التمرين1: (05 نقاط)

-1 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2-10z+29=0$

-2 A ، B و C نقط من المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$ لاحقتاها على الترتيب: $z_A = 3$ ، $z_B = 5 - 2i$ و $z_C = 5+2i$

أ- علم النقط A ، B و C

ب- أكتب العدد $\frac{z_C-z_B}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري. استنتج أن ABC مثلث قائم و متساوي الساقين.

ج- استنتج أن C صورة B بدوران R مركزه A، عين زاويته.

-3 أ- عين وأنشئ (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $\frac{z-3}{z-5+2i}$ عدد حقيقي سالب تماماً.

ب – عين وأنشئ (Δ') صورة (Δ) بالدوران R

-4 لتكن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $arg\left[\left(\frac{z_C-z}{z_B-z}\right)^2\right] = \pi + 2k\pi$ مع k عدد صحيح

أ- تحقق أن A تنتمي إلى (Γ)

ب – عين وأنشئ (Γ)

التمرين2: (04 نقاط)

لدى لاعب زهرة نرد ذات ستة أوجه متجانسة مرقمة من 1 إلى 6 و ثلاثة صناديق U_1، U_2 و U_3 يحتوي كل منها k كرة، k عدد طبيعي أكبر أو يساوي 3.

توجد 3 كرات سوداء في U_3، كرتين سوداوين في U_2 و كرة سوداء وحيدة في U_1 وكل الكرات المتبقية في الصناديق بيضاء. كل الكرات غير معروفة عند اللمس.

تجري اللعبة بالطريقة التالية: يرمي اللاعب زهرة النرد.

- إذا كان الرقم المحصل عليه 1، يسحب عشوائيا كرة من U_1، يكتب لونها ثم يعيدها للصندوق U_1.
- إذا كان الرقم المحصل عليه مضاعف لـ 3، يسحب عشوائيا كرة من U_2، يكتب لونها ثم يعيدها للصندوق U_2.
- إذا كان الرقم المحصل عليه ليس1 وليس مضاعفا لـ 3، يسحب عشوائيا كرة من U_3، يكتب لونها ثم يعيدها لـ U_3

نرمز بـ A، B، C و N للحوادث التالية:

A : "ظهور الرقم 1 في زهرة النرد " B : "ظهور مضاعف للعدد 3 في زهرة النرد "

C : "ظهور رقم ليس1 و ليس مضاعفا للعدد3 في زهرة النرد " N : " الكرة المسحوبة سوداء "

نذكر أن: $p_A(B)$ هو احتمال الحصول على B علما أن A محققة مع $p(A) \neq 0$.

-1 يجري اللاعب لعبة.

أ - بين أن احتمال أن يحصل على كرة سوداء هو $\frac{7}{3k}$

ب - أحسب احتمال أن يظهر الرقم 1 في زهرة النرد علما أن الكرة المسحوبة سوداء.

ج - عين k حتى يكون احتمال الحصول على كرة سوداء أكبر من $\frac{1}{2}$

د - عين k حتى يكون احتمال الحصول على كرة سوداء يساوي $\frac{1}{30}$

-2 في هذا السؤال، k يساوي القيمة المحصل عليها لما يكون احتمال الحصول على كرة سوداء يساوي$\frac{1}{30}$. يقوم اللاعب بـ 20 لعبة، مستقلة مثنى مثنى. أحسب، على شكل مضبوط ثم قيمة مقربة بتقريب 10^{-3}، احتمال أن يحصل على الأقل مرة على كرة سوداء

أقلب الصفحة

التمرين3: (04 نقاط)

$A(2;0;1)$، $B(3;1;2)$، $C(4;1;-2)$، $D(5;-6;1)$ نقط من الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

1. أ - بين أن النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة.

ب - عين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

ج - بين أن المثلث ABC مثلث قائم و أحسب مساحته.

2. (P) مستوي معادلته : $4x-5y+z-9=0$

أ - أحسب المسافة بين D و المستوي (P)

ب - أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

3. أ - عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار بالنقطة D و العمودي على المستوي (P)

ب - عين إحداثيات H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P)

ج - أستنتج المسافة بين A و المستقيم (Δ)

4. (S) سطح كرة مركزه D و يقطع (P) حسب دائرة مركزها H و تشمل A.

عين نصف قطر (S) ثم أكتب معادلة لسطح الكرة (S)

التمرين4: (07 نقاط)

الجزء I : نعتبر الدالة f المعرفة على $]0\ ;\ +\infty[$ بـ: $f(x)=x+e^{-x}$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. أ – أحسب نهاية f عند $+\infty$

ب – بين أن (C_f) له مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته.

ج – أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

2. أدرس اتجاه تغيرات f على $]0\ ;\ +\infty[$ وانجز جدول تغيراتها

3. أنشئ (Δ) و (C_f)

الجزء II : (u_n) متتالية حدودها موجبة، معرفة بـ: $u_1=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1}=f(u_n)$

1. أ - أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]0\ ;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-ln(1+x)$

ب - استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x ، $ln(x+1)\leq x$

ج - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $ln(n+1)\leq lnn+\frac{1}{n}$

2. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f(lnn)=lnn+\frac{1}{n}$

3. أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $ln\ n\leq u_n$

ب - استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$

4. فيما تبقى من التمرين ، نتقبل أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 2$ ، $u_n\leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$

أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $k\geq 2$ ، $\frac{1}{k}\leq\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx$

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 2$: $u_n\leq 1+ln(n-1)$

ج - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 2$: $ln\ n\leq u_n\leq 1+ln(n-1)$

د - برهن أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 2}$ المعرفة بـ $v_n=\frac{u_n}{ln\ n}$ متقاربة وتقارب 1

انتهى الموضوع

التمرين1: (05 نقاط)

-1 حلول المعادلة : $z^2+10z+29=0$: 0,50

$\Delta=100-116=-16=(4i)^2$ $z_1=5+2i$ ، $z_2=5-2i$

مجموعة الحلول: $S=\{5+2i;5-2i\}$

-2 $z_A=3$ ، $z_B=5-2i$ و $z_C=5+2i$

أ - تعليم النقط A ، B و C: 0,25

ب - كتابة العدد $\frac{z_C-z_B}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري : 0,50

$$\frac{z_C-z_B}{z_B-z_A}=\frac{5+2i-5+2i}{5-2i-3}=\frac{4i}{2-2i}=\frac{2i}{1-i}=\frac{2i(1+i)}{2}=-1+i$$

- استنتاج أن ABC مثلث قائم و متساوي الساقين: 0,50

لدينا: $\frac{z_C-z_B}{z_B-z_A}=-1+i \Leftrightarrow \frac{z_C-z_B}{z_B-z_A}+1=i \Leftrightarrow \frac{z_C-z_B+z_B-z_A}{z_B-z_A}=i \Leftrightarrow \frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} AC=AB \\ (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2} \end{cases}$

ومنه ABC مثلث قائم و متساوي الساقين في A .

ج - استنتاج أن C صورة B بدوران R مركزه A، عين زاويته: 0,50

لدينا: $\begin{cases} AC=AB \\ (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$ C صورة B بدوران R مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ أي $R(B)=C$

-3 أ - تعيين وأنشاء (Δ) : .... 0,25+0,50

$M\epsilon(\Delta)$ $\frac{z-3}{z-5+2i}$ عدد حقيقي سالب تماماً $\Leftrightarrow \frac{z-3}{z-5+2i}=k$ مع k عدد حقيقي سلب تماما

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z_M-z_A}{z_M-z_B}=k \\ k<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_M-z_A=k(z_M-z_B) \\ k<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{BM} \\ k<0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BM}$ لهما نفس المنحى واتجاهين متعاكسين

(Δ) هي القطعة $]AB[$ أي $\Delta=]AB[$ (القطعة $[AB]-\{A;B\}$

ب - تعيين وأنشاء (Δ'): .... 0,25+0,50

$R(\Delta)=(\Delta') \Leftrightarrow (\Delta')=]AC[$ لأن $R(A)=A$ و $R(B)=C$

-4 أ- تحقق أن A تنتمي الى (Γ) : 0,50

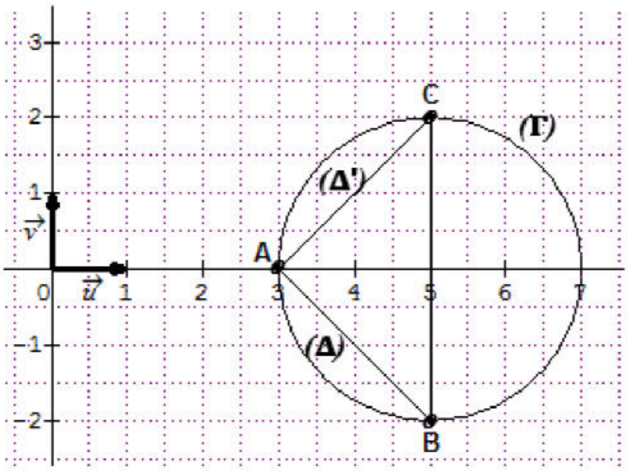
$$A\in(\Gamma) \Leftrightarrow arg\left[\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)^2\right]=arg\left[\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2\right]=arg(e^{i\pi})=\pi+2k\pi$$

ب - تعيين وأنشاء (Γ): .... 0,25+0,50

$M(z)\in(\Gamma) \Leftrightarrow arg\left[\left(\frac{z_C-z}{z_B-z}\right)^2\right]=\pi+2k\pi$ مع k عدد صحيح $\Leftrightarrow 2arg\left(\frac{z_C-z_M}{z_B-z_M}\right)=\pi+2k\pi$

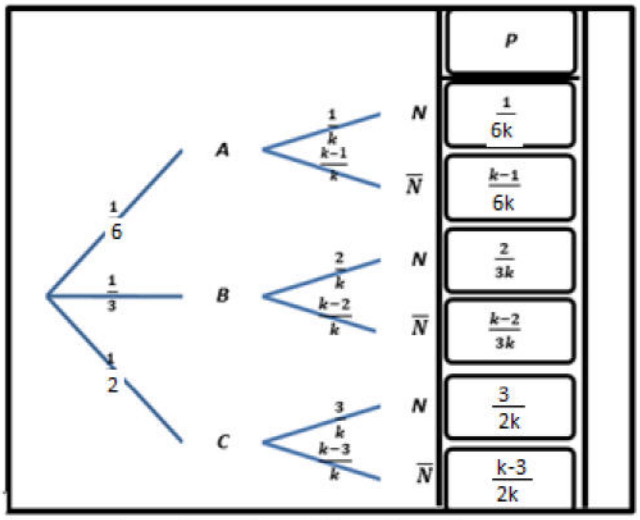
$\Leftrightarrow arg\left(\frac{z_C-z_M}{z_B-z_M}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow (\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MC})=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{MC} \\ M\neq B \text{ و } M\neq C \end{cases}$

(Γ) : الدائر التي قطرها $[CB]$ ماعدا B و ماعدا C



التمرين2: (04 نقاط)

الشجرة: 01



-1 أ - تبيان أن احتمال أن يحصل على كرة سوداء هو $\frac{7}{3k}$: $p(N)=\frac{1}{6k}+\frac{2}{3k}+\frac{3}{2k}=\frac{14}{6k}=\frac{7}{3k}$ 0,50

ب - حساب احتمال أن يظهر الرقم 1 في زهرة النرد علما أن الكرة المسحوبة سوداء: $p_N(A)=\frac{p(A\cap N)}{p(N)}=\frac{\left(\frac{1}{6k}\right)}{\left(\frac{7}{3k}\right)}=\frac{1}{14}$ 0,50

ج - تعيين k حتى يكون احتمال الحصول على كرة سوداء أكبر من $\frac{1}{2}$: 0,50

$p(N)\geq\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{7}{3k}\geq\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3\leq k\leq\frac{14}{3} \Leftrightarrow$ $k=3$ أو $k=4$

د - تعيين k حتى يكون احتمال الحصول على كرة سوداء يساوي $\frac{1}{30}$: 0,50

$p(N)=\frac{1}{30} \Leftrightarrow \frac{7}{3k}=\frac{1}{30} \Leftrightarrow k=70$

-2 في هذا السؤال، $k=70$ يقوم اللاعب بـ 20 لعبة، مستقلة مثنى مثنى.

حساب، على شكل مضبوط ثم قيمة مقربة بتقريب 10^{-3}، احتمال أن يحصل على الأقل مرة على كرة سوداء: 01

ليكن X عدد المرات التي يحصل فيها اللاعب على كرة سوداء خلال 20 لعبة.

X يتبع قانون ثنائي الحد ذو الوسيطين $n=20$ و $p=p(N)=\frac{1}{30}$

$$p(X\geq 1)=1-p(X=0)=1-\left(1-\frac{1}{30}\right)^{20}\cong 0,492$$

التمرين3: (04 نقاط)

$A(2;0;1)$، $B(3;1;2)$، $C(4;1;-2)$، $D(5;-6;1)$

.1 أ - تبيان أن النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة: 0,50

$\overrightarrow{AB}(1;1;1)$ ، $\overrightarrow{AC}(2;1;-3)$

لدينا: $\frac{1}{2}\neq\frac{1}{1}$ ⇐ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ⇔ A ، B ، C ليست على استقامة واحدة

ب - معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) : 0,50

$\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) مع $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ ⇔ $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a+b+c=0\\ 2a+b-3c=0\end{cases}$

بالطرح نجد: $-a+4c=0 \Leftrightarrow a=4c$ وبالتعويض نجد: $5c+b=0 \Leftrightarrow b=-5c$

بوضع $c=1$ نجد: $a=4$ و $b=-5$

ومنه $\vec{n}(4;-5;1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(ABC) \Leftrightarrow (ABC): 4x-5y+z+d=0$

لدينا: $A\in(ABC) \Leftrightarrow 4(2)-5(0)+(1)+d=0 \Leftrightarrow d=-9$

وبالتالي $(ABC): 4x-5y+z-9=0$

ج - تبيان أن المثلث ABC مثلث قائم و حساب مساحته: .... 0,50+0,50

لدينا: $AB=\sqrt{3}$ ، $AC=\sqrt{14}$ ، $BC=\sqrt{17}$

$AB^2+AC^2=3+14=17=BC^2 \Leftrightarrow$ ABC مثلث قائم في A (حسب مبرهنة فيثاغورس)

$$S_{ABC}=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{\sqrt{42}}{2}u.a.$$

.2 $(P)=(ABC): 4x-5y+z-9=0$

أ - **حساب المسافة بين D و المستوى (P)** : 0,25

$$d(D;(P))=\frac{|4(5)-5(-6)+(1)-9|}{\sqrt{4^2+(-5)^2+1^2}}=\frac{42}{\sqrt{42}}=\sqrt{42}$$

ب - **حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$** : 0,25

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}\times S_{ABC}\times d\big(D;(P)\big)=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{42}}{2}\times\sqrt{42}=7\ u.v.$$

.3 أ - **تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ)**: 0,50

$(\Delta)\perp(P) \Leftrightarrow \vec{n}(4;-5;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) هو شعاع توجيه لـ (Δ)

$$(\Delta):\begin{cases}x=4t+5\\ y=-5t-6\\ z=t+1\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

ب - **إحداثيات H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P)** : 0,50

H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P) هي نقطة تقاطع (Δ) و (P)، إحداثياتها هي حلول الجملة:

$$\begin{cases}x=4t+5\\ y=-5t-6\\ z=t+1\\ 4x-5y+z-9=0\end{cases}$$

بالتعويض نجد: $4(4t+5)-5(-5t-6)+(t+1)-9=0 \Leftrightarrow 42t=-42 \Leftrightarrow t=-1$ ومنه $H(1;-1;0)$

ج - **استنتاج المسافة بين A و المستقيم (Δ)** : 0,25

$$d\big(A;(\Delta)\big)=AH=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$

.4 (S) سطح كرة مركزه D و يقطع (P) حسب دائرة مركزها H و تشمل A.

تعيين نصف قطر (S) و معادلة لسطح الكرة (S): .... 0,25+0,25

نصف قطر (S) هو $DA=3\sqrt{5}$ و $(S); (x-5)^2+(y+6)^2+(z-1)^2=45$

التمرين5: (07 نقاط)

الجزء I : نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+e^{-x}$

.1 أ – **حساب نهاية f عند $+\infty$**: $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$ 0,25

أ – **تبيان أن (C_f) له مستقيم مقارب مائل (Δ)** : 0,50

$\lim\limits_{+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{+\infty}e^{-x}=0 \Leftrightarrow (C_f)$ له مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلة له $y=x$

أ – **وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ)**: 0,25

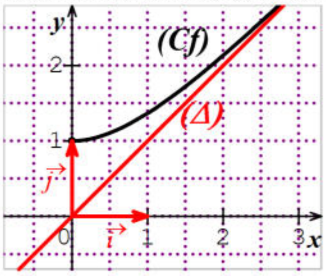
لدينا: $f(x)-x=e^{-x}>0 \Leftrightarrow (C_f)$ يقع فوق (Δ)

.2 **اتجاه تغير f على $[0;+\infty[$** : 0,50

لدينا: $0 \le f'(x)=1-e^{-x}$; $\forall x\in[0;+\infty[\Leftrightarrow f$ متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

جدول تغيرات f: $f(0)=1$ 0,25

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0 +	
$f(x)$	1 ↗	$+\infty$



.3 **انشاء (Δ) و (C_f)**: .... 0,50+0,50

الجزء II : (u_n) متتالية حدودها موجبة، معرفة بـ: $u_1=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1}=f(u_n)$

.1 g دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-\ln(1+x)$

أ - **اتجاه تغير الدالة g** : 0,50

لدينا: $0 \le \frac{x}{x+1}=\frac{1}{x+1}-1=g'(x)$; $\forall x\in[0;+\infty[\Leftrightarrow g$ متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

ب - **استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x ، $\ln(x+1)\le x$** : 0,25

لدينا: $x\ge 0 \Leftrightarrow g(x)\ge g(0) \Leftrightarrow x-\ln(x+1)\ge 0 \Leftrightarrow \ln(x+1)\le x$

ج - **استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\ln(n+1)\le \ln n+\frac{1}{n}$** : 0,50

لدينا: $\frac{1}{n}\ge \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n$; $\forall n\in\mathbb{N}^* \Leftrightarrow \ln(n+1)\le\ln n+\frac{1}{n}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

2. البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f(\ln n) = \ln n + \frac{1}{n}$ 0,50

$$f(\ln n) = \ln n + e^{-\ln n} = \ln n + \frac{1}{e^{\ln n}} = \ln n + \frac{1}{n}$$

3. أ - البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\ln n \le u_n$: 0,50

- نتحقق من أنها صحيحة من أجل $n = 0$

لدينا: $u_1 = 0$ و $\ln 1 = 0$ (صحيحة)

- نفرض أنها صحيحة من أجل n أي $\ln n \le u_n$
- نبرهن أنها صحيحة من أجل $n+1$ أي $\ln(n+1) \le u_{n+1}$

لدينا: $\begin{cases} \ln(n+1) \le \ln n + \frac{1}{n} \\ \ln n \le u_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \ln(n+1) \le f(\ln n) \\ f(\ln n) \le f(u_n) \end{cases}$ (لأن f متزايدة تماما على $]0\,;+\infty[$)

$\Longrightarrow \ln(n+1) \le f(u_n)$ أي $\ln(n+1) \le u_{n+1}$ (صحيحة)

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\ln n \le u_n$

ب - استنتاج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\ge 1}$: 0,25

لدينا: $\begin{cases} \forall n > 0;\ u_n \ge \ln n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \ln n = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

4. فيما تبقى من التمرين ، نتقبل أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 2$ ، $u_n \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$

أ- البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي $k \ge 2$ ، $\frac{1}{k} \le \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}dx$: 0,50

لدينا: $\forall k \ge 2;\ k-1 \le x \le k \Leftrightarrow \forall k \ge 2;\ \frac{1}{k} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{k-1} \Longrightarrow \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}dx \le \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}dx \le \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k-1}dx$

$\Leftrightarrow \frac{1}{k}\big(k-(k-1)\big) \le \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}dx \le \frac{1}{k-1}\big(k-(k-1)\big)$ ومنه $\forall k \ge 2;\ \frac{1}{k} \le \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}dx$

ب- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 2$: $u_n \le 1 + \ln(n-1)$: 0,50

لدينا: $\begin{cases} \frac{1}{2} \le \int_{1}^{2} \frac{1}{x}dx \\ \frac{1}{3} \le \int_{2}^{3} \frac{1}{x}dx \\ \frac{1}{4} \le \int_{3}^{4} \frac{1}{x}dx \\ \quad\cdots \\ \frac{1}{n-1} \le \int_{n-2}^{n-1} \frac{1}{x}dx \end{cases}$

بالجمع نجد: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} \le \int_{1}^{n-1} \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} \le 1 + \int_{1}^{n-1} \frac{1}{x}dx$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} \le 1 + [\ln x]_1^{n-1} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} \le 1 + \ln(n-1)$

لدينا: $\forall n \ge 2;\ \begin{cases} u_n \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} \le 1 + \ln(n-1) \end{cases} \Longrightarrow \forall n \ge 2;\ u_n \le 1 + \ln(n-1)$

ج - البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 2$: $\ln n \le u_n \le 1 + \ln(n-1)$: 0,25

من السؤالين 3أ) و 4أ) نستنتج أنه : من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 2$: $\ln n \le u_n \le 1 + \ln(n-1)$

د - البرهان أن المتتالية $(v_n)_{n\ge 2}$ المعرفة بـ $v_n = \frac{u_n}{\ln n}$ متقاربة وتقارب 1 : 0,50

لدينا: $\forall n \ge 2;\ \ln n \le u_n \le 1 + \ln(n-1) \Leftrightarrow \forall n \ge 2;\ 1 \le \frac{u_n}{\ln n} \le \frac{1}{\ln n} + \frac{\ln(n-1)}{\ln n}$

$\Leftrightarrow \forall n \ge 2;\ 1 \le v_n \le \frac{1}{\ln n} + \frac{\ln\left[n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]}{\ln n} \Leftrightarrow \forall n \ge 2;\ 1 \le v_n \le \frac{1}{\ln n} + \frac{\ln n + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln n}$

$\Leftrightarrow \forall n \ge 2;\ 1 \le v_n \le \frac{1}{\ln n} + 1 + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln n}$

لدينا: $\begin{cases} \forall n \ge 2;\ 1 \le v_n \le \frac{1}{\ln n} + 1 + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \\ \lim\limits_{+\infty} 1 = 1 \\ \lim\limits_{+\infty} \left(\frac{1}{\ln n} + 1 + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{+\infty} v_n = 1$

$\Leftrightarrow$ المتتالية $(v_n)_{n\ge 2}$ المعرفة بـ $v_n = \frac{u_n}{\ln n}$ متقاربة وتقارب 1