ثا/الشهيد حمو بوتليليس وهران — سنة ثالثة تقني رياضي

السنة الدراسية: 20-2021 — المدة: 1سا و30د

الفرض الثلاثي الأول في الرياضيات

نص التمرين:

I) لتكن f_α الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي: $f_\alpha(x)=\left(2x^3-4x^2\right)e^{\alpha x}$. حيث α وسيط حقيقي

ليكن (C_α) التمثيل البياني للدالة f_α في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

- . أحسب تبعا لقيم الوسيط α نهايتي الدالة f_α عند $-\infty$ و $+\infty$.
- . بين أن كل المنحنيات (C_α) تتقاطع في نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما.

II) في كل مايلي نأخذ $\alpha=-1$

- . ادرس اتجاه تغير الدالة f_{-1} ثم شكل جدول تغيراتها.
- . أ) عين معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحني (C_{-1}) عند النقطة ذات الفاصلة 2 .

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_{-1}) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.

جـ) انشئ بكل عناية المماس (T) و المنحني (C_{-1}).

- , ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x ،

$$f_{-1}(x)=f_{-1}(m)$$

, h دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بـ :

$$\begin{cases} h(x)=f_{-1}(x) & x\geq 2 \\ h(x)=(2-x)e^{x} & 0\leq x\prec 2 \end{cases}$$

أ) أدرس قابلية إشتقاق الدالة h في 2 . فسر النتيجة بيانيا .

بـ) أدرس إتجاه تغير الدالة h، ثم شكل جدول تغيراتها .

جـ) أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_{-1}) و (C_h) .

د) أنشئ (C_h) في نفس المعلم .

بالتوفيق والسداد

تصحيح الفرض الأول في الرياضيات
الثانية تقني رياضي
ثانوية حمو بوتليليس 2020-2021

I) $f_\alpha(x)=(2x^3-4x^2)e^{\alpha x}$ ، $\alpha\in\mathbb{R}$

$D_{f_\alpha}=]-\infty,+\infty[$

① نهايتي f_α عند $-\infty$ ، عند $+\infty$

✱ ($\alpha=0$) $f_0(x)=2x^3-4x^2$

$\lim_{x\to+\infty} f_0(x)=+\infty$ / $\lim_{x\to-\infty} f_0(x)=-\infty$

✱ ($\alpha<0$)

$\lim_{x\to-\infty} f_\alpha(x)=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{(2x^3-4x^2)}_{-\infty}\underbrace{e^{\alpha x}}_{+\infty}$

$=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x)=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{(2x^3-4x^2)}_{+\infty}\underbrace{e^{\alpha x}}_{0}$

= ح ع ت

$\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x)=\lim_{x\to+\infty} 2x^3e^{\alpha x}-4x^2e^{\alpha x}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\alpha^3}(\alpha x)^3e^{\alpha x}-\frac{4}{\alpha^2}(\alpha x)^2e^{\alpha x}$

نضع $X=\alpha x$ ، $\begin{cases}x\to+\infty\\ X\to-\infty\end{cases}$

$=\lim_{X\to-\infty}\frac{2}{\alpha^3}\underbrace{X^3e^X}_{0}-\frac{4}{\alpha^2}\underbrace{X^2e^X}_{0}$

$=0$ تزايد مقارن

✱ ($\alpha>0$)

$\lim_{x\to-\infty} f_\alpha(x)=\lim_{X\to-\infty}\frac{2}{\alpha^3}X^3e^X-\frac{4}{\alpha^2}X^2e^X$

$=0$ نفس الفكرة السابقة

$\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x)=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{(2x^3-4x^2)}_{+\infty}\underbrace{e^{\alpha x}}_{+\infty}$

$=+\infty$

② كل المنحنيات (C_α) تتقاطع في نقطتين يطلب تعيينهما.

$M(x,y)$ نقطة من (C_α) ومنه تحقق $f_\alpha(x)=y$ أي

$(2x^3-4x^2)e^{\alpha x}=0$

تعني $2x^3-4x^2=0$ تعني

$2x^2(x-2)=0$

ومنه $x-2=0$ أو $2x=0$

$x=2$ أو $x=0$

نجد $x=0$ ، $y=0$

نجد $x=2$ ، $y=0$

النقطتان هما $O(0,0)$ و $A(2,0)$

II) أي ($\alpha=-1$) $f_{-1}(x)=(2x^3-4x^2)e^{-x}$

$D_{f_{-1}}=]-\infty,+\infty[$

① دراسة تغيرات f_{-1}

$\lim_{x\to+\infty} f_{-1}(x)=0$ ، $\lim_{x\to-\infty} f_{-1}(x)=-\infty$

من السؤال (1) كون $\alpha<0$

$f'_{-1}(x)=(6x^2-8x)e^{-x}-e^{-x}(2x^3-4x^2)$

$=(-2x^3+10x^2-8x)e^{-x}$

إشارة $f'_{-1}(x)$ من إشارة

$-2x^3+10x^2-8x$

تعني $-2x^3+10x^2-8x=0$

$-2x(x^2-5x+4)=0$

تعني $-2x=0$ ، $x=0$

$x^2-5x+4=0$

$\Delta=9$ ، $x_1=1$ ، $x_2=4$

x	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$
$-2x$	+	0	−	−	−
x^2-5x+4	+	+	0 −	0 +	
$f'_{-1}(x)$	+	0 −	0 +	0 −	

f_{-1} متناقصة تماما على $[0,1]$ و $[4,+\infty[$

f_{-1} متزايدة تماما على $]-\infty,0]$ و $[1,4]$

x	$-\infty$	0	1	2	4	$+\infty$
$f'_{-1}(x)$	+	0	− 0	+	0	−
$f_{-1}(x)$	$-\infty$ ↗	0	↘ $-2e^{-1}$	↗ 0	$64e^{-4}$	↘ 0

② P) (T) مماس (C_{-1}) في النقطة ذات الفاصلة 2 ؛

$y=f'_{-1}(2)(x-2)+f_{-1}(2)$

$=8e^{-2}(x-2)=8e^{-2}x+16e^{-2}$

ب) وضعية (C_{-1}) بالنسبة لحامل محور الفواصل

$f_{-1}(x)=0$ أي $2x^3-4x^2=0$

أي $2x^2(x-2)=0$

تعني $2x^2=0$ ، $x=0$

تعني $x-2=0$ ، $x=2$

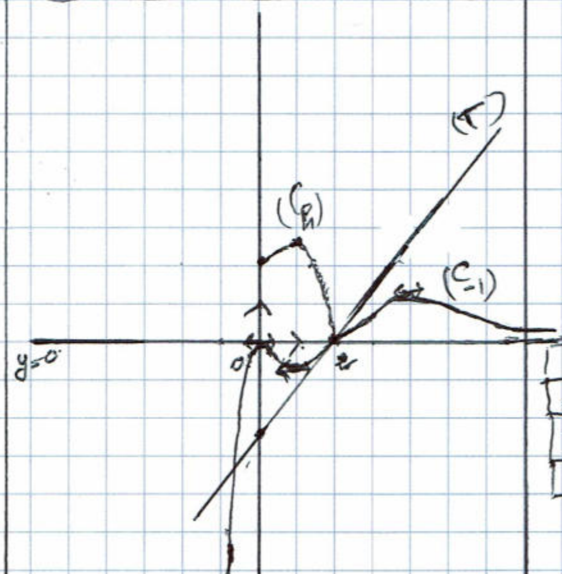
x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$2x^2$	+	0	+		+
$x-2$	−		−	0	+
$2x^2(x-2)$	−	0	−	0	+
الوضعية	(C_{-1}) تحت $(x'x)$	$O(0,0)$	(C_{-1}) تحت $(x'x)$	$A(2,0)$	(C_{-1}) فوق $(x'x)$

نقطتا التقاطع $O(0,0)$ و $A(2,0)$

③ ارسم (T) و (C_{-1}) ($y=0$ معادلة مقارب أفقي)

$-2e^{-1}\simeq-0{,}73$ / $64e^{-4}\simeq1{,}17$

x	−1	2	3	5
$f_{-1}(x)$	−16,3	0	0,90	1,01



④ المناقشة البيانية $f_{-1}(x)=f_{-1}(m)$

لدينا m يجب إيجاد الحالات وحلول

$m\in]-\infty,0[$ حل وحيد سالب

$m=0$ حل مضاعف معدوم

$m\in]0,1[\cup]1,2[$ ثلاث حلول موجبة مختلفة

$m=1$ حل مضاعف موجب

$m=2$ حل وحيد موجب

$m=64e^{-4}$ حل مضاعف موجب

$m\in]2,64e^{-4}[\cup]64e^{-4},+\infty[$ ثلاث حلول موجبة مختلفة

5) h معرفة على $[0,+\infty[$:

$$\begin{cases} h(x) = f_{-1}(x) \; ; & x \geq 2 \\ h(x) = (2-x)e^{x} \; ; & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

أ) قابلية اشتقاق h عند 2 :

لدينا $h(2) = f_{-1}(2) = 0$

$$\lim_{h \to 0^{<}} \frac{h(2+h)-h(2)}{h} = \lim_{h \to 0^{<}} \frac{(2-(2+h))e^{2+h} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^{<}} \frac{-h\, e^{2+h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^{<}} -e^{2+h} = -e^{2}$$

$$\lim_{h \to 0^{>}} \frac{h(2+h)-h(2)}{h} = \lim_{h \to 0^{>}} \frac{f_{-1}(2+h) - f_{-1}(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^{>}} \frac{(2(2+h)^3 - 4(2+h)^2)e^{-(2+h)} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^{>}} \frac{(2(8+12h+6h^2+h^3) - 4(4+4h+h^2))e^{-2-h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^{>}} \frac{(\cancel{16}+24h+12h^2+2h^3-\cancel{16}-16h-4h^2)e^{-2-h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^{>}} \frac{(2h^3+8h^2+8h)e^{-2-h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^{>}} \frac{\cancel{h}(2h^2+8h+8)e^{-2-h}}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0^{>}} (2h^2+8h+8)e^{-2-h}$$

$$= 8e^{-2}$$

$$-e^{2} \neq 8e^{-2}$$

ومنه h لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 2$

ومنه (C_h) يقبل النقطة $A(2,0)$ نقطة زاوية

ويقبل نصفي مماسين

ب) دراسة تغيرات h

$h(0) = (2-0)e^{0} = 2$

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} f_{-1}(x) = 0$

لما $x \geq 2$

$$h'(x) = f'_{-1}(x)$$
$$= (-2x^3+10x^2-8x)e^{-x}$$

كما سبق نجد

x	2		4		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	

h متزايدة تماما على $[2,4]$

ومتناقصة تماما على $[4,+\infty[$

لما $0 \leq x < 2$

$$h'(x) = -1e^{x} + (2-x)e^{x}$$
$$= (1-x)e^{x}$$

إشارة $h'(x)$ من إشارة $1-x$

x	0		1		2
$1-x$		$+$	0	$-$	

h متناقصة تماما على $[1,2[$

h متزايدة تماما على $[0,1]$

x	0		1		2		4		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	2	$\nearrow$	e	$\searrow$	0	$\nearrow$	$64e^{-4}$	$\searrow$	0

ج) الوضعية النسبية لـ (C_{-1}) و (C_h)

لما $x \geq 2$

$$h(x) = f_{-1}(x)$$

(C_h) ينطبق على (C_{-1})

لما $0 \leq x \leq 2$ لدينا

$f_{-1}(x) \leq 0$ و $h(x) \geq 0$

أي (C_h) فوق (C_{-1})

د) الرسم

(C_h) واقع فوق حامل محور الفواصل