

التمرين الاول : (08 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة \mathbb{N} على بعدها الاول u_0 ومن اجل كل n من \mathbb{N} فان $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$

$$1. \text{ تحقق انه من اجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ فان } u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$$

$$2. \text{ برهن بالتراجع انه من اجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ فان: } 0 < u_n < \frac{1}{2}$$

$$3. \text{ تحقق انه من اجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ فان: } u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1 - 2u_n)}{2u_n + 1} \text{ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية}$$

(u_n)4. استنتج تقارب المتتالية (u_n)

$$5. \text{ نضع من اجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} : v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$$

(أ) اثبت ان المتتالية (v_n) متتالية هندسية اساسها $q = 6$

$$(ب) \text{ اكتب } v_n \text{ بدلالة } n \text{ ، ثم استنتج انه من اجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ فان: } u_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$$

(ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$(د) \text{ احسب بدلالة } n \text{ المجموع } S_n \text{ حيث: } S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$$

التمرين الثاني : (06 نقاط)نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة $5x - 6y = 3$(1)1. اثبت انه اذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فان x مضاعف للعدد 32. استنتج حلا خاصا للمعادلة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ثم حل في المعادلة (1).

$$3. \text{ استنتج حلول الجملة } E \text{ ، حيث } E : \begin{cases} x \equiv -4[6] \\ x \equiv -1[6] \end{cases}$$

4. حلل العدد 2016 الى جداء عوامل اولية ، ثم استنتج الاعداد التي مربعاتها تقسم العدد 2016

5. نضع $d = \text{pgcd}(a; b)$ و $m = \text{ppcm}(a; b)$ عين العددين الطبيعيين a ، b حيث ان $m^2 - 2d^2 = 2016$

التمرين الثالث: (06 نقاط)

1. بين انه من اجل كل n من \mathbb{N} فان العدد $3n^3 - 11n + 48$ يقبل القسمة على $n + 3$

2. بين انه من اجل كل n من \mathbb{N} فان العدد $3n^2 - 9n + 16$ عدد طبيعي غير معدوم

3. بين انه من اجل كل عدد طبيعي n اكبر من او يساوي 2 فان :

$$\text{pgcd}(3n^3 - 11n; n + 3) = \text{pgcd}(48; n + 3)$$

4. عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48 ، ثم استنتج مجموعة الاعداد الطبيعية n التي يكون من اجلها

$$\frac{3n^3 - 11n}{n + 3} \text{ طبيعيا}$$

بالتوفيق للجميع