# الثانية علوم تجريبية

# الوطني العادي 2018

**التمرين الأول ( 3 نقاط ):**

| | |
|---|---|
| | في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط $A(0,-2,-2)$ و $B(1,-2,-4)$ و $C(-3,-1,2)$ |
| 1 | 1) بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ ثم استنتج أن $2x+2y+z+6=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى $(ABC)$ |
| 0,5 | 2) لتكن $(S)$ الفلكة التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$ <br> تحقق من أن مركز الفلكة $(S)$ هو $\Omega(1,0,1)$ وأن شعاعها هو $R=5$ |
| 0,25 | 3) أ- تحقق من أن $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases};(t\in\mathbb{R})$ هو تمثيل بارامتري للمستقيم $(\Delta)$ المار من $\Omega$ و العمودي على المستوى $(ABC)$ |
| 0,5 | ب- حدد إحداثيات $H$ نقطة تقاطع المستقيم $(\Delta)$ و المستوى $(ABC)$ |
| 0,75 | 4) تحقق من أن $d\left(\Omega,(ABC)\right)=3$ ثم بين أن المستوى $(ABC)$ يقطع الفلكة $(S)$ وفق دائرة شعاعها 4 يتم تحديد مركزها |

**التمرين الثاني ( 3 نقاط ):**

| | |
|---|---|
| 0,75 | 1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $2z^2+2z+5=0$ |
| | 2) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر $R$ الدوران الذي مركزه $O$ و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ |
| 0,25 | أ- أكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي : $d=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ |
| 0,5 | ب- لتكن النقطة $A$ التي لحقها $a=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ و $B$ صورة النقطة $A$ بالدوران $R$ <br> ليكن $b$ لحق النقطة $B$ ، بين أن $b=d.a$ |
| | 3) لتكن $t$ الإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$ و النقطة $C$ صورة النقطة $B$ بالإزاحة $t$ و $c$ لحق النقطة $C$ |
| 0,75 | أ- تحقق من أن $c=b+a$ ثم استنتج أن $c=a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ (يمكنك استعمال السؤال 2) ب- ) |
| 0,75 | ب- حدد $\arg\left(\frac{c}{a}\right)$ ثم استنتج أن المثلث $OAC$ متساوي الأضلاع . |

## التمرين الثالث (3 نقاط):

يحتوي صندوق على 9 كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس :
خمس كرات حمراء تحمل الأعداد 2 ، 2 ، 2 ، 1 ، 1
و أربع كرات بيضاء تحمل الأعداد 2 ، 2 ، 2 ، 1
نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا و تآنيا 3 كرات من الصندوق.
لتكن الأحداث : $A$ :"الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون" و $B$ :"الكرات الثلاث المسحوبة تحمل نفس العدد "
و $C$ :"الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون و تحمل نفس العدد"

1) بين أن $p(A)=\dfrac{1}{6}$ و $p(B)=\dfrac{1}{4}$ و $p(C)=\dfrac{1}{42}$ 1,5

2) نكرر التجربة السابقة 3 مرات مع إعادة الكرات الثلاث المسحوبة إلى الصندوق بعد كل سحبة ، و نعتبر المتغير العشوائي $X$ الذي يساوي عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث $A$

أ- حدد وسيطي المتغير العشوائي $X$ 0,5

ب- بين أن : $p(X=1)=\dfrac{25}{72}$ و أحسب $p(X=2)$ 1

## المسألة (11 نقطة):

I. لتكن $g$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=e^x-x^2+3x-1$

الجدول جانبه يمثل جدول تغيرات الدالة $g$

1) تحقق من أن $g(0)=0$ 0,25

| $x$ | $-\infty$ $\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ |
| $g(x)$ | $-\infty \nearrow +\infty$ |

2) حدد إشارة $g(x)$ على كل من المجالين $]-\infty,0]$ و $[0,+\infty[$ 0,5

II. لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x)=(x^2-x)e^{-x}+x$$

وليكن $(C)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $1cm$)

1) أ- تحقق من أن $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}-\dfrac{x}{e^x}+x$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$ ثم بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 0,5

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ ثم استنتج أن المنحنى $(C)$ يقبل مقاربا $(D)$ بجوار $+\infty$ معادلته $y=x$ 0,75

ج- تحقق من أن $f(x)=\dfrac{x^2-x+xe^x}{e^x}$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 0,5

د- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ ثم أول النتيجة هندسيا 0,5

2) أ- تحقق من أن $f(x)-x$ و $x^2-x$ لهما نفس الإشارة لكل $x$ من $\mathbb{R}$ 0,25

ب- استنتج أن $(C)$ يوجد فوق $(D)$ على كل من المجالين $]-\infty,0]$ و $[1,+\infty[$ و تحت $(D)$ على المجال $[0,1]$ 0,5

| | |
|---|---|
| 3) أ- بين أن لكل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=g(x)e^{-x}$ | 0,75 |
| ب- استنتج أن الدالة $f$ تناقصية على $]-\infty,0]$ و تزايدية على $[0,+\infty[$ | 0,5 |
| ج- ضع جدول تغيرات الدالة $f$ | 0,25 |
| 4) أ- تحقق من أن $f''(x)=(x^2-5x+4)e^{-x}$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$ | 0,25 |
| ب- استنتج أن المنحنى $(C)$ يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما على التوالي هما 1 و 4 | 0,5 |
| 5) أنشئ $(D)$ و $(C)$ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ( نأخذ $f(4)\simeq 4,2$ ) | 1 |
| 6) أ- بين أن الدالة $H:x\mapsto(x^2+2x+2)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto -x^2e^{-x}$ على $\mathbb{R}$ <br> ثم استنتج أن $\int_0^1 x^2e^{-x}dx=\frac{2e-5}{e}$ | 0,5 |
| ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\int_0^1 xe^{-x}dx=\frac{e-2}{e}$ | 0,75 |
| ج- أحسب ب $cm^2$ مساحة حيز المستوى المحصور بين $(C)$ و $(D)$ و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$ | 0,75 |
| III. لتكن المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة كما يلي : $u_0=\frac{1}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$ | |
| **1)** بين أن $0\leq u_n\leq 1$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$ ( *يمكن استعمال نتيجة السؤال* $II-3$) ب- ) | 0,75 |
| **2)** بين أن المتتالية $(u_n)$ تناقصية | 0,5 |
| **3)** استنتج أن $(u_n)$ متقاربة و حدد نهايتها | 0,75 |

## تصحيح التمرين الأول :

**1)**

✓ لدينا $\overrightarrow{AB}(1,0,-2)$ و $\overrightarrow{AC}(-3,1,4)$

إذن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0 & -2\\ 1 & 4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$

و منه : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

✓ لدينا : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,2,1)$ متجهة منظمية للمستوى $(ABC)$ إذن معادلة ديكارتية للمستوى $(ABC)$ تكتب على شكل : $(2)x+(2)y+(1)z+d=0$

و بما أن $A(0,-2,-2)\in(ABC)$ فإن $(2)(0)+(2)(-2)+(1)(-2)+d=0$ أي $d=6$

وبالتالي : $2x+2y+z+6=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى $(ABC)$

**2)**

$$M(x,y,z)\in(S)\ \Leftrightarrow\ x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$$

$$\Leftrightarrow\ x^2-2x+y^2+z^2-2z=23$$

$$\Leftrightarrow\ x^2-2x+1+y^2+z^2-2z+1=23+1+1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=25$$

$$\Leftrightarrow (x-(1))^2+(y-(0))^2+(z-(1))^2=(5)^2$$

إذن مركز الفلكة $(S)$ هو النقطة $\Omega(1,0,1)$ و أن شعاعها هو $R=5$

**3)** أ-

لنحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم $(\Delta)$ المار من $\Omega(1,0,1)$ و العمودي على المستوى $(ABC)$

بما أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,2,1)$ متجهة منظمية للمستوى $(ABC)$ و بما أن $(\Delta)$ عمودي على المستوى $(ABC)$

فإن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,2,1)$ هي متجهة موجهة للمستقيم $(\Delta)$

و لدينا $\Omega(1,0,1)\in(\Delta)$

إذن تمثيل بارامتري للمستقيم $(\Delta)$ هو : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=(1)+t(2)\\ y=(0)+t(2)\\ z=1+t(1)\end{cases}$

أي : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \\ z = 1+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

ب-

$$H(x_H, y_H, z_H) \in (\Delta) \cap (ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 1+2t \\ y_H = 2t \\ z_H = 1+t \\ 2x_H + 2y_H + z_H + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 1+2t \\ y_H - 1+2t \\ z_H = t \\ 2(1+2t)+2(2t)+(1+t)+6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 1+2t \\ y_H = 2t \\ z_H = 1+t \\ t = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -1 \\ y_H = -2 \\ z_H = 0 \end{cases}$$

**(4**

✓ لدينا : $d(\Omega,(ABC)) = \dfrac{|2(1)+2(0)+(1)+6|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{9}} = \dfrac{9}{3} = 3$

بما أن $d(\Omega,(ABC)) < R$ ( $R=5$ شعاع الفلكة $(S)$ )

فإن : المستوى $(ABC)$ يقطع الفلكة $(S)$ وفق دائرة شعاعها :

$$r = \sqrt{R^2 - \left(d(\Omega,(ABC))\right)^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

و مركزها (هو المسقط العمودي للنقطة $\Omega$ على المستوى $(ABC)$ ) نقطة تقاطع $(\Delta)$ و $(ABC)$

أي النقطة $H(-1,-2,0)$

**تصحيح التمرين الثاني :**

**1)** لنحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $2z^2+2z+5=0$

لدينا : $\Delta=(2)^2-4(2)(5)=-36$

بما أن $\Delta<0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين :

$$z=\frac{-(2)-i\sqrt{36}}{2(2)} \quad \text{أو} \quad z=\frac{-(2)+i\sqrt{36}}{2(2)}$$

$$z=\frac{-2-6i}{4} \quad \text{أو} \quad z=\frac{-2+6i}{4}$$

$$z=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i \quad \text{أو} \quad z=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$$

إذن : $S=\left\{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i,-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right\}$

**2)** أ- لنكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي : $d=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

لدينا : $d=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

إذن : $d=1.\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

ب- لدينا : $R$ هو الدوران الذي مركزه $O$ و زاويته $\frac{2\pi}{3}$

إذن الكتابة العقدية للدوران $R$ هي : $z'-0=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-0)$ أي : $\boxed{z'=d.z}$

بما أن $B(b)$ صورة النقطة $A(a)$ بالدوران $R$

فإن : $b=d.a$

**3)** أ-

✓ لدينا : $t$ الإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$

إذن الكتابة العقدية للإزاحة $t$ هي : $z'=z+z_{\overrightarrow{OA}}=z+a-0$ أي : $\boxed{z'=z+a}$

بما أن $C(c)$ صورة النقطة $B(b)$ بالإزاحة $t$

فإن : $c=b+a$

✓ $c=b+a=a\left(\frac{b}{a}+1\right)=a(d+1)=a\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+1\right)=a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

(حسب السؤال 2) ب- لدينا : $b = d.a$ إذن $\frac{b}{a} = d$ )

ب-

✓ لدينا $c = a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ إذن $\frac{c}{a} = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

إذن $\arg\left(\frac{c}{a}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

✓ لدينا : $\left|\frac{c}{a}\right| = \left|\frac{c-0}{a-0}\right| = 1$ إذن $\frac{OC}{OA} = 1$ و منه $\boxed{OC = OA}$

و لدينا : $\arg\left(\frac{c}{a}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ إذن $\arg\left(\frac{c-0}{a-0}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ و منه $\boxed{\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]}$

و بالتالي : المثلث $OAC$ متساوي الأضلاع .

## تصحيح التمرين الثالث :

**1)** التجربة : " نسحب عشوائيا و تآنيا 3 كرات من الصندوق"

ليكن $\Omega$ كون إمكانيات هذه التجربة

$$card\Omega = C_9^3 = 84$$

✓

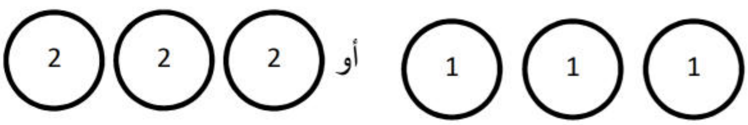
$A$ :"الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون" أو

$$cardA = C_4^3 + C_5^3 = 4 + 10 = 14$$

$$p(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$$

✓

$B$ :"الكرات الثلاث المسحوبة تحمل نفس العدد " أو




$$cardB = C_3^3 + C_6^3 = 1 + 20 = 21$$

$$p(B) = \frac{cardB}{card\Omega} = \frac{21}{84} = \frac{1}{4}$$

✓ $C$ :"الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون و تحمل نفس العدد"


أو


$$cardC = C_3^3 + C_3^3 = 1+1 = 2$$

$$p(C) = \frac{cardC}{card\Omega} = \frac{2}{84} = \frac{1}{42}$$

**2)** نكرر التجربة السابقة 3 مرات مع إعادة الكرات الثلاث المسحوبة إلى الصندوق بعد كل سحبة ، و نعتبر المتغير العشوائي $X$ الذي يساوي عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث $A$

أ- لدينا $X$ متغير عشوائي حداني وسيطاه $n$ و $p$

حيث : $n$ هو عدد مرات تكرار التجربة أي $n=3$

و $p$ هو احتمال تحقق الحدث $A$ أي : $p = p(A) = \frac{1}{6}$

ب- $p(X=1) = C_3^1\left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-1} = 3\times\frac{1}{6}\times\frac{25}{36} = \frac{25}{72}$

$$p(X=2) = C_3^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-2} = 3\times\frac{1}{36}\times\frac{5}{6} = \frac{5}{72}$$

## تصحيح المسألة :

**I.** لتكن $g$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$

**(1** $g(0) = e^0 - 0^2 + 3(0) - 1 = 1 - 0 + 0 - 1 = 0$

**(2**

✓ <u>على المجال $]-\infty,0]$ :</u>

لدينا $x \le 0$ و انطلاقا من جدول تغيرات الدالة $g$ لدينا : $g$ تزايدية

إذن : $g(x) \le g(0)$ و منه $g(x) \le 0$

✓ <u>على المجال $[0,+\infty[$ :</u>

لدينا $x \ge 0$ و انطلاقا من جدول تغيرات الدالة $g$ لدينا : $g$ تزايدية

إذن : $g(x) \ge g(0)$ و منه $g(x) \ge 0$

**.II** لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\left(x^2-x\right)e^{-x}+x$

**1)** أ-

✓ ليكن $x\in\mathbb{R}$ :

لدينا :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^2-x\right)e^{-x}+x \\ &= \left(x^2-x\right)\times\frac{1}{e^x}+x \\ &\frac{x^2}{e^x} \quad \frac{x}{e^x} \quad x \end{aligned}$$

إذن $f(x)=\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x=+\infty$

لأن $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0^+ & \left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty\right) \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0^+ & \left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty\right) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty & \end{cases}$

ب- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}=0$

إذن : المنحنى $(C)$ يقبل مقاربا مائلا $(D)$ بجوار $+\infty$ معادلته $y=x$

ج-

✓ ليكن $x\in\mathbb{R}$ :

لدينا : $f(x)=\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x=\frac{x^2-x+xe^x}{e^x}$

إذن : $f(x)=\frac{x^2-x+xe^x}{e^x}$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$

✓ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+xe^x}{e^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}\times\left(x^2-x+xe^x\right)=+\infty$

لأن : $\begin{aligned} &\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-x=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty \\ &\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0^- \end{aligned} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-x+xe^x\right)=+\infty$

و : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+$

د-

✓ $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+xe^x}{xe^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{xe^x}\times\left(x^2-x+xe^x\right)=-\infty$$

: $\lim_{x\to-\infty} x^2-x=\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0^-$ $\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(x^2-x+xe^x\right)=+\infty$

و : $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0^-$

✓ لدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$

إذن : المنحنى $(C)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$

**2)** أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$ :

لدينا : $f(x)-x=\left(x^2-x\right)e^{-x}$

بما أن $e^{-x}>0$

فإن $f(x)-x$ و $x^2-x$ لهما نفس الإشارة لكل $x$ من $\mathbb{R}$

ب- لدينا : $f(x)-x$ و $x^2-x$ لهما نفس الإشارة لكل $x$ من $\mathbb{R}$

لندرس إشارة $x^2-x$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x2-x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

✓ على المجالين $]-\infty,0]$ و $[1,+\infty[$ :

لدينا $x^2-x\geq 0$

إذن $f(x)-x\geq 0$

و منه $(C)$ يوجد فوق $(D)$

✓ على المجال $[0,1]$ :

لدينا $x^2-x\leq 0$

إذن $f(x)-x\leq 0$

و منه $(C)$ يوجد تحت $(D)$

**3)** أ- الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x\in\mathbb{R}$ :

لدينا :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\left(x^2-x\right)e^{-x}+x\right)' \\
&= \left(x^2-x\right)'e^{-x}+\left(x^2-x\right)\left(e^{-x}\right)'+1 \\
&= (2x-1)e^{-x}-\left(x^2-x\right)e^{-x}+1 \\
&= e^{-x}\left(2x-1-x^2+x+e^{x}\right) \\
&= e^{-x}\left(e^{x}-x^2+3x-1\right) \\
&= e^{-x}g(x)
\end{aligned}$$

إذن لكل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=g(x)e^{-x}$

ب- لدينا لكل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=g(x)e^{-x}$ و نعلم أن لكل $x$ من $\mathbb{R}$ $e^{-x}>0$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

- ✓ <u>على المجال $]-\infty,0]$ :</u>

لدينا $g(x)\leq 0$ إذن $f'(x)\leq 0$

و منه الدالة $f$ تناقصية على $]-\infty,0]$

- ✓ <u>على المجال $[0,+\infty[$ :</u>

لدينا $g(x)\geq 0$ إذن $f'(x)\geq 0$

و منه الدالة $f$ تزايدية على $[0,+\infty[$

ج- جدول تغيرات الدالة $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**4)** أ- لدينا : $f'$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(e^{-x}g(x)\right)' \\ &= \left(e^{-x}\right)' \times g(x) + e^{-x} \times g'(x) \\ &= -e^{-x}\left(e^{x} - x^2 + 3x - 1\right) + e^{-x}\left(e^{x} - 2x + 3\right) \\ &= e^{-x}\left(-e^{x} + x^2 - 3x + 1 + e^{x} - 2x + 3\right) \\ &= e^{-x}\left(x^2 - 5x + 4\right) \end{aligned}$$

إذن : $f''(x) = \left(x^2 - 5x + 4\right)e^{-x}$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$

ب- لدينا $f''(x) = \left(x^2 - 5x + 4\right)e^{-x}$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$ و نعلم أن لكل $x$ من $\mathbb{R}$ $0 < e^{-x}$

إذن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $x^2 - 5x + 4$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ أو } x = 4 \end{aligned}$$

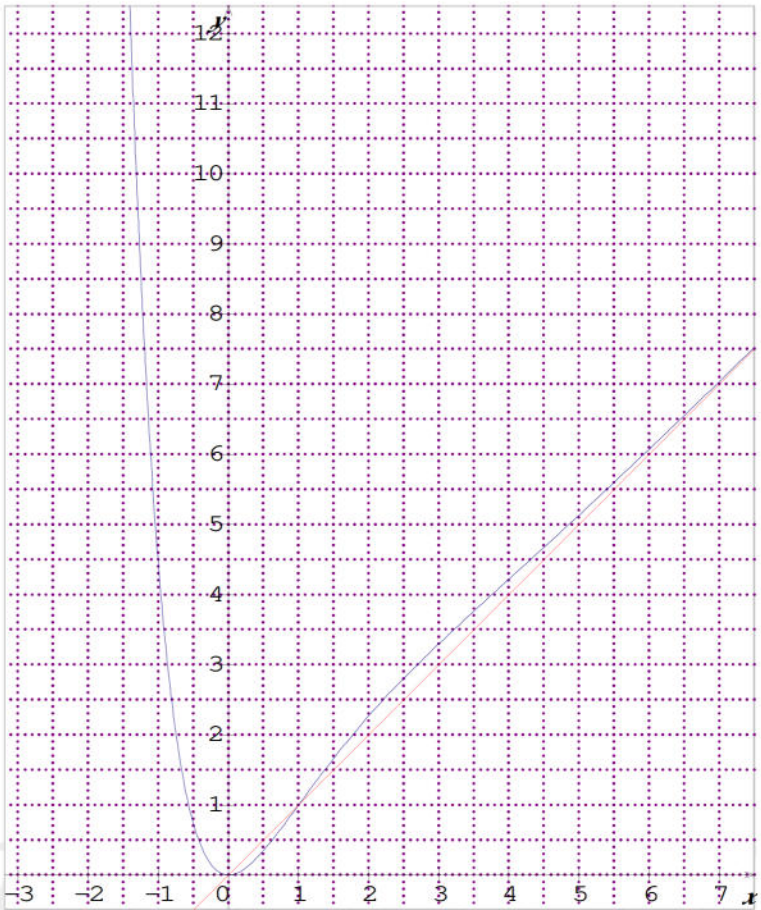
| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

✓ $f''$ تنعدم و تغير إشارتها عند العدد 1 إذن $(C)$ نقطة انعطاف أفصولها 1

✓ $f''$ تنعدم و تغير إشارتها عند العدد 4 إذن $(C)$ نقطة انعطاف أفصولها 4

و منه المنحنى $(C)$ يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما على التوالي هما 1 و 4

(5




**6)** أ- لنبين أن الدالة $H : x \mapsto (x^2+2x+2)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto -x^2e^{-x}$ على $\mathbb{R}$

✓ لدينا : $H : x \mapsto (x^2+2x+2)e^{-x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

✓ ليكن $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} H'(x) &= \left((x^2+2x+2)e^{-x}\right)' \\ &= (x^2+2x+2)'e^{-x} + (x^2+2x+2)(e^{-x})' \\ &= (2x+2)e^{-x} - (x^2+2x+2)e^{-x} \\ &= (2x+2-x^2-2x-2)e^{-x} \\ &= -x^2e^{-x} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

إذن $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad H'(x) = h(x)$

✓ و منه الدالة $H : x \mapsto (x^2+2x+2)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto -x^2e^{-x}$ على $\mathbb{R}$

- $\int_0^1 x^2e^{-x}dx=\int_0^1 -h(x)dx=\left[-H(x)\right]_0^1=\left[-\left(x^2+2x+2\right)e^{-x}\right]_0^1=\left(\frac{-5}{e}\right)-(-2)=2-\frac{5}{e}=\frac{2e-5}{e}$

ب-

$$\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=e^{-x} \end{cases} \searrow \begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=-e^{-x} \end{cases} \downarrow$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^{-x}dx &= \left[-xe^{-x}\right]_0^1-\int_0^1 -e^{-x}dx \\
&= \left(\left(-\frac{1}{e}\right)-(0)\right)-\left[e^{-x}\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}-1\right) \\
&= \frac{-2}{e}+1 \\
&= \frac{e-2}{e}
\end{aligned}$$

ج- مساحة حيز المستوى المحصور بين $(C)$ و $(D)$ و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \left|f(x)-x\right|dx\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\| \\
&= \int_0^1 \left(x-f(x)\right)dx\times 1cm\times 1cm \\
&= \int_0^1 \left(-x^2+x\right)e^{-x}dx \\
&= \left(\int_0^1 -x^2e^{-x}dx+\int_0^1 xe^{-x}dx\right)cm^2 \\
&= \left(\left(\frac{5-2e}{e}\right)+\left(\frac{e-2}{e}\right)\right)cm^2 \\
&= \left(\frac{3-e}{e}\right)cm^2
\end{aligned}$$

**III.** لتكن المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة كما يلي : $u_0=\frac{1}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

1) لنبين بالترجع : $0\le u_n\le 1$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

✓ من أجل $n=0$ :

لدينا : $u_0=\frac{1}{2}$

إذن : $0\le u_0\le 1$

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$

- نفترض أن : $0\le u_n\le 1$
- و نبين أن : $0\le u_{n+1}\le 1$ ؟

لدينا حسب الإفتراض : $0\le u_n\le 1$ و حسب نتيجة *السؤال* $II-3$) ب- لدينا $f$ تزايدية على $[0,1]$

إذن : $f(0)\le f(u_n)\le f(1)$

إذن : $0\le u_{n+1}\le 1$

✓ نستنتج أن : $0\le u_n\le 1$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

2) ليكن $n\in\mathbb{N}$ :

لدينا $f(x)-x\le 0\quad (\forall x\in[0,1])$

و بما أن $0\le u_n\le 1$

فإن : $f(u_n)-u_n\le 0$

و منه $u_{n+1}-u_n\le 0\quad (\forall n\in\mathbb{N})$

و بالتالي المتتالية $(u_n)$ تناقصية

3)

✓ بما أن $(u_n)$ تناقصية و مصغورة (بالعدد 0) فإنها متقاربة

✓ لدينا :

$u_0=\frac{1}{2}\in[0,1]$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

- لدينا : $f$ متصلة على $[0,1]$
- $f([0,1])=[f(0),f(1)]=[0,1]$
- $(u_n)$ متقاربة

إذن نهاية المتتالية $(u_n)$ هي حل للمعادلة : $f(x)=x$

$f(x)=x \Leftrightarrow x=0$ أو $x=1$

بما أن $(u_n)$ تناقصية فإن $u_n \leq u_0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

إذن $u_n \leq \frac{1}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

إذن $\lim_{n \to +\infty} u_n \leq \frac{1}{2}$

و منه $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

つづく