

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقط)

(1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على IN بعدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = 3u_n - 2^n$$

أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 0$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة .

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $v_n = 2^n - u_n$

أ - بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 .

ب- عبر عن v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n .

(3) أ - أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. ماذا تستنتج؟

ب - نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

بين أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = 2^n - \frac{1+3^n}{2}$

(4) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5 والعدد 3^n على 4

ب - عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $2017 + (1962)^{2n} + (2967)^n \equiv 0 [4]$

ج - عين قيم العدد الطبيعي n التي : $4u_n + 9v_n \equiv 1 [20]$

التمرين الثاني: (04 نقط)

(I) من أجل كل عدد مركب z ، نضع : $p(z) = z^3 - 13z^2 + 59z - 87$

بين أن العدد 3 جذرا لكثير الحدود $p(z)$ ثم حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة : $p(z) = 0$

(II) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C لاحتقاتها على الترتيب 3 ، $z_A = 3$ ، $z_B = 5 - 2i$ ، $z_C = \overline{z_B}$.

(1) عين طبيعة المثلث ABC .

(2) M نقطة من المستوي لاحتقتها العدد المركب z و L عدد مركب حيث : $L = \frac{z-3}{z-5+2i}$

مع $z \neq 5 - 2i$

أ - أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب L .

ب - عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحة z التي من أجلها يكون L عددا حقيقيا سالبا تماما .

(3) لتكن (C) الدائرة المحيطة بالمثلث ABC و Ω النقطة ذات اللاحة $2-i$.

أ- أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه Ω ، زاويته $(-\frac{\pi}{2})$ ونسبته 2 .

ب- عين (C') صورة الدائرة (C) بالتشابه المباشر S .

التمرين الثالث: (05 نقط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نعتبر النقط $A(4; 2; 2)$ ، $B(5; -2; 3)$ ، $C(1; 1; 1)$ والمستقيم (Δ) المعروف بالتمثيل الوسيطى:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

(P) هو المستوي الذي يمر بالنقطة A و عمودي على المستقيم (Δ)

- (1) أ - أكتب معادلة ديكراتية للمستوي (P)
ب - تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي (P) وأن النقطة C لا تنتمي إلى (P)
- (2) أ - تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) وأن النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم (Δ)
ب - عين إحداثيات النقطة D المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (P)
- (3) أ - بين أن النقط A, B, C, D ليست من نفس المستوي
ب - عين طبيعة المثلث ABD ثم احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$
- (4) عين مركزي سطحي الكرتين اللذين يمسان المستوي (P) في النقطة D و نصف قطر كل منهما 3
- (5) m عدد حقيقي و (P_m) المستوي المعرف بالمعادلة $mx - 2(m-1)y - z + m - 1 = 0$
أثبت أنه من أجل كل قيمة للعدد الحقيقي m جميع المستويات (P_m) تشمل مستقيماً ثابتاً (d) ، يطلب تعيين تمثيلاً وسيطياً له.

التمرين الرابع: (07 نقط)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $g(x) = 1 + 4x e^{2x}$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) > 0$

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f(x) = (2x - 1)e^{2x} + x + 1$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$

(1) أ - أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وبيّن أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

ب - بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(2) أ - بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x + 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

ب - أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(3) أ - بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

ب - أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

(4) أرسم (Δ) و (T) ثم المنحنى (C_f) .

(5) أ - باستعمال الكاملة بالتجزئة أحسب : $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x} dx$

ب - أحسب بـ: cm^2 مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (T)

والمستقيمين الذين معادلتهما : $x = \frac{1}{2}$ و $x = 0$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط: $A(1;0;0)$ ، $B(0;2;0)$ ، $C(0;0;2)$ و $\Omega(\frac{1}{2};1;1)$ و H المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوي (ABC)

- (1) - عين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
- (2) - أوجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(H\Omega)$ ثم حدد إحداثيات النقطة H .
- (3) - نعتبر سطح الكرة (S_λ) التي مركزها Ω وطول نصف قطرها λ بحيث λ عدد حقيقي موجب تماما
أ - أعط معادلة ديكارتية لـ (S_λ) .
ب - عين قيمة λ في الحالتين :

- المستوي (ABC) مماسا لسطح الكرة (S_λ) .
- تقاطع المستوي (ABC) و سطح الكرة (S_λ) هو الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

التمرين الثاني: (04 نقط)

- (1) نعتبر في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة $(E): 414x - 1170y = 72$
أ - عين القاسم المشترك الأكبر للأعداد 1170 ، 414 و 72 .
ب - بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) من الأعداد الصحيحة حلا للمعادلة (E) فان : $y \equiv 1[23]$.
ج - استنتج حلول المعادلة (E) .
- (2) N عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha\beta 0\alpha\beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 5، ويكتب $\overline{\beta\alpha 200}$ في نظام التعداد الذي أساسه 6. عين α و β ، ثم أكتب N في النظام العشري .
(3) أ - حل العدد 2968 إلى جداء عوامل أولية واستنتج الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم 2968
ب - نضع : $m = \text{ppcm}(a, b)$ و $d = \text{pgcd}(a, b)$
- عين الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية بحيث : $m^2 - 42d^2 = 2968$

التمرين الثالث : (05 نقط)

- نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B ، J و K التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 1 + i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_j = i\sqrt{2}$ و $z_k = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ لتكن النقطة L نظيرة J بالنسبة إلى K
- (1) بين أن لاحقة النقطة L تساوي $(-\sqrt{2})$
 - (2) أثبت أن A ، B ، J و L تنتمي إلى نفس الدائرة (C) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

- (3) نعتبر النقطة D لاحقتها $z_D = -z_B$ ونعتبر الدوران R الذي مركزه المبدأ O ويحول النقطة إلى D .
 أ - عين قيسا لزاوية الدوران R
 ب - عين لاحقة النقطة C صورة L بالدوران R ثم حدد طبيعة الرباعي $ABCD$ مع التعليل.
 (4) نعتبر التحويل النقطي T المعروف بـ : $T = R \circ H$ حيث H هو التحاكي الذي نسبته $\sqrt{2}$ ومركزه O .
 - حدد طبيعة التحويل T ثم عين عناصره المميزة .
 (5) عين (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللواحق z التي تحقق : $|z - z_A| = |\bar{z} - 2z_k|$ حيث z مرافق \bar{z} .

التمرين الرابع : (07 نقط)

- (1) لتكن g دالة معرفة على \mathbb{R} كما يلي $g(x) = e^{x-1} - x$
 أ - أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و تحقق أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
 ب - أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .
 ج - أستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .
 (2) لتكن f دالة معرفة على $R - \{1\}$ بـ : $f(x) = 1 + \ln(e^{x-1} - x)$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{i}, \bar{j})$.
 أ - أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها .
 ب - بين أن : $f'(x) = \frac{e^{x-1} - 1}{e^{x-1} - x}$ من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 .
 ج - استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
 (3) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ ثم فسر النتيجة هندسيا .
 (4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,75 < \alpha < 1,76$
 (5) أحسب $f(0)$ و $f(-3)$ ثم أنشئ المنحنى (C_f) .
 (6) ليكن n عدد طبيعي .

أ - أحسب $I_n = \int_n^{n+1} [x + g(x)] dx$

- ب - بين أن (I_n) متتالية هندسية يطلب أساسها و حدها الأول I_0 .
 ج - احسب المجموع : $S_n = I_0 + I_1 + \dots + I_n$ بدلالة n ثم أحسب نهاية S_n .

بالتوفيق