الموسم الدراسي: 2022/2021 المدة: ساعتان (2سا) إعداد: عبد المطلب	فرض الفصل الثالث	الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية" المادة: رياضيات

تمرين1 (06نقاط)

كيس U_1 يحتوي على 19 كرية لا نفرق بينها عند اللمس، مرقمة من 1 إلى 19.

كيس U_2 يحتوي على $2n+1$ كرية لا نفرق بينها عند اللمس، مرقمة من 1 إلى $2n+1$. (n عدد طبيعي غير معدوم)

I- نسحب عشوائيا في آن واحد كريتين من الكيس U_1.

1) احسب P_1 احتمال سحب كريتين تحملان رقمين زوجيين.

2) احسب P_2 احتمال سحب كريتين تحملان رقمين من مضاعفات 3.

3) احسب P_3 احتمال سحب كريتين تحملان رقمين زوجيين ومن مضاعفات 3.

4) احسب P_4 احتمال سحب كريتين تحملان رقمين زوجيين أو من مضاعفات 3.

5) احسب P_5 احتمال سحب كريتين تحملان رقمين من مضاعفات 3 إذا علمت أنّهما زوجيان.

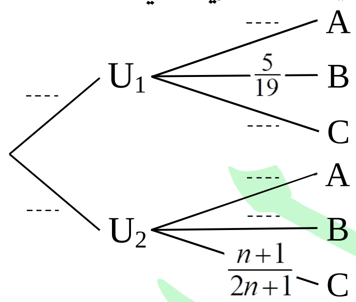
6) نقترح اللّعبة التالية: عند سحب كريتين تحملان رقمين زوجيين يربح اللّاعب 5 نقاط، وعند سحب كريتين تحملان رقمين فرديين يربح اللّاعب α نقطة، حيث α عدد طبيعي، أما عند سحب كريتين تحملان رقمين أحدهما زوجي والآخر فردي فيخسر اللّاعب 6 نقاط. نعرّف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب ربح أو خسارة اللّاعب.

أ) عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X، ثم بيّن أنّ الأمل الرياضياتي لـ X هو $E(X)=\dfrac{5\alpha-40}{19}$.

ب) أوجد قيمة العدد الطبيعي α حتى تكون اللّعبة عادلة (الأمل الرياضياتي معدوم).

II- يُطلب الآن من اللاّعب الإجابة على سؤال فيه ثلاث إجابات مختلفة، واحدة فقط صحيحة. عندما تكون الإجابة صحيحة يسحب من الكيس U_1 كريتين في آن واحد، وعندما تكون خاطئة يسحب من الكيس U_2 كريتين في آن واحد.

نعتبر الأحداث: A: سحب كريتين تحملان رقمين زوجيين، B: سحب كريتين تحملان رقمين فرديين، و C: سحب كريتين تحملان رقمين أحدهما زوجي والآخر فردي.



1) أنقل ثم أكمل شجرة الاحتمالات المقابلة التي تنمذج هذه الوضعية.

2) علما أنّ الكريتين المسحوبتين تحملان رقمين زوجيين، ما احتمال أن تكونا من U_1؟

(في كل التمرين، تُعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

تمرين2 (05نقاط)

I- نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $[1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=x-(x-1)e^{-x}$.

1) بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

2) استنتج أنّه إذا كان $x\in[1;2]$ فإنّ $f(x)\in[1;2]$.

3) بيّن أنّه إذا كان $x\in[1;+\infty[$ فإنّ $f(x)-x\le 0$.

II- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $u_0=2$ و $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le 2$.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، المتتالية (u_n) متناقصة. استنتج أنّها متقاربة، ثم احسب نهايتها.

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-1\le\dfrac{8}{9}(u_n-1)$.

ب) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_n-1\le\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$، ثم تأكّد من نهاية (u_n) الموجودة سابقا.

تمرين3 (09نقاط)

I- نعتبر الدالة العددية g المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=(x-ex)(1-\ln x)$ لما $x>0$ و $g(0)=0$.

ليكن $(\mathscr{C}_g)$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدة الطول 2cm

1) احسب النهايتين: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\dfrac{g(x)}{x}$.

2) بيّن أنّ الدالة g غير قابلة للاشتقاق على يمين 0. فسّر ذلك بيانيا.

3) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g'(x)=(e-1)\ln x$.

4) استنتج اتجاه تغيّر الدالة g، ثم شكّل جدول تغيراتها.

II- نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=(x-e)(1-\ln x)$.

ليكن $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، كما هو موضح في الوثيقة المرفقة.

1) احسب النهايتين: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{e-x\ln x}{x}$.

3) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 1.

III- 1) ادرس الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$، مع تحديد نقاط تقاطعهما.

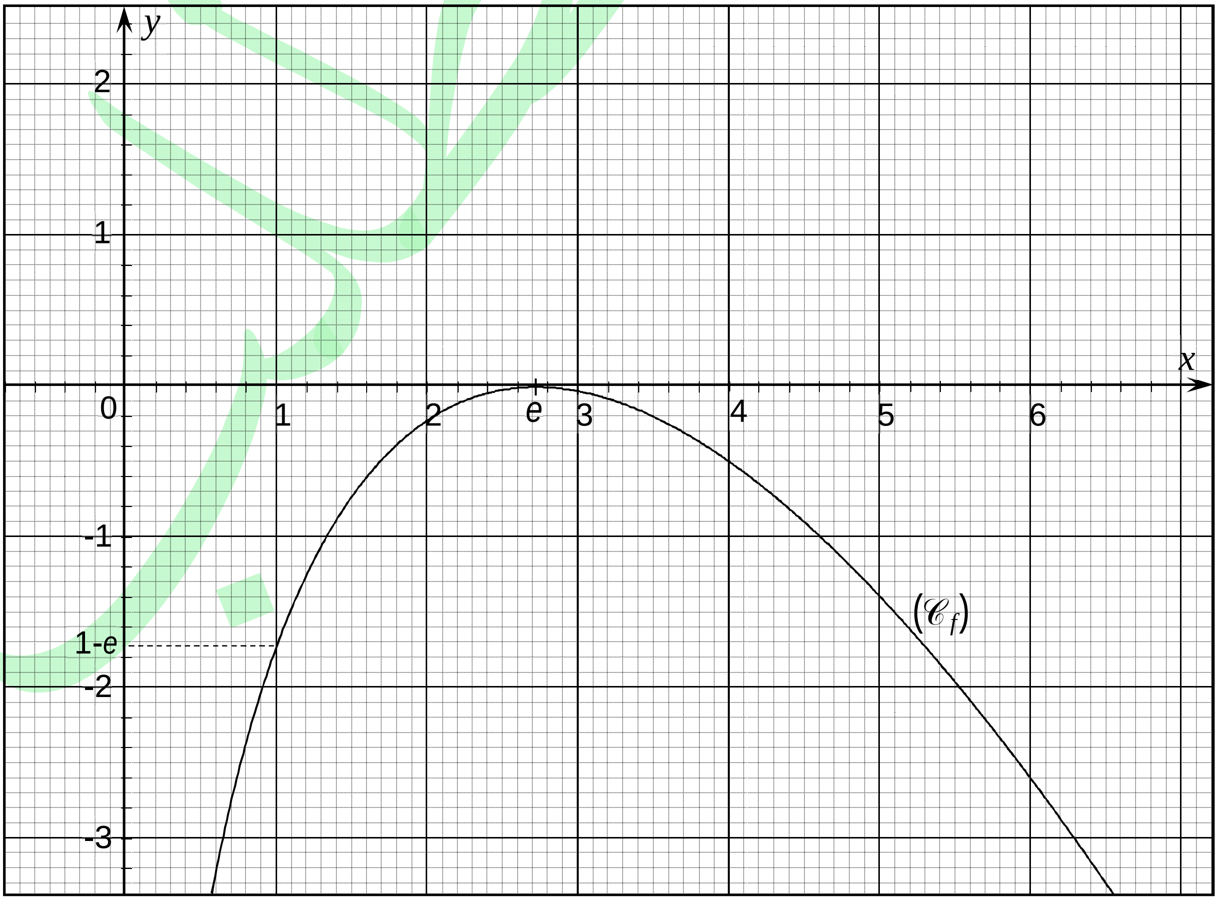
2) ارسم على الوثيقة المرفقة المماس (Δ)، والمنحني $(\mathscr{C}_g)$.

3) باستعمال التكامل بالتجزئة، بيّن أنّ $\int_1^e (x-1)(1-\ln x)dx=\dfrac{e^2-4e+5}{4}$.

4) احسب بـcm^2 المساحة $\mathscr{A}$ لمجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي حيث: $1\le x\le e$ و $g(x)\le y\le f(x)$.

سؤال إضافي: اقترح طريقة لحساب المساحة $\mathscr{A}'$ لمجموعة النقط $M(x;y)$ حيث: $0\le x\le 1$ و $g(x)\le y\le 0$.

الوثيقة المرفقة



تصحيح فرض الفصل الثالث 2022

تمرين 1:

I-1) $P_1 = \frac{C_9^2}{C_{19}^2} = \frac{4}{19}$

2) $P_2 = \frac{C_6^2}{C_{19}^2} = \frac{5}{57}$

3) $\{6;12;18\}$ $P_3 = \frac{C_3^2}{C_{19}^2} = \frac{1}{57}$

4) $P_4 = P_1 + P_2 - P_3 = \frac{16}{57}$

5) $P_5 = \frac{P_3}{P_1} = \frac{1}{57} \times \frac{19}{4} = \frac{1}{12}$

6) أ) $X = \{-6, 5, \alpha\}$

$P(X=-6) = \frac{C_9^1 \times C_{10}^1}{C_{19}^2} = \frac{10}{19}$

$P(X=5) = \frac{C_9^2}{C_{19}^2} = \frac{4}{19}$

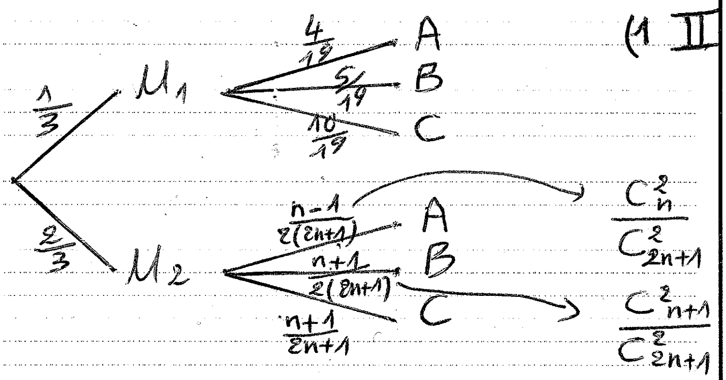
$P(X=\alpha) = \frac{C_{10}^2}{C_{19}^2} = \frac{5}{19}$

x_i	-6	5	α
$P(X=x_i)$	$\frac{10}{19}$	$\frac{4}{19}$	$\frac{5}{19}$

$E(X) = \frac{-60}{19} + \frac{20}{19} + \frac{5\alpha}{19} = \frac{5\alpha - 40}{19}$

ب) $E(X) = 0$ لما $\alpha = 8$

II 1)



2) $P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{19} + \frac{2}{3}\left(\frac{n-1}{2(2n+1)}\right) = \frac{9n-5}{19(2n+1)}$

$P_A(U_1) = \frac{P(A \cap U_1)}{P(A)} = \frac{4}{3 \times 19} \times \frac{19(2n+1)}{9n-5} = \frac{4(2n+1)}{3(9n-5)}$

تمرين 2:

I-1) $f'(x) = 1 - \left[e^{-x} - e^{-x}(x-1)\right]$

$f'(x) = 1 - 2e^{-x} + x e^{-x}$

لدينا: $x \geq 1$ ؛ $-x \leq -1$

$e^{-x} \leq e^{-1}$ ؛ $-2e^{-x} \geq -2e^{-1}$

$1 - 2e^{-x} \geq 1 - 2e^{-1} > 0$

كذلك $x e^{-x} > 0$ ومنه: $f'(x) > 0$

f متزايدة تماما

2) $1 \leq x \leq 2$ ، $f(1) \leq f(x) \leq f(2)$

$1 \leq f(x) \leq 2 - e^{-2}$ و $2 - e^{-2} \leq 2$

ومنه: $1 \leq f(x) \leq 2$

3) $f(x) - x = (1-x)e^{-x}$

$x \geq 1$ ، $-x \leq -1$ ، $1 - x \leq 0$

ومنه: $f(x) - x \leq 0$

II 1) $n=0$: $u_0 = 2$ ، $1 \leq u_0 \leq 2$ (محققة)

نفرض صحة: $1 \leq u_n \leq 2$ ونبرهن $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

f متزايدة ومنه: $f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$

$1 \leq u_{n+1} \leq 2 - e^{-2} \leq 2$ (محققة)

ومنه: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $1 \leq u_n \leq 2$

2) $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leq 0$

حسب I-3 ؛ $(f(x) - x \leq 0)$

ومنه (u_n) متناقصة.

(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$: $l = l - (l-1)e^{-l}$

$(l-1)e^{-l} = 0$ ومنه: $l = 1$

3) أ) $u_{n+1} - 1 = u_n - (u_n - 1)e^{-u_n} - 1$

$u_{n+1} - 1 = (u_n - 1)(1 - e^{-u_n})$

$1 \leq u_n \leq 2$ ؛ $-2 \leq -u_n \leq -1$

$e^{-2} \leq e^{-u_n} \leq e^{-1}$ ؛ $-e^{-1} \leq -e^{-u_n} \leq -e^{-2}$

(1-II $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

(2 $f'(x)=(1-\ln x)-\frac{1}{x}(x-e)$

$$f'(x)=\frac{e-x\ln x}{x}$$

(3 $y=f'(1)(x-1)+f(1)=ex-2e+1$

(1-III $f(x)-g(x)=e(x-1)(1-\ln x)$

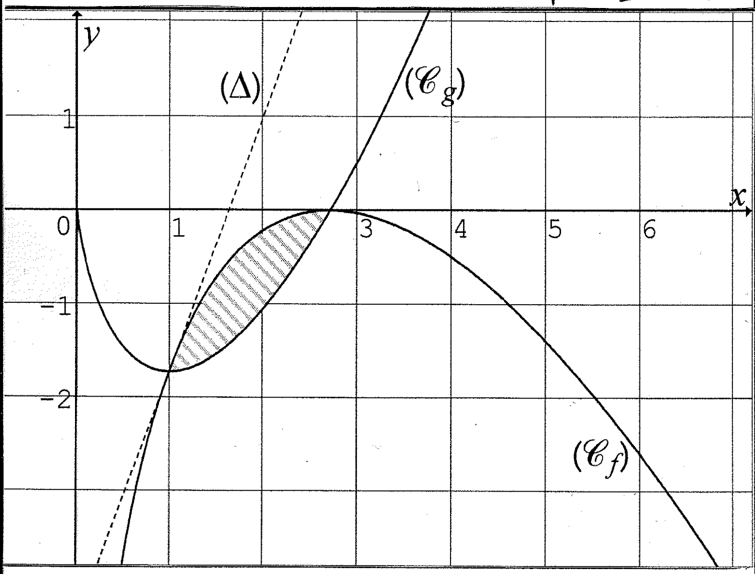
x	0		1		e		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-\ln x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$(\mathscr{C}_f)$ تحت $(\mathscr{C}_g)$ لما $x\in]0,1[\cup]e,+\infty[$

$(\mathscr{C}_f)$ فوق $(\mathscr{C}_g)$ لما $x\in]1,e[$

$(\mathscr{C}_f)$ يقطع $(\mathscr{C}_g)$ عند $A(1,1-e)$ و $B(e,0)$

(2 الرسم :



(3 $\begin{cases} u(x)=1-\ln x \\ v'(x)=x-1 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} u'(x)=-\frac{1}{x} \\ v(x)=\frac{x^2}{2}-x \end{cases}$

$$\int_1^e (x-1)(1-\ln x)\,dx=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)(1-\ln x)\right]_1^e+\int_1^e\left(\frac{x}{2}-1\right)dx$$

$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)(1-\ln x)\right]_1^e+\left[\frac{x^2}{4}-x\right]_1^e$$

$$\int_1^e (x-1)(1-\ln x)\,dx=\frac{e^2}{4}-e+\frac{5}{4}\simeq 0{,}38$$

(4 $A=4\int_1^e f(x)-g(x)\,dx=4\int_1^e e(x-1)(1-\ln x)\,dx$

$$A=4e\left[\frac{e^2}{4}-e+\frac{5}{4}\right]=(e^3-4e^2+5e)\,cm^2\simeq 4{,}18\,cm^2$$

لحساب A' : نحسب $\lim\limits_{\alpha\overset{>}{\to}0}\int_\alpha^e(-g(x))\,dx$ u.a

عبد المطلب

$.\ 0\le u_n-1\le 1$ و $1-e^{-1}\le 1-e^{-u_n}\le 1-e^{-2}$

$(u_n-1)(1-e^{-u_n})\le(1-e^{-2})(u_n-1)\le\frac{8}{9}(u_n-1)$

لأن $1-e^{-2}\le\frac{8}{9}$ ومنه $u_{n+1}-1\le\frac{8}{9}(u_n-1)$

طريقة أخرى: $u_{n+1}-1-\frac{8}{9}(u_n-1)\le 0$

$$(u_n-1)(1-e^{-u_n})-\frac{8}{9}(u_n-1)\le 0$$

$$(u_n-1)\left(\frac{1}{9}-e^{-u_n}\right)\le 0$$

محققة لأن: $\left(\frac{1}{9}-e^{-u_n}\le 0\right)$.

$$\left(\frac{1}{9}-e^{-u_n}\le\frac{1}{9}-e^{-2}\le 0\right)$$

ب) لدينا: $u_n-1\ge 0$ (محققة)

$n=0$: $u_0-1=1$ (محققة)

نفرض أن: $u_n-1\le\left(\frac{8}{9}\right)^n$

ونبرهن صحة: $u_{n+1}-1\le\left(\frac{8}{9}\right)^{n+1}$.

$\left(\frac{8}{9}\right)\times(u_n-1)\le\left(\frac{8}{9}\right)^n\times\left(\frac{8}{9}\right)$ (نضرب الطرفين في $\frac{8}{9}$)

$$u_{n+1}-1\le\frac{8}{9}(u_n-1)\le\left(\frac{8}{9}\right)^{n+1}$$

ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $0\le u_n-1\le\left(\frac{8}{9}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-1)=0$ (الحصر) ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

تمرين 3 :

(1-I $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\overset{>}{\to}0}(1-e)(1-\ln x)=-\infty$$

(2 $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=-\infty$ ؛ ومنه g غير قابلة للاشتقاق على يمين 0.

$(\mathscr{C}_g)$ يقبل نصف مماس عمودي.

(3 $g'(x)=(1-e)(1-\ln x)-\frac{1}{x}(x-ex)$

$$g'(x)=e\ln x-\ln x=(e-1)\ln x$$

(4 إشارة $g'(x)$: $0\quad - \quad 1 \quad +$

g متناقصة على $]0,1[$ و متزايدة على $[1,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	↘	$1-e$	↗	$+\infty$