الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — ثانوية فارس بن مهل الشهبونية

امتحان البكالوريا التجريبية — دورة ماي 2015

الشعبة : آداب وفلسفة + لغات أجنبية

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة : 02 ســـا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول :

التمرين الأول(06 نقاط):

1. عيّن بواقي القسمة للعدد 2^n على 5 من أجل العدد الطبيعي n حيث : $n \in \{1;2;3,4\}$
2. بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $2^{4n} \equiv 1[5]$
3. استنتج بواقي القسمة للأعداد 2^{4n+1} ; 2^{4n+2} ; 2^{4n+3} على 5.
4. عيّن باقي قسمة كل من 2^{1436} و 2^{2015} على 5 .
5. تحقق أن : $2017 \equiv 2[5]$ ثم استنتج باقي قسمة 2017^{2014} على 5.

التمرين الثاني (06 نقاط):

(u_n) متتالية عددية معرفة كمايلي: $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$

1. احسب كلا من u_1, u_2, u_3.
2. نضع $v_n = u_n + \frac{1}{2}$ من اجل كل n من □.
   - برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين الأساس و الحد الأول.
   - عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n.
3. احسب المجموع S_n بحيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ ثم استنتج المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \cdots\cdots + u_n$.

التمرين الثالث(08 نقاط):

لتكن f الدالة المعرفة على □ $- \left\{\frac{1}{2}\right\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{3+2x}{1-2x}$,

و (c_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) استنتج المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) .

3) عين إحداثيات نقط تقاطع المنحنى (C) مع محوري الإحداثيات .

4) أكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$.

5) أرسم المماس (Δ) و المنحني (C_f) .

الموضوع الثاني:

التمرين الأول (06 نقاط):

(U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة معرفة على N حيث : $U_6 = 448$ و $U_3 \times U_5 = 12544$

1) أحسب الحد U_4 ثم الأساس q لهذه المتتالية .
2) أحسب الحد الأول U_0 لهذه المتتالية .
* نضع : $U_0 = 7$ و $q = 2$
3) أكتب عبارة U_n بدلالة n.
4) بين أن 896 هو حد من حدود المتتالية (U_n) وحدد رتبته .
5) أحسب المجموع : $S = U_6 + U_7 + ... + U_n$

التمرين الثاني : (06 نقاط)

a , b و c أعداد صحيحة بحيث باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 7 هو 3 , باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 7 هو 4 وباقي القسمة الإقليدية للعدد c على 7 هو 6 .

1)عين باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين : $a \times b$, $a^2 - b^2$.

2) أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $c^{2n} \equiv 1[7]$.

ب/ تحقق أن $2015 \equiv 6[7]$ ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين :

2015^{2014} و 2015^{2015} على 7 .

التمرين الثالث :(08نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على R بـ: $f(x) = -x^3 + 3x - 2$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) أحسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.
ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f واستنتج جدول تغيراتها .
2) أثبت أنه من أجل x من R : $f(x) = -(x-1)^2(x+2)$
3) برهن أن النقطة A من المنحني التي فاصلتها $x = 0$ هي نقطة انعطاف للمنحني (C_f).
4) تحقق من أن النقطة B التي إحداثيتها $(2;-4)$ هي نقطة من المنحني (C_f) ثم أوجد معادلة للمماس (Δ) للمنحني (C_f) عندها .
5) أنشئ (C_f) و (Δ) في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

المستوى: 3 آف + 3 لغ

تصحيح البكالوريا التجريبي

الموضوع الأول:

التمرين الأول:

1- تعيين بواقي قسمة 2^n على 5:

$2^0\equiv 1[5]$ ، $2^1\equiv 2[5]$ ، $2^2\equiv 4[5]$

$2^3\equiv 3[5]$ ، $2^4\equiv 1[5]$

n	4k	4k+1	4k+2	4k+3
البواقي	1	2	4	3

2- لدينا: $2^4\equiv 1[5]$ ومنه $2^{4n}\equiv 1[5]$

3- $2^{4n+1}\equiv 2[5]$ ، $2^{4n+2}\equiv 4[5]$ ، $2^{4n+2}\equiv 3[5]$

4- تعيين باقي قسمة كل من 2^{1436} و 2^{2015} على 5:

* لدينا: $1436=\underbrace{4\times 359}_{4k}$

ومنه: $2^{1436}\equiv 1[5]$

الباقي هو 1.

* لدينا: $2015=\underbrace{4\times 503+3}_{4k+3}$

ومنه: $2^{2015}\equiv 3[5]$

أي: الباقي هو 3.

5- * لدينا: $2017-2=2015$

ولكن 2015 من مضاعفات 5

ومنه: $2017\equiv 2[5]$

* لدينا: $2017\equiv 2[5]$ ومنه $2017^{2014}\equiv 2^{2014}[5]$

لكن $2^{2014}\equiv 4[5]$ ($2014=\underbrace{4\times 503+2}_{4k+2}$ لأن)

أي: $2017^{2014}\equiv 4[5]$ (خاصية التعدي)

التمرين الثاني:

$u_0=5$ ومن أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=3u_n+1$

1- $\boxed{u_1}=3u_0+1=15+1=\boxed{16}$

$\boxed{u_2}=3u_1+1=48+1=\boxed{49}$

$\boxed{u_3}=3u_2+1=147+1=\boxed{148}$

2- نضع من أجل $n\in\mathbb{N}$: $V_n=u_n+\frac{1}{2}$

أ-

$$V_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{2}=3u_n+1+\frac{1}{2}=3u_n+\frac{3}{2}=3\Big(\underbrace{u_n+\frac{1}{2}}_{V_n}\Big)=3V_n$$

ومنه متتالية (V_n) هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول V_0 حيث:

$\boxed{V_0}=u_0+\frac{1}{2}=5+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{11}{2}}$

ب- تعيين عبارتي V_n و u_n بدلالة n:

* لدينا: $V_n=V_0\times q^n$

ومنه: $\boxed{V_n=\left(\frac{11}{2}\right)\times(3)^n}$

* لدينا: $V_n=u_n+\frac{1}{2}$ ومنه $u_n=V_n-\frac{1}{2}$

أي: $\boxed{u_n=\left(\frac{11}{2}\right)3^n-\frac{1}{2}}$

3-

$$S_n=V_0+V_1+\dots+V_n=V_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)=\frac{11}{2}\left(\frac{1-(3)^{n+1}}{1-3}\right)$$

$$\boxed{S_n=\frac{11}{4}\left(3^{n+1}-1\right)}$$

$S'_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

$= \left(V_0 - \frac{1}{2}\right) + \left(V_1 - \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(V_n - \frac{1}{2}\right)$

$= \left(V_0 + V_1 + \cdots + V_n\right) - \frac{1}{2}(n+1)$

$= S_n - \frac{1}{2}(n+1)$

$= \frac{11}{4}\left(3^{n+1} - 1\right) - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$

$$\boxed{S'_n = \frac{11 \cdot 3^{n+1}}{4} - \frac{1}{2}n - \frac{13}{4}}$$

التمرين الثالث:

$f(x) = \frac{3+2x}{1-2x}$

1- دراسة تغيرات الدالة f:

$D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{+2x}{-2x} = -1$

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} \frac{1}{2}} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} \frac{1}{2}} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$	0	$-$	

f دالة قابلة للاشتقاق على مجالي التعريف

ومنه $f'(x) = \frac{2(1-2x)+2(3+2x)}{(1-2x)^2}$

$f'(x) = \frac{2 \cancel{-4x} + 6 \cancel{+4x}}{(1-2x)^2} = \frac{8}{(1-2x)^2}$

لدينا من أجل $x \in D_f$ يكون $f'(x) > 0$

ومنه f دالة متزايدة تماما على مجالي التعريف:

جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$		↗ $+\infty$	‖	↗ -1	

2- المستقيمات المقاربة:

$\boxed{y=-1}$ معادلة لمستقيم مقارب لـ (C_f) موازي لمحور الفواصل.

$\boxed{x=\frac{1}{2}}$ معادلة لمستقيم مقارب لـ (C_f) موازي لمحور التراتيب.

3- أ- التقاطع مع محور الفواصل:

معناه $f(x)=0$ معناه $\begin{cases} 3+2x=0 \\ \text{و} \\ 1-2x \neq 0 \end{cases}$

معناه $x = \frac{-3}{2}$ و $x \neq \frac{1}{2}$

ومنه نقطة التقاطع هي:

$H\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$.

ب- التقاطع مع محور التراتيب:

$f(0)=y$ ومنه $y=3$

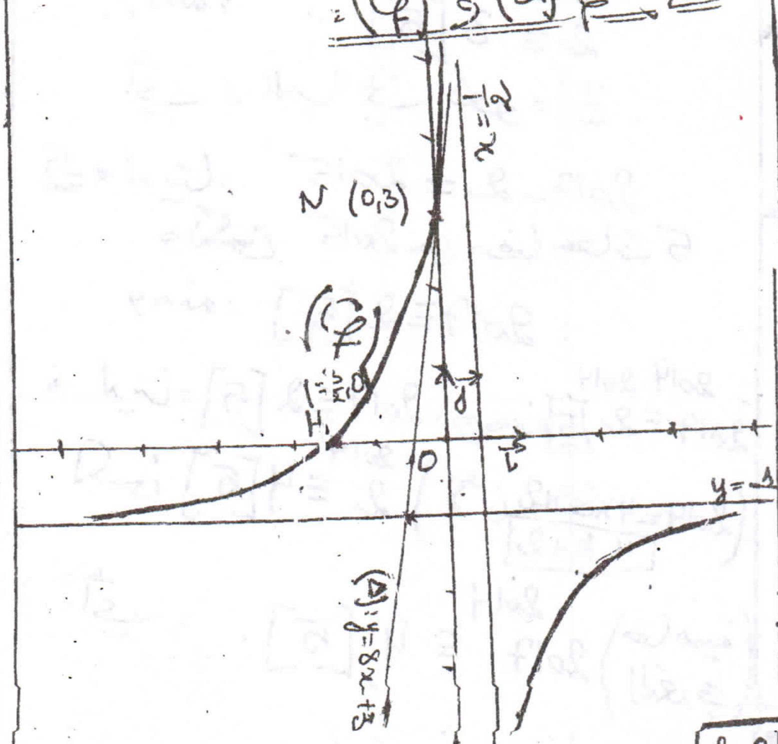
نقطة التقاطع هي $N(0,3)$.

4- كتابة معادلة المماس:

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

$(\Delta): \boxed{y = 8x + 3}$

5- رسم (Δ) و (C_f):



الموضوع الثاني:

التمرين الأول:

$U_6 = 448$ ، $U_3 \times U_5 = 12544$

1- حساب U_4: لدينا

$U_4^2 = U_3 \times U_5 = 12544$

ومنه $U_4 = \sqrt{12544}$

$\boxed{U_4 = 112}$

لدينا: $U_6 = U_4 \times q^2$

ومنه $q^2 = \frac{U_6}{U_4} = \frac{448}{112}$

$\boxed{q^2 = 4}$

أي $\boxed{q=2}$ أو $\boxed{q=-2}$ مرفوض

بما أن الحدود موجبة فإن $\boxed{q=2}$

2- حساب U_0:

لدينا: $U_4 = U_0 \times q^4$ ومنه $U_0 = \frac{U_4}{q^4}$

أي: $U_0 = \frac{112}{\underset{2^4}{16}} = 7$

نضع: $\boxed{U_0 = 7}$ و $\boxed{q=2}$

3- كتابة عبارة U_n بدلالة n:

لدينا: $U_n = U_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{U_n = 7\times 2^n}$

4- إثبات أن 896 هو حد من حدود (U_n):

لدينا: $U_n = 896$ ومنه $7\times 2^n = 896$

ومنه $2^n = \frac{896}{7}$

ومنه: $2^n = 128 = 2^7$

ومنه: $\boxed{n=7}$

128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2

وبالتالي العدد 896 هو حد من حدود (U_n) رتبته 7.

5- حساب S_n:

$S_n = U_6 + U_7 + \dots + U_n$

$= U_6\left(\frac{1-q^{n-5}}{1-q}\right)$

$= 448\left(\frac{1-2^{n-5}}{1-2}\right)$

$\boxed{S_n = 448\left(2^{n-5}-1\right)}$

التمرين الثاني:

لدينا: $a\equiv 3[7]$ ، $b\equiv 4[7]$ ، $c\equiv 6[7]$

1- *تعيين باقي القسمة لـ $a\times b$ على 7:

لدينا: $\begin{cases} a\equiv 3[7]\\ b\equiv 4[7]\end{cases}$ ومنه: $a\times b \equiv \underset{}{\overset{3\times 4}{12}}[7]$

لكن: $12\equiv 5[7]$

أي: $\boxed{a\times b\equiv 5[7]}$

*تعيين باقي القسمة لـ a^2-b^2 على 7:

لدينا: $\begin{cases} a\equiv 3[7]\\ b\equiv 4[7]\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} a^2\equiv 9[7]\\ b^2\equiv 16[7]\end{cases}$

ومنه: $a^2-b^2 \equiv \boxed{9-16} \equiv -5[7]$

لكن $-5\equiv 2[7]$

ومنه: $\boxed{a^2-b^2\equiv 2[7]}$

2- أ) لدينا: $c\equiv 6[7]$ ومنه $c^2\equiv 1[7]$

أي: $\boxed{c^{2n}\equiv 1[7]}$

ب- لدينا $2015 - 6 = 2009$

لكن 2009 من مضاعفات العدد 7

ومنه: $\boxed{2015 \equiv 6\,[7]}$.

تعيين بواقي القسمة للعدد 6^n على 7:

$6^0 \equiv 1\,[7]$ ، $6^1 \equiv 6\,[7]$ ، $6^2 \equiv 1\,[7]$

لما $n=2k$ فإن الباقي هو 1

لما $n=2k+1$ فإن الباقي هو 6.

لدينا: * $2015 \equiv 6\,[7]$ ومنه: $2015^{2014} \equiv 6^{2014}\,[7]$

لكن $6^{2014} \equiv 1\,[7]$ $(2014 = 2\times 1007)$

أي: $\boxed{2015^{2014} \equiv 1\,[7]}$

لدينا: * $2015 \equiv 6\,[7]$ ومنه $2015^{2015} \equiv 6^{2015}\,[7]$

لكن $6^{2015} \equiv 6\,[7]$

أي $\boxed{2015^{2015} \equiv 6\,[7]}$.

التمرين الثالث:

$f(x) = -x^3+3x-2$

$D_f = \mathbb{R}$

1) أ- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$.

ب- دراسة اتجاه التغير:

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه:

$f'(x) = -3x^2+3 = -3(x^2-1)$

$f'(x)=0$ معناه $x^2-1=0$

معناه $x^2=1$

معناه $x=1$ أو $x=-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-1)=-4$	↗	$f(1)=0$	↘	$-\infty$

2) $-(x-1)^2(x+2) = f(x)$

(النشر والتبسيط).

3) f' دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه:

$f''(x) = -6x$

$f''(x)=0$ معناه $x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه $A(0,-2)$ نقطة انعطاف لـ (C_f).

4) لدينا: $f(2) = -4$

ومنه $B(2,-4)$ نقطة من (C_f):

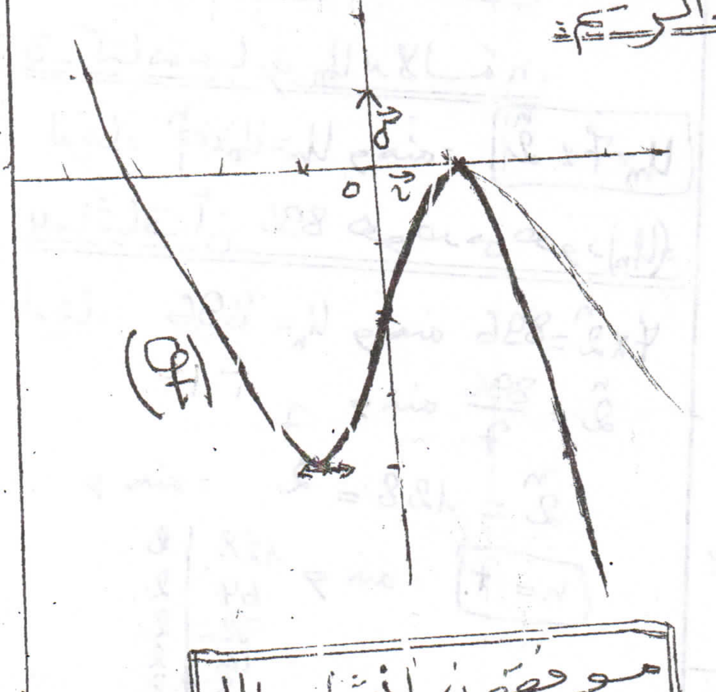
كتابة معادلة المماس عند B:

$y = f'(2)(x-2)+f(2)$

$= -9x+18-4$

$\boxed{(\Delta):\ y = -9x+14}$

5_ الرسم:



موفقون إن شاء الله