$

د- احسب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n=u_0\times u_1\times\dots\times u_n$، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$

التمرين الثالث: 4ن

I)- يحتوي كيس U_1 على 9 كريات لا نفرق بينها باللمس 4 كريات بيضاء و 3 كريات سوداء وكرتان حمروتان ونسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الكيس U_1 وليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق كل سحبة بالعدد $2n-1$ حيث n عدد الكرات البيضاء المتبقية في الكيس U_1 .

- عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب امله الرياضياتي $E(X)$.

II)– يحتوي كيس U_2 على 10 كريات لا نفرق بينها باللمس 7 كريات بيضاء و 3 كريات سوداء.

نسحب عشوائيا كريّة من الكيس U_2 ثم نضعها في الكيس U_1 بعد تسجيل لونها ثم نسحب كرية من الكيس U_1.

1- احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_1 حمراء.

2- احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_2 بيضاء.

التمـرين الرابع: 7ن

f الدالة المعرفة على $R-\{1\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x}{x-1}-\ln|x-1|$

(C_f) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x)$; $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)$ ثم فسر النهايتين الأخيرتين هندسيا.

2- أ- بيّن أن الدالة f قابلة للاشتقاق على مجالي تعريفها، ثم بيّن أن: $f'(x)=\dfrac{-x}{(x-1)^2}$

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3- أ- بيّن أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]4;5[$

ب- بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين احداثيتيها.

4- اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (Δ) و (Δ') معامل توجيه كل منهما -2 واكتب معادلتيهما.

5- احسب $f(6)$, $f(-1)$, $f(-4)$, $f(-6)$ ثم ارسم المماسين (Δ) و (Δ') و المنحنى (C_f).

6- ناقش بيانيا،حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $m(x-1)=2x^2-x-(x-1)\ln|x-1|$

7- نعتبر الدالة h والمعرفة على $R-\{-1;1\}$ كما يلي: $h(x)=f(|x|)$

أ- احسب $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\dfrac{h(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{h(x)}{x}$ ماذا تستنتج بالنسبة للدالة h ؟ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب- بيّن أن الدالة h زوجية ثم ارسم (C_h) المنحنى الدالة h في نفس المعلم السابق.

8- نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=e^{-x}\ln\left(e^x-1\right)$

أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما فإن: $g'(x)=e^{-x}f\left(e^x\right)$ ،ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g .

ب- احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)$ وبيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة g.

انتهى بالتوفيق للجميع

ثانوية عمي سعيد- غرداية-   موسم: 2019-2018

الحل النموذجي الاختبار الثاني
في مادة الرياضيات

ثالثة علوم تجريبية

التمرين الأول: 5ن

حل المعادلة: $\left(z-1-\sqrt{3}i\right)\left(z^2+2z+2\right)=0$

يكافئ $z^2+2z+2=0$ أو $z-1-\sqrt{3}i=0$

ومنه $\Delta=i^2 4$ ومنه $z_1=-1+i$ $z_2=-1-i$ أو $z=1+\sqrt{3}i$

1- في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

$z_B=\overline{z_A}$ $\qquad z_A=-1+i$ $\qquad z_C=1+\sqrt{3}i$

أ-كتابة: z_A, z_C على الشكل الأسي، استنتج الشكل الأسي ل z_B.

$z_c=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $Arg\left(z_c\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi,(k\in\mathbb{Z});\left|z_c\right|=2$

$z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ومنه $Arg\left(z_A\right)=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,(k\in\mathbb{Z});\left|z_A\right|=\sqrt{2}$

لدينا $z_B=\overline{z_A}=\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

ب- كتابة $\frac{z_C}{z_A}$ على الشكل الجبري $\frac{z_C}{z_A}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}-i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

الشكل الأسي لـ $\frac{z_C}{z_A}$ هو: $\frac{z_C}{z_A}=\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$ لأن:

$$Arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right)=\arg\left(z_C\right)-\arg\left(z_A\right)=\frac{5\pi}{12}+2k\pi;\left|\frac{z_C}{z_A}\right|=\sqrt{2}$$

ج- استنتج القيمة المضبوطة لـ: $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

$$\frac{z_C}{z_A}=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]$$

$$=\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)-i\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

لدينا $\frac{z_C}{z_A}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}-i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ومنه

$$\begin{cases}\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\\-\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$ ومنه $$\begin{cases}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\end{cases}$$

2- تعيين النقط D لاحقة z_D بحيث يكون الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع.

يكافئ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ ومنه $z_D=z_C-z_A+z_B=1+i\left(\sqrt{3}-2\right)$

3- عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد: $\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n\in\mathbb{R}$.

ومنه $\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n=\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}\right)^n=\sqrt{2}^n e^{-i\frac{5n\pi}{12}}$

$$\sqrt{2}^n e^{-i\frac{5n\pi}{12}}=\sqrt{2}^n\left[\cos\left(\frac{5n\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5n\pi}{12}\right)\right]$$

$\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n\in\mathbb{R}$ يكافئ $\sin\left(\frac{5n\pi}{12}\right)=0$ ومنه $n=12k'$ حيث $(k'\in\mathbb{N})$

4- تعيين $\left(E_1\right)$ مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث:

$\left|z-(-1+i)\right|=\left|\bar{z}-(-1+i)\right|$ يكافئ $\left|z+1-i\right|=\left|\bar{z}+1-i\right|$

$\left|z-z_A\right|=\left|\overline{z-z_A}\right|$ ومنه $\left|z-z_A\right|=\left|z-\overline{z_A}\right|$ ومنه $\left|z-z_A\right|=\left|z-z_B\right|$

يكافئ: $AM=BM$

ومنه $\left(E_1\right)$ مجموعة النقط: محور القطعة $[AB]$

$Arg\left(z\right)=Arg\left(\bar{z}\right)+\pi+2k\pi$ يكافئ $Arg\left(z\right)=-Arg\left(Z\right)+\pi+2k\pi$

ومنه $2Arg\left(z\right)=\pi+2k\pi$ ومنه $Arg\left(z\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

ومنه $\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

ومنه $\left(E_2\right)$ مجموعة النقط: محور التراتيب ما عدا المبدأ.

التمرين الثاني: 4ن

1- $\left(u_n\right)$ المعرفة على N كما يلي: $\begin{cases}u_0=e^2\\u_n=\sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}u_0=e^2\\u_{n+1}=\sqrt{\frac{u_n}{e}}\end{cases}$

أ- البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ: $u_n\succ\frac{1}{e}$

من أجل $n=0$ $\qquad u_0=e^2$ ومنه $u_0\succ\frac{1}{e}$ ومنه محققة

نفرض صحة الخاصية $P\left(n\right)$ أي $u_n\succ\frac{1}{e}$

نبرهن صحة الخاصية من أجل $P\left(n+1\right)$ أي $u_{n+1}\succ\frac{1}{e}$

لدينا من الفرضية $u_n\succ\frac{1}{e}$ ومنه $\frac{u_n}{e}\succ\frac{1}{e^2}$ ومنه $\sqrt{\frac{u_n}{e}}\succ\sqrt{\frac{1}{e^2}}$

إذا $u_{n+1}\succ\frac{1}{e}$

ومنه حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإن من أجل $n\in N$ $\qquad u_n\succ\frac{1}{e}$

ب- دراسة اتجاه تغير المتتالية $\left(u_n\right)$:

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{\frac{u_n}{e}}-u_n=\frac{\left(\sqrt{\frac{u_n}{e}}\right)^2-u_n^2}{\sqrt{\frac{u_n}{e}}+u_n}=\frac{\frac{u_n-eu_n^2}{e}}{\sqrt{\frac{u_n}{e}}+u_n}=\frac{\frac{u_n(1-eu_n)}{e}}{\sqrt{\frac{u_n}{e}}+u_n}$$

لدينا $u_n\succ\frac{1}{e}$ ومنه $1-eu_n\prec0$ إذا $u_{n+1}-u_n\prec0$

ومنه المتتالية $\left(u_n\right)$ متناقصة تماما على N

بما أن $\left(u_n\right)$ متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد $\frac{1}{e}$ فإنها متقاربة.

2- (v_n) متتالية معرفة على N بـ : $v_n=\frac{1}{2}\ln(u_n)+\frac{1}{2}$.

أ- بيان أنّ المتتالية (v_n) هندسيةثم تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

$$v_{n+1}=\frac12\ln(u_{n+1})+\frac12=\frac12\ln\left(\sqrt{\frac{u_n}{e}}\right)+\frac12=\frac12\ln\left(\frac{u_n}{e}\right)^{\frac12}+\frac12$$

$$\frac12\ln\left(\frac{u_n}{e}\right)^{\frac12}+\frac12=\frac14(\ln u_n-\ln e)+\frac12=\frac14(\ln u_n-1)+\frac12$$

$$=\frac14\ln u_n-\frac14+\frac12=\frac12\left(\frac12\ln(u_n)+\frac12\right)=\frac12 v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac12$ وحدها الاول $v_0=\frac32$

ب- كتابة v_n و u_n بدلالة n. $v_n=v_0\times q^n=\frac32\left(\frac12\right)^n$

لدينا $v_n=\frac12\ln(u_n)+\frac12$ ومنه $2v_n-1=\ln(u_n)$ ومنه $e^{2v_n-1}=e^{\ln(u_n)}$

ومنه $u_n=e^{2v_n-1}=e^{2\left(\frac32\times\left(\frac12\right)^n\right)-1}$ إذا: $u_n=e^{3\times\left(\frac12\right)^n-1}$

جـ- حساب بدلالة n المجموع S_n

$$S_n=v_0-v_1-...-v_n=v_0-(v_1+...+v_n)$$

$$=\frac32-\left[v_1\left(\frac{1-\left(\frac12\right)^n}{1-\frac12}\right)\right]=\frac32-\left[\frac34\left(1-\left(\frac12\right)^n\right)\right]$$

د- احسب بدلالة n الجداء P_n حيث:

لدينا $P_n=u_0\times u_1\times...\times u_n$ ، $u_n=e^{2v_n-1}$

$$P_n=u_0\times u_1\times...\times u_n=e^{2v_0-1}\times e^{2v_1-1}\times...\times e^{2v_n-1}$$

ومنه

$$=e^{2v_0-1+2v_1-1+...+2v_n-1}=e^{(-1)(n+1)+2(v_0+v_1+...+v_n)}$$

$$=e^{-(n+1)+2\left[3\left(1-\left(\frac12\right)^{n+1}\right)\right]}$$

$\lim_{n\to+\infty}P_n=e^{-(n+1)+2\left[3\left(1-\left(\frac12\right)^{n+1}\right)\right]}=0$ لأن $-1\prec q\prec1$

التمرين الثالث:3ن

$I)$ – تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X=2n-1$ ومنه $\{1;3;5;7\}$

n عدد الكرات البيضاء المتبقية في الكيس U_1

x	1	3	5	7
$P(X=x)$	$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$

الامل الرياضياتي: $E(X)=\frac{196}{84}$

$II)$ – 1- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_1 حمراء هو $\frac15$

2- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_2 بيضاء هو $\frac17$

التمرين الرابع:8ن

f الدالة المعرفة على $R-\{1\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{x}{x-1}-\ln|x-1|$

1- حساب النهايات

$$\lim_{x\xrightarrow{<}1}f(x)=-\infty \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty; \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\left(\frac{1}{x-1}\right)\left(1-(x-1)\ln(x-1)\right)=+\infty; \quad \lim_{x\xrightarrow{>}0}x\ln x=0$$

المنحنى يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=1$

2- أ- بما أن الدالة معرفة على مجالي تعريفها فإنها قابلة للإشتقاق

$$f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}=\frac{-x}{(x-1)^2}$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0 −	‖	−

ومنه الدالة f متناقصة تماما على $]1;+\infty[$, $]0;1[$ ومزيدة تماما على $]-\infty;0]$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0 −	‖	−
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘ $-\infty$

3-أ- بيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]4;5[$

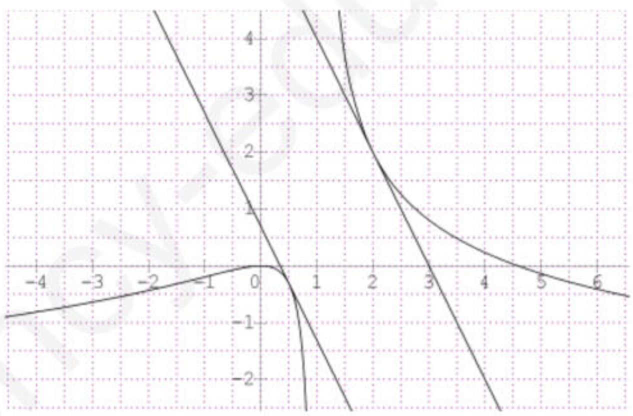
الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على $]4;5[$ و $f(5)=-0,14$ $\quad f(4)=0,2$

ومنه $f(4)\times f(5)\prec0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]4;5[$

4-إيجاد المماسين معامل توجيهها 2- يكافئ $f'(x)=-2$ ومنه $x_1=2,x_2=\frac12$

$(\Delta'):y=-2x+\ln2 \qquad (\Delta):y=-2x+6$

انشاء المنحنى (C_f) والمماسين (Δ) و (Δ')



6-المناقشة البيانية: $m(x-1)=2x^2-x-(x-1)\ln|x-1|$

$$m=\frac{2x^2-x\underline{-x+x}}{(x-1)}-\ln|x-1|$$

$$=\frac{2x^2-2x}{(x-1)}+\frac{x}{x-1}-\ln|x-1|$$

ومنه

$$=\frac{2x(x-1)}{(x-1)}+\frac{x}{x-1}-\ln|x-1|$$

$$=2x+\frac{x}{x-1}-\ln|x-1|$$

ومنه $-2x+m=\frac{x}{x-1}-\ln|x-1|$

$$-2x+m=f(x)$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم $y=-2x+m$

$m\in]-\infty;\ln 2[$ تقبل حلين مختلفين.

$m=\ln 2$ تقبل حل مضاعف

$m\in]\ln 2;6[$ لا تقبل حلول.

$m=6$ تقبل حل مضاعف

$m\in]6;+\infty[$ تقبل حلين مختلفين.

1- نعتبر الدالة h والمعرفة على $R-\{-1;1\}$ كما يلي: $h(x)=f(|x|)$

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & x\geq 0\\ f(-x) & x\prec 0\end{cases}$$

أ- $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=h'(0)$ ومنه $h'(0)=f'(0)=0$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=h'(0)$ ومنه $h'(0)=f'(0)=0$

نستنتج أن الدالة h تقبل الاشتقاق عند 0 وتقبل مماس افقي.

ب-دراسة الشفعية: لدينا D_h متناظرة بالنسبة بالمبدأ.

$$h(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=h(x)$$

ومنه دالة h زوجية.

8- نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=e^{-x}\ln(e^x-1)$

أ-بيان أن $g'(x)=e^{-x}f(e^x)$

$$g'(x)=-e^{-x}\ln(e^x-1)+\frac{e^x}{e^x-1}\times e^{-x}$$

$$=e^{-x}\left(\frac{e^x}{e^x-1}-\ln(e^x-1)\right)$$

$$=e^{-x}f(e^x)$$

دراسة إشارة $e^{-x}f(e^x)$

لدينا $e^{-x}\succ 0$ نضع $k(x)=f(e^x)$

الدالة k عبارة عن مركب دالتين $f(x)$ والاسية

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	
e^x	$+$		
$k'(x)$	$-$		
$k(x)$	$+\infty$ ↘		$-\infty$

ومنه نقطة تقاطع مع حور الفواصل $k(x)=0$

$f(e^x)=0$ يكافئ $e^x=\alpha$ ومنه $x=\ln\alpha$

جدول الإشارة لـ $k(x)$

x	0	$\ln\alpha$	$+\infty$
$k(x)$	$+$	$-$	

ومنه الدالة g متزايدة تماما $]-\infty;\ln\alpha]$ ومتناقصة تماما $[\ln\alpha;+\infty[$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}g(x)=-\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$

جدول التغيرات

x	0	$\ln\alpha$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$-$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$g(\alpha)$	↘ 0