ثانوية بلحاج قاسم نورالدين الشلف — التاريخ : 2015 /04/15 — السنة الدراسية : 2015 / 2014

المستوى : 3 ثانوي — الشعبة : رياضيات — الموضوع الأول

# اختبار في مادة الرياضيات

## التمرين الأول ☹☺( 04 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب $z$ التالية : $z^2-8z+17=0$ .

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط $D,\mathrm{B},\mathrm{A}$ التي لواحقها على الترتيب $b=4+i, a=4-i$ و $d=-i$ .

و ليكن $R$ الدوران الذي مركزه النقطة $\Omega$ ذات اللاحقة $\omega=2$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ) بين أنَ العبارة المركبة للدوران $R$ من الشكل : $z'=iz+2-2i$ .

ب) تحقق أنَ لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $B$ بالدوران $R$ هي $c=1+2i$ .

ج) بين أنَ : $\frac{c-d}{c-b}=-i$ ثم أستنتج طبيعة المثلث $BCD$ .

د) بين أنَ النقط $C,\mathrm{B},\mathrm{A}$ و $D$ تنتمي الى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها نصف قطرها .

ه) عين $(E)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ بحيث يكون ، $\left|-i-z\right|^2-\left|4-i-z\right|^2=16$ .

## التمرين الثاني ☹ ☺( 05 نقاط )

في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقطتين $I(3,-1,0), A(2,1,1)$ و

$(P)$ مجموعة النقط $M\left(x,y,z\right)$ من الفضاء التي تحقق، $MA^2-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI}=0$

1) أ) بين أن النقطة A تنتمي الى المجموعة $(P)$ .

ب) بين أن المجموعة $(P)$ هي مستو $x-2y-z+1=0$ معادلة ديكارتية له.

2) لتكن $(S)$ سطح كرة مركزها النقطة $I$ وتمر من النقطة $A$ .

- تحقق أن نصف قطر سطح الكرة $(S)$ هو $R=\sqrt{6}$ ثم عين معادلة ديكارتية لسطح الكرة $(S)$

3) ليكن $(P')$ المستوي ذي المعادلة $2x-y+z-4=0$ .

أ) بين أن $(P')$ يقطع $(S)$ وفق دائرة $(C)$ يطلب تعيين مركزها $H$ ونصف قطرها $r$ .

ب) لتكن $B(2;-2;-2)$ نقطة من الفضاء تحقق من أن القطعة $[AB]$ أحد أقطار الدائرة $(C)$ .

ج) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$ المماس لسطح الكرة $(S)$ في النقطة $B$ .

## ☝ التمرين الثالث ☺☺ ( 04 نقاط )

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$، بواقي القسمة الاقليدية للعدد $5^n$ على العدد 7.

2) عين قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون العدد $19^{6n+3}-5^{6n+4}+4n^2+1$ قابلا للقسمة على العدد 7.

3) $N$ عدد طبيعي يكتب $\overline{1xx0}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5. حيث $x$ عدد طبيعي.

أ) عين قيم العدد الطبيعي $x$ حتى يكون العدد $N$ قابلا للقسمة على 35.

ب) أكتب العدد $N$ في النظام العشري.

## ☝ التمرين الرابع☹ ☺ ( 07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+3\ln\left(\dfrac{x^2+2}{3x}\right)$

نسمي $(C_f)$ المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

**I.** 1) أحسب نهايتي الدالة $f$ عند 0 وعند $+\infty$.

2) بين أنه من أجل كل عدد موجب تماما $x$، $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x^2+4x+6)}{x(x^2+2)}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $f$

3) شكل جدول تغيرات الدالة $f$.

4) أدرس الوضع النسبي للمنحني $(C_f)$ بالنسبة الى المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y=x$.

5) أحسب $f(4)$ ثم أرسم $(\Delta)$ و $(C_f)$.

**II.** نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ: $u_0=\dfrac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $1<u_n<2$.

2) أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ثم استنتج أنها متقاربة.

3) عين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**✌بالتوفيق و النجاح☹في البكالوريا☺ جوان 2015 ❀أستاذ المادة**

ثانوية بلحاج قاسم نورالدين الشلف التاريخ : 30/ 04 / 2015 السنة الدراسية: 2014 / 2015

المستوى: 3 ثانوي الشعبة: رياضيات الموضوع الثاني

**اختبار في مادة الرياضيات**

**التمرين الأول ☹☺☹( 05 نقاط)**

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب $z$ التالية :

$\left(z^2+2z+4\right)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط $C,B,A$ و $D$ التي لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{3}+i$, $z_B=\overline{z_A}$, $z_C=-1-i\sqrt{3}$ و $z_D=\overline{z_C}$.

أ) أكتب الأعداد المركبة $z_A, z_B, z_C$ و $z_D$ على الشكل الأسي .

ب) بين أن النقط $C,B,A$ و $D$ تنتمي الى نفس الدائرة $(C)$ يطلب تعيين عناصرها .

ج) بين أنَ : $\dfrac{z_D-z_B}{z_A-z_C}=i$ ثم عين قيسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD}\right)$.

ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين $(AC)$ و $(BD)$؟

3) نعتبر العدد المركب $z_n$ الذي طويلته $\dfrac{1}{2^n}$ و $\dfrac{2n\pi}{3}$ عمدة له ، حيث $n$ عدد طبيعي .

ونعرف العدد المركب $L_n$ بـ : $L_n=z_D\times z_n$.

أ) أكتب كلا من العددين $L_1, L_0$ على الشكل الجبري .

ب) لتكن $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_n=\left|L_n\right|$ من أجل كل عدد طبيعي $n$.

- بين أن المتتالية $(u_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
- لتكن النقط $M_n,...,M_1,M_0$ صور الأعداد المركبة $L_n,...,L_1,L_0$ على الترتيب .

أحسب بدلالة $n$ المجموع ، $S_n=\left\|\overrightarrow{OM_0}\right\|+\left\|\overrightarrow{OM_1}\right\|+...+\left\|\overrightarrow{OM_n}\right\|$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

**التمرين الثاني ☹☺☺ ( 04 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A(1;2;3)$, $B(0;1;4)$, $C(-1;-3;2)$

و $D(4;-2;5)$ و الشعاع $\vec{n}=2\vec{i}+a\vec{j}+b\vec{k}$ حيث $b,a$ عددان حقيقيان .

1. أ) بين أن النقط $C,B,A$ تعين مستويا $(ABC)$ .

ب)عين العددين الحقيقيين $b,a$ بحيث يكون الشعاع $\vec{n}$ ناظميا للمستوي $(ABC)$ ثم عين معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$ .

2. ليكن المستقيم $\Delta$ ذي التمثيل الوسيطي: $\begin{cases}x=2-2t\\ y=-1+t; \quad t\in\mathbb{R}\\ z=4-t\end{cases}$

أ) بين أن النقطة $D$ تنتمي إلى المستقيم $\Delta$ وأن المستقيم $\Delta$ عمودي على المستوي $(ABC)$ .

ب) عين إحداثيات النقطة $H$ المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$ .

ج) أحسب المسافة بين النقطة $D$ والمستوي $(ABC)$ .

د) بين أن النقطة $H$ هي مركز ثقل المثلث $ABC$.

3. أدرس تقاطع المستقيم $\Delta$ مع المستوي $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ .

## التمرين الثالث ☹☹☹ ( 04 نقاط )

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الاقليدية للعدد $2^n$ على العدد $5$.

2) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $\left(2017^{4n+3}-2\times2016^{8n}+2014^{2n+1}\right)$ على العدد $5$ حيث $n$ عدد طبيعي.

3) بين أن العدد $131$ أولي .

4) عين الأعداد الطبيعة $n$ التي تحقق : $\begin{cases}3m+7d=2^n-48\\ ab=5m\end{cases}$

حيث ، $d=PGCD(a,b)$ و $m=PPCM(a,b)$.

5) عين قيم $n$ بحيث يكون ، $7<n<15$ ثم استنتج الثنائيات $(a;b)$.

## التمرين الرابع☹ ☺☹ ( 07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(1-2x)e^{2x}$

نسمي $(C_f)$ المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.( وحدة الطول $2cm$)

**I.** 1) أحسب نهايتي الدالة $f$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2) أحسب عبارة $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ .

3) شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

**4)** حل المعادلة $f(x)=0$ ثم استنتج نقاط تقاطع $(C_f)$ مع محور الفواصل.

5) أحسب $f(1)$ ثم أرسم $(C_f)$.

6) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ التالية :
$(E): f(x)=f(m)$

7) أ) عين العددين الحقيقيين $b,a$ بحيث تكون الدالة $F$ المعرفة بـ : $F(x)=(ax+b)e^{2x}$ دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$.

ب) أحسب بـ $cm^2$ و بدلالة $\lambda$ المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني $(C_f)$ و المستقيمات التي معادلاتها : $x=\frac{1}{2}, y=0$ و $x=\lambda$ حيث $\lambda<\frac{1}{2}$ ثم أحسب $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}S(\lambda)$.

**II.** نسمي $f'=f^{(1)}, f''=f^{(2)}, f'''=f^{(3)}, ..., f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة $f$ .

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$ .

2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ المنحني $\left(C_{f^{(n)}}\right)$ الممثل للدالة $f^{(n)}$ حيث $f^{(n)}$ الدالة المشتقة من الرتبة $n$ للدالة $f$ يقبل مماسا يوازي حامل محور الفواصل في النقطة $M_n(x_n;y_n)$.

أ) أحسب بدلالة $n$ كلا من $x_n$ و $y_n$ .

ب) بين أن المتتالية $(x_n)$ حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

ج) بين أن المتتالية $(y_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$

**✌بالتوفيق و النجاح ☹في البكالوريا☺☺ جوان 2015 ❀أستاذ المادة**

☜ تصحيح الموضوع التجريبي الأول للبكالوريا 2015 – الشعبة : رياضيات

<table>
<tr><th>التصحيح</th><th>العلامة</th></tr>
<tr><td>☜ التمرين الأول :</td><td></td></tr>
<tr><td>1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب $z$ التالية :<br>$z^2-8z+17=0$.</td><td></td></tr>
<tr><td>• حل المعادلة : $z^2-8z+17=0$<br>- حساب المميز $\Delta$ : $\Delta=(-8)^2-4(1)\times(17)=-4$<br>أي $\Delta=(2i)^2$<br>- المعادلة تقبل حلين هما :<br>$z_1=\dfrac{8-2i}{2}=4-i$ ، $z_2=\dfrac{8+2i}{2}=4+i$<br>مجموعة الحلول: $S=\{4-i;4+i\}$</td><td>$0.5+2\times0.25$</td></tr>
<tr><td>2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر<br>النقط $A,B,D$ التي لواحقها على الترتيب $a=4-i$, $b=4+i$ و $d=-i$.<br>و ليكن $R$ الدوران الذي مركزه النقطة $\Omega$ ذات اللاحقة $\omega=2$ و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$<br>أ) بين أنَ العبارة المركبة للدوران $R$ من الشكل : $z'=iz+2-2i$.</td><td></td></tr>
<tr><td>• تبيان أن العبارة المركبة للدوران $R$ من الشكل : $z'=iz+2-2i$:<br>- العبارة المركبة للدوران $R$ من الشكل : $z'-\omega=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-\omega)$<br>أي $z'-2=i(z-2)$ ومنه $z'=i(z-2)+2=iz+2-2i$<br>إذن $z'=iz+2-2i$</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>ب) تحقق أنَ لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $B$ بالدوران $R$ هي $c=1+2i$</td><td></td></tr>
<tr><td>• التحقق أن لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $B$ بالدوران $R$ هي $c=1+2i$:<br>• لدينا : $R(B)=C$ يعني<br>$c=i\times b+2-2i=i(4+i)+2-2i=4i-1+2-2i=1+2i$<br>$c=1+2i$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>ج) بين أنَ : $\dfrac{c-d}{c-b}=-i$ ثم أستنتج طبيعة المثلث $BCD$.</td><td></td></tr>
<tr><td>• تبيان أن $\dfrac{c-d}{c-b}=-i$:<br>- لدينا : $\dfrac{c-d}{c-b}=\dfrac{1+2i-(-i)}{1+2i-(4+i)}=\dfrac{1+3i}{-3+i}=\dfrac{(1+3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)}$<br>ومنه $\dfrac{c-d}{c-b}=\dfrac{-3-i-9i+3}{9+1}=\dfrac{-10i}{10}=-i$</td><td>0.5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>

• **استنتاج طبيعة المثلث $BCD$ :**

- لدينا : $\left|\frac{c-d}{c-b}\right|=|-i|=1$ ولدينا $\arg\left(\frac{c-d}{c-b}\right)=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}$
- يعني $\frac{DC}{BC}=1$ أي $DC=BC$ و $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DC}\right)=-\frac{\pi}{2}$ أي $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{DC}$

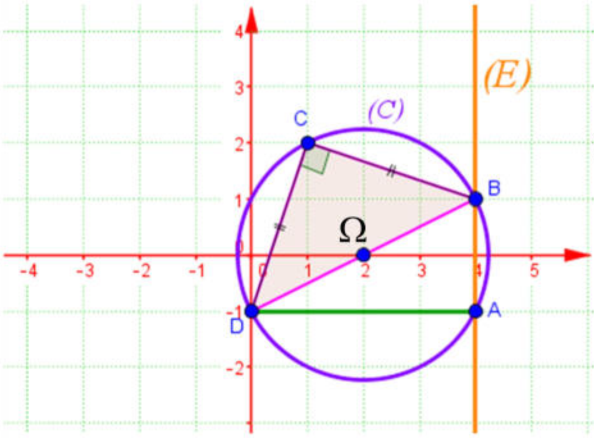
**إذن المثلث $BCD$ قائم في $C$ ومتساوي الساقين**

</td><td>$0.25+0.25$</td></tr>
<tr><td>

**د) بين أنَ النقط $C,B,A$ و $D$ تنتمي الى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها نصف قطرها**

</td><td></td></tr>
<tr><td>

• **تبيان أنَ النقط $C,B,A$ و $D$ تنتمي الى نفس الدائرة :**




المثلث $BCD$ قائم في $C$ وبالتالي النقط $D,C,B$ تنتمي الى دائرة مركزها منتصف الوتر أي $\Omega$.

ولدينا :

$\Omega A=|z_A-z_\Omega|=|4-i-2|=|2-i|$

$\Omega A=\sqrt{5}$

إذن : $\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega D=\sqrt{5}$

ومنه النقط $C,B,A$ و $D$ تنتمي الى نفس الدائرة

**مركزها** $\Omega(2;0)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{5}$.

</td><td>0.5<br><br>0.5</td></tr>
<tr><td>

**ه) عين $(E)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ بحيث يكون ،**

$|-i-z|^2-|4-i-z|^2=16$.

</td><td></td></tr>
<tr><td>

• **تعيين مجموعة النقط $(E)$ من المستوي والتي تحقق : $|-i-z|^2-|4-i-z|^2=16$:**

$|-i-z|^2-|4-i-z|^2=16$ **يعني** $MD^2-MA^2=16$

ولتكن النقطة $I$ منتصف القطعة $[DA]$

إذن لدينا : $\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2=16$

أي $\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{ID}^2-\overrightarrow{MI}^2-2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IA}^2=16$

ومنه $2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{ID}-2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}=16$ لان $\overrightarrow{ID}^2=\overrightarrow{IA}^2$ ( $I$ منتصف القطعة $[DA]$)

وبالتالي : $2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{ID}-\overrightarrow{IA}\right)=16$ أي $2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AD}=16$

إذن : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{DA}=8$

لتكن $H$ المسقط العمودي للنقطة $M$ على $(DA)$ حيث $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{DA}=8$

أي $IH\times DA=8$

- ولدينا : $DA=|z_A-z_D|=|4-i+i|=|4|=4$ وبالتالي $IH=2$
- **وبالتالي $H$ منطبقة على النقطة $A$.**

إذن $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{DA}=8$ يعني $\left(\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HM}\right).\overrightarrow{DA}=8$

ومنه $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{DA}=8$ أي $8+\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{DA}=8$

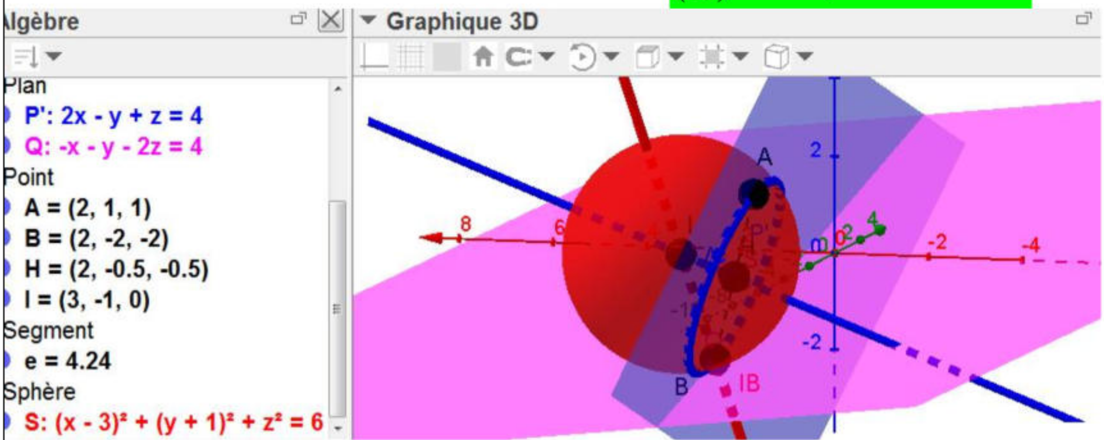
وبالتالي $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DA}=0$ ( لان $H=A$ )

أي **المجموعة $(E)$ هي المستقيم العمودي على $(DA)$ و المار من $A$**

</td><td>01</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| | $(E)=(AB)$<br>☜ **أوبطريقة أخرى :**<br>$\|-i-z\|^2-\|4-i-z\|^2=16$ **يعني** $\|-i-x-iy\|^2-\|4-i-x-iy\|^2=16$<br>ومنه : $\|-x+i(-1-y)\|^2-\|4-x+(-1-y)\|^2=16$<br>أي $(-x)^2+(-1-y)^2-(4-x)^2-(-1-y)^2=16$ ومنه<br>$x^2-16+8x-x^2=16$<br>ومنه : $8x=32$<br>**وبالتالي :** $x=4$ **المجموعة** $(E)$ **هي المستقيم ذي المعادلة** $x=4$ **العمودي على** $(x'x)$ **والمار من النقطة** $A$ |
| | ☜ **التمرين الثاني :** |
| | **في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس** $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ **نعتبر النقطتين** $I(3,-1,0),A(2,1,1)$ **و** $(P)$ **مجموعة النقط** $M(x,y,z)$ **من الفضاء التي تحقق،**<br>$MA^2-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI}=0$ |
| | **1) أ) بين أن النقطة A تنتمي الى المجموعة** $(P)$ . |
| 0.5 | • **تبيان أن النقطة A تنتمي الى المجموعة** $(P)$ **:**<br>- **لدينا :** $AA^2-\overrightarrow{AA}.\overrightarrow{AI}=0$ ومنه $A\in(P)$ |
| | **ب) بين أن المجموعة** $(P)$ **هي مستو** $x-2y-z+1=0$ **معادلة ديكارتية له.** |
| 0.5 | • **تبيان أن المجموعة** $(P)$ **هي مستو** $x-2y-z+1=0$ **معادلة ديكارتية له:**<br>- **لدينا :** $MA^2-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI}=0$ يعني $\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI}=0$<br>**ومنه** $\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MI})=0$ أي $\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{IM})=0$<br>**وبالتالي** $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{IA}=0$ أي $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI}=0$<br>**المجموعة** $(P)$ **هي مستو** $\overrightarrow{IA}$ **شعاع ناظمي له و يمر من النقطة A**<br>- **تعيين معادلة ديكارتية للمستوي** $(P)$**:**<br>لدينا : $\overrightarrow{AI}(1;-2;-1)$<br>معادلة $(P)$ **من الشكل** $x-2y-z+d=0$<br>- **تعيين قيمة** $d$ : نعوض بإحداثيات النقطة A **نجد :** $2-2(1)-1+d=0$<br>**ومنه** $d=1$ **أي معادلة** $(P)$ **هي** $x-2y-z+1=0$ |

| | |
|---|---|
| | **2) لتكن $(S)$ سطح كرة مركزها النقطة $I$ وتمر من النقطة $A$.**<br>▪ **تحقق أن نصف قطر سطح الكرة $(S)$ هو $R=\sqrt{6}$ ثم عين معادلة ديكارتية لسطح الكرة $(S)$** |
| 0.5<br><br>0.5 | • **التحقق أن نصف قطر $(S)$ هو $R=\sqrt{6}$ :**<br>- **لدينا :** $R=AI=\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$.<br>- **تعيين معادلة ديكارتية لسطح الكرة $(S)$:**<br>$(x-3)^2+(y+1)^2+z^2=6$ |
| | **3) ليكن $(P')$ المستوي ذي المعادلة** $2x-y+z-4=0$.<br>**أ) بين أن $(P')$ يقطع $(S)$ وفق دائرة $(C)$ يطلب تعيين مركزها $H$ ونصف قطرها $r$.** |
| 0.25 | • **تبيان أن $(P')$ قطع $(S)$ وفق دائرة $(C)$:**<br>- لدينا : $d(I,(P'))=\dfrac{\lvert 2(3)-(-1)+0-4\rvert}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(1)^2}}=\dfrac{\lvert 3\rvert}{\sqrt{6}}=\dfrac{3\sqrt{6}}{6}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$<br>أي لدينا : $d(I,(P'))<R$ ومنه **$(P')$ قطع $(S)$ وفق دائرة $(C)$** |
| 0.75 | • **تعيين مركز الدائرة $(C)$ ونصف قطرها :**<br>- **تمثيل وسيطي للمستقيم $(\Delta)$ المار من $I$ مركز سطح الكرة $(S)$ و العمودي على $(P')$:**<br>$(\Delta):\begin{cases}x=2t+3\\y=-t-1;(t\in\mathbb{R})\\z=t\end{cases}$<br>- **تعيين $H$ نقطة تقاطع المستقيم $(\Delta)$ مع المستوي $(P')$:**<br>نحل لجملة : $\begin{cases}x=2t+3\\y=-t-1\\z=t\\2x-y+z-4=0\end{cases}$<br>إذن : $2(2t+3)-(-t-1)+t-4=0$ ومنه $6t+3=0$ |

| | |
|---|---|
| وبالتالي $t=-\frac{1}{2}$ و بالتالي $\begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases}$ أي $H\left(2;-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ <br> **حساب نصف قطر دائرة التقاطع $(C)$:** $r=\sqrt{R^2-d^2\left(I,(P')\right)}=\sqrt{6-\frac{6}{4}}$ $\quad r=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ | |
| **ب) لتكن $B(2;-2;-2)$ نقطة من الفضاء تحقق من أن القطعة $[AB]$ أحد أقطار الدائرة $(C)$** | |
| • **التحقق من أن القطعة $[AB]$ أحد أقطار الدائرة $(C)$:** <br> - **لدينا :** $AB=\sqrt{(2-2)^2+(-2-1)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}=2r$ <br> **وبالتالي $[AB]$ أحد أقطار الدائرة $(C)$** | 0.5 |
| **ج) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$ المماس لسطح الكرة $(S)$ في النقطة $B$ .** | |
| • **كتابة معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$:** <br> - $\overrightarrow{IB}(-1;-1;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي $(Q)$. <br> - معادلة $(Q)$ من الشكل $-x-y-2z+d=0$ <br> - لتعيين قيمة $d$ نعوض بإحداثيات النقطة $B$ نجد : $-(2)-(-2)-2(-2)+d=0$ <br> أي $d=-4$ <br> إذن : $(Q):-x-y-2z-4=0$ <br>   | 0.5 |
| ☜ **<u>التمرين الثالث :</u>** | |
| **1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد $5^n$ على العدد 7 .** | |
| • **دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد $5^n$ على العدد 7 :** <br> - لدينا : <br> $5^0\equiv1[7]$ $\quad 5^1\equiv5[7]$ $\quad 5^2\equiv4[7]$ $\quad 5^3\equiv6[7]$ $\quad 5^4\equiv2[7]$ $\quad 5^5\equiv3[7]$ <br> $5^6\equiv1[7]$ | 0.75 |

<table>
<tr><td>0.75</td><td>
- بواقي القسمة الاقليدية للعدد $5^n$ على العدد 7 تشكل متتالية دورية دورها $p=6$<br>
- من أجل كل عدد طبيعي $k$ لدينا :<br>
<table>
<tr><td>$n$</td><td>$6k$</td><td>$6k+1$</td><td>$6k+2$</td><td>$6k+3$</td><td>$6k+4$</td><td>$6k+5$</td></tr>
<tr><td>$5^n \equiv ...[7]$</td><td>1</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td></td><td>
2) عين قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون العدد $19^{6n+3}-5^{6n+4}+4n^2+1$ قابلا للقسمة على العدد 7
</td></tr>
<tr><td>01</td><td>
• تعيين قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون : $19^{6n+3}-5^{6n+4}+4n^2+1\equiv 0[7]$ :<br>
- لدينا : $19\equiv 5[7]$ ومنه $19^{6n+3}\equiv 5^{6n+3}[7]$ أي $19^{6n+3}\equiv 6[7]$<br>
- ولدينا : $5^{6n+4}\equiv 2[7]$<br>
- إذن : $19^{6n+3}-5^{6n+4}+4n^2+1\equiv 0[7]$ يكافئ $6-2+4n^2+1\equiv 0[7]$<br>
أي $4n^2+5\equiv 0[7]$<br>
ومنه : $4n^2\equiv -5[7]$ إذن $4n^2\equiv 2[7]$<br>
وبالتالي : $n^2\equiv 4[7]$<br>
<table>
<tr><td>$n\equiv ...[7]$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>$n^2\equiv ...[7]$</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td></tr>
</table>
- ومنه : $n^2\equiv 4[7]$ يعني $n\equiv 2[7]$ أو $n\equiv 5[7]$<br>
أي $n=7\alpha+2$ أو $n=7\alpha+5$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$<br>
3) $N$ عدد طبيعي يكتب $\overline{1xx0}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5. حيث $x$ عدد طبيعي .<br>
أ) عين قيم العدد الطبيعي $x$ حتى يكون العدد $N$ قابلا للقسمة على 35.
</td></tr>
<tr><td>01</td><td>
• تعيين قيم العدد الطبيعي $x$ حتى يكون العدد $N$ قابلا للقسمة على 35:<br>
- لدينا : $N=1\times 5^3+x\times 5^2+x\times 5^1+0\times 5^0=125+30x$ مع $x<5$<br>
وبالتالي $N$ يقبل القسمة على 35 يعني $N\equiv 0[35]$<br>
أي أن $N\equiv 0[7]$ لان $N\equiv 0[5]$ و 5 أولي مع 7<br>
وبالتالي $N\equiv 0[7]$ يعني $125+30x\equiv 0[7]$<br>
ومنه : $6+2x\equiv 0[7]$<br>
يعني $2x\equiv -6[7]$ أي $2x\equiv 1[7]$<br>
وبالتالي : $x\equiv 4[7]$<br>
أي $x=7k+4$ مع $x<5$ إذن من أجل $k=0$ نجد $x=4$
</td></tr>
<tr><td></td><td>
ب) أكتب العدد $N$ في النظام العشري .
</td></tr>
<tr><td>0.5</td><td>
• كتابة العدد $N$ في النظام العشري:<br>
$N=125+30(4)=245$ $N=245$
</td></tr>
<tr><td></td><td>
☜ <u>التمرين الرابع :</u>
</td></tr>
<tr><td></td><td>
نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)$<br>
نسمي $(C_f)$ المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>I. 1) أحسب نهايتي الدالة $f$ عند 0 وعند $+\infty$.</td></tr>
<tr><td>$0.25+0.25$</td><td>

• حساب نهايتي الدالة $f$ :

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x+3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)\right)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)=+\infty\\ \lim_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)=+\infty\end{cases}$

- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(x+3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)\right)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)=+\infty\\ \lim_{x\to +\infty}\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)=+\infty\end{cases}$

</td></tr>
<tr><td></td><td>

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما $x$، $f'(x)=\frac{(x-1)(x^2+4x+6)}{x(x^2+2)}$ ثم

استنتج اتجاه تغير الدالة $f$

</td></tr>
<tr><td>$0.75$</td><td>

• حساب $f'(x)$ :

$$f'(x)=1+3\times\frac{\frac{2x(3x)-3(x^2+2)}{(3x)^2}}{\frac{x^2+2}{3x}}=1+3\times\frac{6x^2-3x^2-6}{9x^2}\times\frac{3x}{x^2+2}$$

أي $f'(x)=1+\frac{6x^2-3x^2-6}{9x^2}\times\frac{9x}{x^2+2}=1+\frac{3x^2-6}{x(x^2+2)}=\frac{x^3+3x^2+2x-6}{x(x^2+2)}$

وبالتالي : $f'(x)=\frac{(x-1)(x^2+4x+6)}{x(x^2+2)}$ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما $x$

</td></tr>
<tr><td>$0.5$</td><td>

• استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ :

$f'(x)=0$ يعني $\frac{(x-1)(x^2+4x+6)}{x(x^2+2)}=0$

ومنه $x-1=0$ أو $x^2+4x+6=0$ ( ليس لها حل لأن $\Delta=16-24=-8<0$ ) مع $x\in]0;+\infty[$

ومنه $x=1$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x-1)(x^2+4x+6)$ لأن $x(x^2+2)>0$

</td></tr>
</table>

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x^2+4x+6$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

- الدالة $f$ متناقصة على المجال $]0;1]$ و متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

3) شكل جدول تغيرات الدالة $f$.

- جدول تغيرات الدالة $f$ :

0.5

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

4) أدرس الوضع النسبي للمنحني $(C_f)$ بالنسبة الى المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y=x$.

01

- دراسة الوضع النسبي للمنحني $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y=x$ :

- ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$
- لدينا : $f(x)-y=x+3\ln\left(\dfrac{x^2+2}{3x}\right)-x=3\ln\left(\dfrac{x^2+2}{3x}\right)$
- $f(x)-y=0$ يعني $3\ln\left(\dfrac{x^2+2}{3x}\right)=0$

ومنه $\ln\left(\dfrac{x^2+2}{3x}\right)=0$ أي $\dfrac{x^2+2}{3x}=1$

- وبالتالي $x^2+2=3x$

إذن : $x^2-3x+2=0$

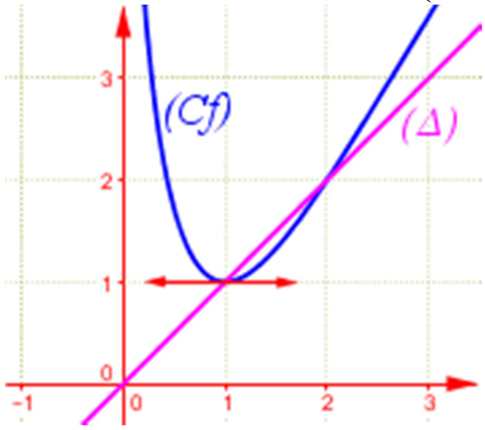
- حساب المميز : $\Delta=(-3)^2-4(1)(2)=9-8=1$

المعادلة تقبل حلين متمايزين هما : $x_1=\dfrac{3-1}{2}=1$ ، $x_1=\dfrac{3+1}{2}=2$

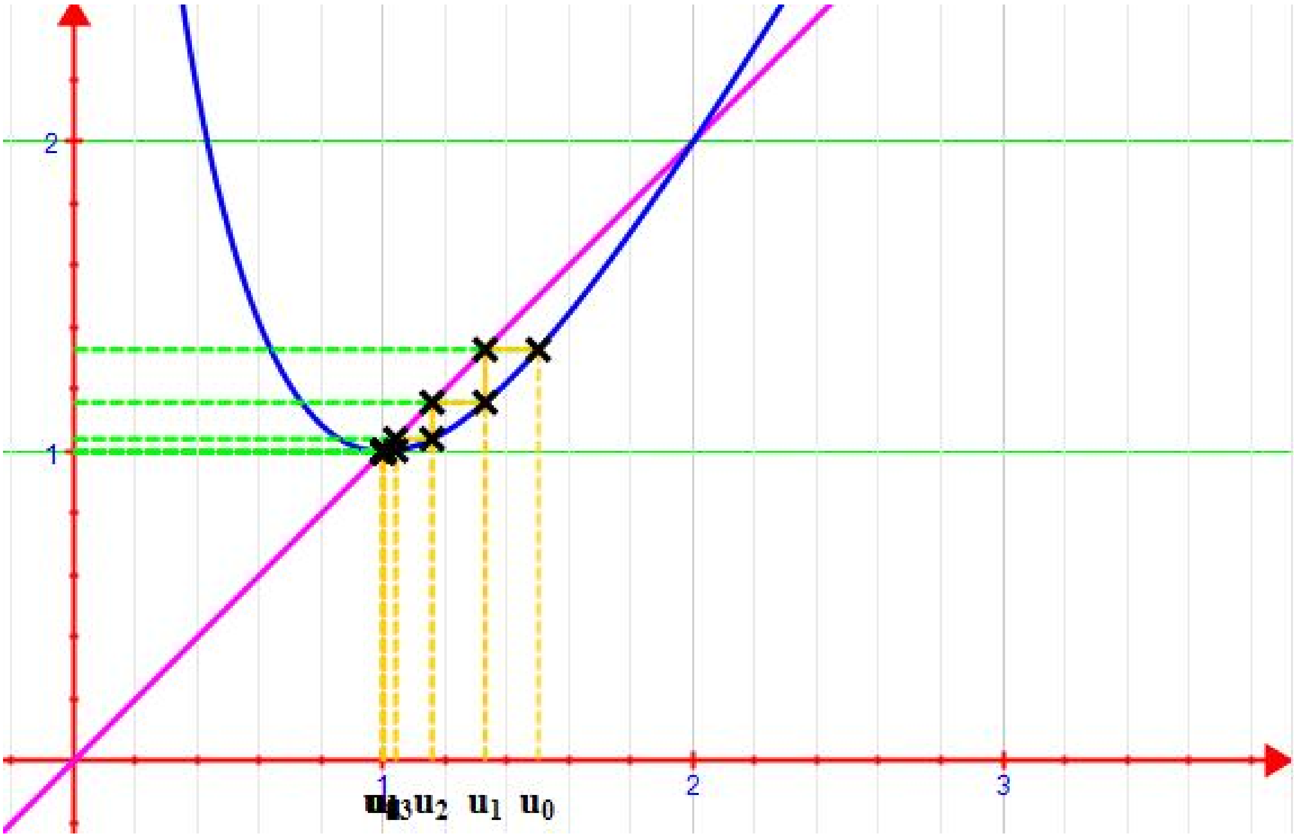
| $x$ | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| | ‖ | $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ | |

5) أحسب $f(4)$ ثم أرسم $(\Delta)$ و $(C_f)$.

- حساب $f(4)$ :

| | |
|---|---|
| 0.25<br><br>01 | - $f(4)=4+3\ln\left(\frac{16+2}{3\times 4}\right)=4+3\ln\frac{18}{12}=5.22$<br>• الرسم :<br><br> |
| | **II. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $u_0=\frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$،**<br>**$u_{n+1}=f(u_n)$.**<br>**1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $1<u_n<2$.** |
| 0.75 | • **البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $1<u_n<2$:**<br>- نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .<br>1- من أجل $n=0$ لدينا :<br>$u_0=\frac{3}{2}$ إذن $1<u_0<2$ ومنه $P(0)$ صحيحة .<br>2- نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن $1<u_n<2$.<br>ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أن $1<u_{n+1}<2$<br>لدينا : $1<u_n<2$ ومنه $f(1)<f(u_n)<f(2)$ لان الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]1;2[$<br>- ومنه $1<u_{n+1}<2$ لأن $u_{n+1}=f(u_n)$ ، $f(1)=1$ و $f(2)=2$<br>أي $P(n+1)$ صحيحة .<br>- حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$.<br>**من أجل كل عدد طبيعي $n$، $1<u_n<2$.** |
| | **2) أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ثم استنتج أنها متقاربة .** |
| 0.5 | • **دراسة رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أي دراسة تغيرات المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**<br>- **ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$**<br>لدينا : $u_{n+1}-u_n=u_n+3\ln\left(\frac{u_n^2+2}{3u_n}\right)-u_n=3\ln\left(\frac{u_n^2+2}{3u_n}\right)$<br>- بما أن $u_n\in]1;2[$ فإن $3\ln\left(\frac{u_n^2+2}{3u_n}\right)<0$<br>من أجل $x\in]1;2[$ فإن $f(x)-x<0$ **( السؤال (4))** |

| | | |
|---|---|---|
| **وبالتالي $u_{n+1}-u_n<0$ ومنه المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة تماما .** | | |
| • **استنتاج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة :**<br>- المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة من الأسفل بالعدد 1 وهي متناقصة تماما فهي متقاربة وتتقارب من العدد 1 . | 0.5 | |
| **3) عين نهاية المتتالية** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. | | |
| • **تعيين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:** $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ | 0.25 | |

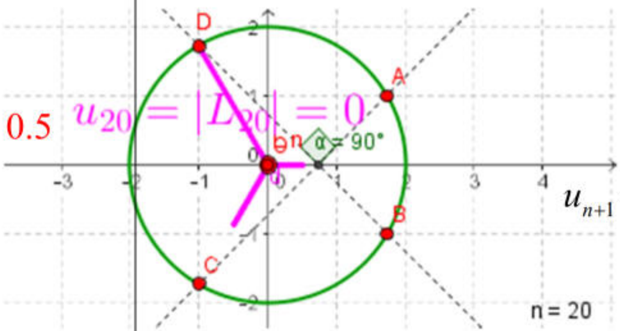



**✌ بالتوفيق و النجاح☺ في البكالوريا 2015 ☺**

☜ تصحيح الموضوع التجريبي الثاني          الشعبة : رياضيات

| العلامة | التصحيح |
|---|---|
| **05 نقاط** | ☜ **التمرين الأول** ☺☺☺ |
| | **1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب $z$ التالية :** $\left(z^2+2z+4\right)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0$. |
| 0.5 | ▪ **حل المعادلة** $\left(z^2+2z+4\right)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0$: <br> $\left(z^2+2z+4\right)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0$ يكافئ $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$ أو $z^2+2z+4=0$ <br> ▪ حل المعادلة : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$ <br> حساب المميز : $\Delta=\left(-2\sqrt{3}\right)^2-4(1)(4)=12-16=-4=(2i)^2$ <br> المعادلة تقبل حلين هما : $z_1=\frac{2\sqrt{3}-2i}{2}=\sqrt{3}-i$ , $z_2=\overline{z_1}=\sqrt{3}+\mathrm{i}$ |
| 0.5 | ▪ **حل المعادلة** $z^2+2z+4=0$ <br> حساب المميز : $\Delta=(2)^2-4(1)(4)=4-16=-12=\left(2\sqrt{3}i\right)^2$ <br> المعادلة تقبل حلين هما : $z'=\frac{-2-2i\sqrt{3}}{2}=-1-i\sqrt{3}$ , $z''=\overline{z'}=-1+i\sqrt{3}$ |
| | ▪ **مجموعة حلول المعادلة** $\left(z^2+2z+4\right)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0$ : <br> $S=\left\{\sqrt{3}-i;\sqrt{3}+i;-1-i\sqrt{3};-1+i\sqrt{3}\right\}$ |
| | **2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط $A,B,C$ و $D$ التي لواحقها على الترتيب** $z_A=\sqrt{3}+i$ , $z_B=\overline{z_A}$ , $z_C=-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ و $z_D=\overline{z_C}$. <br> **أ) أكتب الأعداد المركبة $z_A,z_B,z_C$ و $z_D$ على الشكل الأسي** |
| 0.5 | ▪ **كتابة الأعداد $z_A,z_B,z_C$ و $z_D$ على الشكل الأسي:** <br> ▪ لدينا : $z_A=\sqrt{3}+i$ <br> ▪ حساب الطويلة : $\lvert z_A\rvert=\lvert\sqrt{3}+i\rvert=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2$ <br> ▪ تعيين عمدة للعدد $z_A$ : نضع $\theta=\arg\left(z_A\right)$ <br> لدينا : $\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{1}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$ أي $z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ <br> ▪ ولدينا : $z_B=\overline{z_A}=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ |
| | ▪ $z_C=-1-i\sqrt{3}$ <br> حساب الطويلة : $\lvert z_C\rvert=\lvert -1-i\sqrt{3}\rvert=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2$ |

| | |
|---|---|
| 0.5 | تعيين عمدة للعدد $z_C$ : نضع : $\theta'=\arg(z_C)$ <br> لدينا : $\begin{cases}\cos\theta'=-\frac{1}{2}\\ \sin\theta'=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta\equiv\frac{4\pi}{3}[2\pi]$ إذن $z_C=2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ |
| | ▪ ولدينا : $z_D=\overline{z_C}=2e^{-i\frac{4\pi}{3}}$ |
| | **ب) بين أن النقط $C,B,A$ و $D$ تنتمي الى نفس الدائرة $(C)$ يطلب تعيين عناصرها .** |
| 0.25 | ▪ **تبيان أن النقط $C,B,A$ و $D$ تنتمي الى نفس الدائرة $(C)$ :** <br> ▪ لدينا : $\lvert z_A\rvert=\lvert z_B\rvert=\lvert z_C\rvert=\lvert z_D\rvert=2$ أي $OA=OB=OC=OD=2$ <br> **ومنه النقط $C,B,A$ و $D$ تنتمي الى نفس الدائرة $(C)$ ذات المركز $O$ و نصف قطرها $r=2$** |
| | **ج ) بين أنّ : $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_C}=i$ ثم عين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD})$.** |
| 0.5 | ▪ **تبيان أن $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_C}=i$ ثم تعيين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD})$:** <br> ▪ **لدينا:** <br> $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_C}=\frac{-1+i\sqrt{3}-\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i+1+i\sqrt{3}}=\frac{-1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}=\frac{i^2(1+\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}$ <br> أي $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_C}=\frac{i\left(i(1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})\right)}{1+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}=i\times\frac{1+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}=i$ <br> **إذن** $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_C}=i$ <br> ▪ **تعيين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD})$:** <br> $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD})=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$ |
| | ▪ **ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين $(AC)$ و $(BD)$؟** |
| 0.25 | ▪ **الاستنتاج بالنسبة للمستقيمين $(AC)$ و $(BD)$:** <br> $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD})=\frac{\pi}{2}$ يعني $(AC)\perp(BD)$ |
| | **3) نعتبر العدد المركب $z_n$ الذي طويلته $\frac{1}{2^n}$ و $\frac{2n\pi}{3}$ عمدة له ، حيث $n$ عدد طبيعي .** <br> **ونعرف العدد المركب $L_n$ بـ : $L_n=z_D\times z_n$.** <br> **أ) أكتب كلا من العددين $L_1,L_0$ على الشكل الجبري .** |
| | ▪ **كتابة كلا من العددين $L_1,L_0$ على الشكل الجبري :** <br> لدينا : $L_0=z_D\times z_0=2e^{-i\frac{4\pi}{3}}\times\frac{1}{2^0}\times e^{i\frac{2\times0\times\pi}{3}}=2e^{-i\frac{4\pi}{3}}=-1+i\sqrt{3}$ |

| | |
|---|---|
| 0.5 | $L_1 = z_D \times z_1 = 2e^{-i\frac{4\pi}{3}} \times \frac{1}{2^1} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2 \times \frac{1}{2} \times e^{-i\frac{4\pi}{3}+i\frac{2\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$<br>إذن $L_0 = -1 + i\sqrt{3}$    $L_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| | **ب) لتكن $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_n = \lvert L_n \rvert$ من أجل كل عدد طبيعي $n$.**<br>▪ **بين أن المتتالية $(u_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .**<br>▪ **لتكن النقط $M_0, M_1, ..., M_n$ صور الأعداد المركبة $L_0, L_1, ..., L_n$ على الترتيب .**<br>**أحسب بدلالة $n$ المجموع ، $S_n = \lVert\overrightarrow{OM_0}\rVert + \lVert\overrightarrow{OM_1}\rVert + ... + \lVert\overrightarrow{OM_n}\rVert$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$** |
| 0.5 | ▪ **تبيان أن المتتالية $(u_n)$ هندسية :**<br><br>▪ لدينا : $u_n = \lvert L_n \rvert = \lvert z_D \times z_n \rvert = \lvert z_D \rvert \times \lvert z_n \rvert = 2 \times \frac{1}{2^n}$<br>▪ إذن : $u_{n+1} = 2 \times \frac{1}{2^{n+1}} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\left(2 \times \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}u_n$<br>▪ أي $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$<br>**ومنه $(u_n)$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول** $u_0 = \lvert L_0 \rvert = \lvert -1 + i\sqrt{3} \rvert = 2$ |
| 0.5<br><br>0.25 | ▪ **حساب المجموع $S_n = \lVert\overrightarrow{OM_0}\rVert + \lVert\overrightarrow{OM_1}\rVert + ... + \lVert\overrightarrow{OM_n}\rVert$ :**<br>▪ **لدينا :** $S_n = \lVert\overrightarrow{OM_0}\rVert + \lVert\overrightarrow{OM_1}\rVert + ... + \lVert\overrightarrow{OM_n}\rVert = u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0 \times \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$<br>$S_n = 2 \times \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = 4 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$<br>$S_n = 4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$<br>▪ **حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ :**<br>$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 4$    لان $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ |
| **04 نقاط** | ☜ **التمرين الثاني ☺☺☺** |
| | **الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط**<br>$A(1;2;3), B(0;1;4), C(-1;-3;2)$ و $D(4;-2;5)$ **و الشعاع** $\vec{n} = 2\vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k}$<br>**حيث $a, b$ عددان حقيقيان .**<br>**1. أ) بين أن النقط $A, B, C$ تعين مستويا $(ABC)$ .** |
| 0.25 + 0.25 | ▪ تبيان أن النقط $A, B, C$ تعين مستويا :<br>▪ لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1;-1;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;-5;-1)$ |

| | |
|---|---|
| لدينا : $\frac{-2}{-1} \neq \frac{-5}{-1} \neq \frac{-1}{1}$<br>إذن :لا يوجد عدد حقيقي $k$ بحيث يكون ، $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ ومنه النقط $C, B, A$ ليست في استقامية فهي تعين مستويا. | 0.25 |
| **ب)عين العددين الحقيقيين $b,a$ بحيث يكون الشعاع $\vec{n}$ ناظميا للمستوي $(ABC)$ ثم عين معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.** | |
| ▪ **تعيين العددين الحقيقيين $b,a$ بحيث يكون الشعاع $\vec{n}$ ناظميا للمستوي $(ABC)$:**<br>▪ لدينا : $\vec{n}(2;a;b)$ ناظميا للمستوي $(ABC)$ يكافئ $\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$<br>يكافئ $\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 2\times(-1) - a + b = 0 \\ 2(-2) - 5a - b = 0 \end{cases}$<br>يكافئ $\begin{cases} -a + b - 2 = 0 ...(1) \\ -5a - b - 4 = 0 ...(2) \end{cases}$<br>▪ بالجمع نجد : $-a + b - 2 - 5a - b - 4 = 0$ ومنه $-6a = 6$ أي $a = -1$<br>▪ من أجل $a = -1$ بالتعويض في المعادلة $(1)$ نجد : $b = 1$<br>أي $\vec{n}(2;-1;1)$ ناظمي للمستوي $(ABC)$ | 0.5 |
| ▪ **تعيين معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$:**<br>▪ معادلة $(ABC)$ من الشكل $2x - y + z + d = 0$<br>▪ تعيين قيمة $d$ نعوض بإحداثيات النقطة $A(1;2;3)$ نجد : $2(1) - 2 + 3 + d = 0$<br>ومنه $d = -3$<br>معادلة للمستوي $(ABC)$: $2x - y + z - 3 = 0$ | 0.5 |
| **.2 ليكن المستقيم $(\Delta)$ ذي التمثيل الوسيطي:** $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t; \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 4 - t \end{cases}$<br>**أ) بين أن النقطة $D$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$ وأن المستقيم $(\Delta)$ عمودي على المستوي $(ABC)$.** | |
| ▪ **تبيان أن النقطة $D$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$:**<br>▪ **من أجل** $(x;y;z) = (4;-2;5)$ بالتعويض في الجملة السابقة نجد: $\begin{cases} 4 = 2 - 2t \\ -2 = -1 + t \\ 5 = 4 - t \end{cases}$<br>**ومنه** $\begin{cases} 2t = -2 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$ أي $\begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$ ومنه $D \in (\Delta)$ | 0.25 |

| | |
|---|---|
| 0.25 | ▪ تبيان أن المستقيم $(\Delta)$ عمودي على المستوي $(ABC)$: <br> ▪ لدينا : $\vec{n}(2;-1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(ABC)$ <br> ▪ ولدينا : $\vec{u}(-2;1;-1)$ شعاع توجيه $(\Delta)$ <br> ▪ نلاحظ أن : $\vec{n}=-\vec{u}$ ومنه $\vec{n}\parallel\vec{u}$ أي $(\Delta)\perp(ABC)$ |
| | **ب) عين إحداثيات النقطة $H$ المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$:** |
| 0.5 | ▪ تعيين إحداثيات النقطة $H$ المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$: <br> ▪ إحداثيات النقطة $H$ هي حل للجملة : $\begin{cases} x=2-2t \\ y=-1+t \\ z=4-t \\ 2x-y+z-3=0 \end{cases}$ <br> ▪ أي $2(2-2t)-(-1+t)+(4-t)-3=0$ ومنه $-6t+6=0$ <br> وبالتالي $t=1$ <br> إذن: $H(0;0;3)$ |
| | **ج) أحسب المسافة بين النقطة $D$ والمستوي $(ABC)$.** |
| 0.5 | ▪ حساب المسافة بين النقطة $D$ والمستوي $(ABC)$: <br> ▪ **لدينا :** $d(D,(ABC))=DH=\sqrt{(-4)^2+(2)^2+(3-5)^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ <br> ▪ **أو بطريقة أخرى :** $d(D,(ABC))=\frac{\lvert 2(4)-(-2)+5-3\rvert}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(1)^2}}=\frac{\lvert 12\rvert}{\sqrt{6}}=\frac{12\sqrt{6}}{6}=2\sqrt{6}$ <br> $d(D,(ABC))=2\sqrt{6}$ |
| | **د) بين أن النقطة $H$ هي مركز ثقل المثلث $ABC$.** |
| 0.25 | ▪ تبيان أن النقطة $H$ هي مركز ثقل المثلث $ABC$: <br> ▪ $H$ هي مركز ثقل المثلث $ABC$ يعني $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ <br> لدينا : $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ <br> ومنه النقطة $H$ هي مركز ثقل المثلث $ABC$ |
| | **3) أدرس تقاطع المستقيم $(\Delta)$ مع المستوي $(O,\vec{i},\vec{j})$.** |
| 0.25 | ▪ دراسة تقاطع المستقيم $(\Delta)$ مع المستوي $(O,\vec{i},\vec{j})$: <br> ▪ لدينا معادلة للمستوي $(O,\vec{i},\vec{j})$ هي $z=0$ ومنه شعاع ناظمي له هو $\vec{k}(0;0;1)$ <br> ▪ ولدينا شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta)$ هو $\vec{u}(-2;1;-1)$. <br> ▪ إذن : $\vec{k}.\vec{u}=0\times(-2)+0\times1+1\times(-1)=-1\neq0$ ومنه $(\Delta)$ لا يوازي $(O,\vec{i},\vec{j})$ <br> ▪ أي $(\Delta)$ يقطع $(O,\vec{i},\vec{j})$ في نقطة $F$ . |

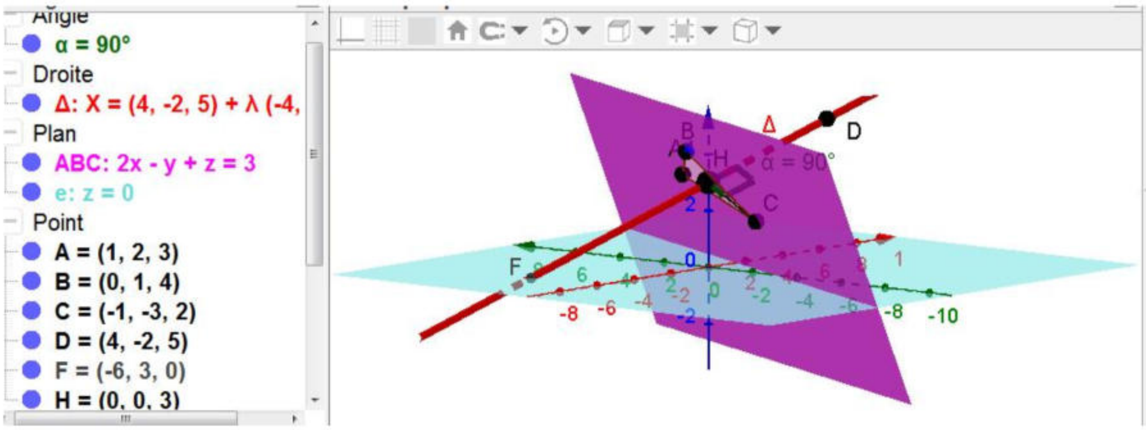
■ إحداثيات النقطة $F$ هي حل للجملة : $\begin{cases} x=2-2t \\ y=-1+t \\ z=4-t \\ z=0 \end{cases}$

0.25

أي $4-t=0$ ومنه $t=4$

■ من أجل $t=4$ بالتعويض في جملة التمثيل الوسيطي لـ $(\Delta)$ نجد :

$\begin{cases} x=-6 \\ y=3 \\ z=0 \end{cases}$ ومنه $F(-6;3;0)$




## ☜ التمرين الثالث ☹☺☹ — 04نقاط

1) **أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الاقليدية للعدد $2^n$ على العدد 5.**

■ **دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد $2^n$ على العدد 5:**

■ لدينا :

$2^0\equiv 1[5]$ $\quad 2^1\equiv 2[5]$ $\quad 2^2\equiv 4[5]$ $\quad 2^3\equiv 3[5]$ $\quad 2^4\equiv 1[5]$

إذن بواقي القسمة الاقليدية للعدد $2^n$ على العدد 5 تشكل متتالية دورية دورها $p=4$ .

من أجل كل عدد طبيعي $k$ لدينا :

| $n$ | $4k$ | $4k+1$ | $4k+2$ | $4k+3$ |
|---|---|---|---|---|
| باقي قسمة العدد $2^n$ على 5 | 1 | 2 | 4 | 3 |

$0.5+0.5$

2) **عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $\left(2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1}\right)$ على العدد 5 حيث $n$ عدد طبيعي.**

■ **تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد $\left(2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1}\right)$ على 5:**

■ لدينا : $2017^{4n+3}\equiv 2^{4n+3}[5]$ أي $2017^{4n+3}\equiv 3[5]$

■ ولدينا : $2016^{8n}\equiv 1^{8n}[5]$ أي $2016^{8n}\equiv 1[5]$

■ و $2014^{2n+1}\equiv 4^{2n+1}[5]$ أي $2014^{2n+1}\equiv (2^2)^{2n+1}[5]$ ومنه $2014^{2n+1}\equiv 2^{4n+2}[5]$

وبالتالي $2014^{2n+1}\equiv 4[5]$

■ إذن $2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1}\equiv 3-2\times 1+4[5]$

ومنه $2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1}\equiv 0[5]$

0.75

| | |
|---|---|
| أي باقي القسمة الاقليدية للعدد $\left(2017^{4n+3}-2\times2016^{8n}+2014^{2n+1}\right)$ على 5 هو 0 | |
| 3) بين أن العدد 131 أولي . | |
| ▪ تبيان أن العدد 131 أولي :<br>لدينا : $\sqrt{131}=11.45$<br>▪ العدد 131 لا يقبل القسمة على أي عدد من الاعداد الأولية الأصغر من أوتساوي 11 وهي $\{2;3;5;7;11\}$<br>$131\equiv10[11],131\equiv5[7],131\equiv1[5],131\equiv2[3],131\equiv1[2]$<br>ومنه العدد 131 أولي . | 0.5 |
| 4) عين الأعداد الطبيعة $n$ التي تحقق : $\begin{cases}3m+7d=2^n-48\\ab=5m\end{cases}$<br>حيث ، $d=PGCD(a,b)$ و $m=PPCM(a,b)$ . | |
| ▪ تعيين الأعداد $n$ التي تحقق : $\begin{cases}3m+7d=2^n-48\\ab=5m\end{cases}$<br>▪ لدينا $ab=5m$ ولدينا $ab=md$ ومنه $d=5$<br>▪ نضع : $a=5a'$ و $b=5b'$ مع $a'\wedge b'=1$ ( $a'$ أولي مع $b'$ )<br>▪ إذن $ab=5m$ يعني $5a'\times5b'=5m$ أي $m=5a'b'$<br>وبالتالي : $3m+7d=2^n-48$ معناه $3\times5a'b'+7\times5=2^n-48$<br>أي $5(3a'b'+7)=2^n-48$<br>$3a'b'+7$ طبيعي يعني $2^n-48\equiv0[5]$ ومنه $2^n-3\equiv0[5]$<br>أي $2^n\equiv3[5]$ وبالتالي : $n=4k+3$ مع $k\in\mathbb{N}$ | 0.75 |
| 5) عين قيم $n$ بحيث يكون ، $7<n<15$ ثم استنتج الثنائيات $(a;b)$. | |
| ▪ تعيين قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون ، $7<n<15$ :<br>▪ لدينا : $7<n<15$ معناه $7<4k+3<15$ أي $4<4k<12$<br>▪ وبالتالي : $1<k<3$<br>إذن $k=2$ ومنه $n=11$ | 0.5 |
| ▪ استنتاج الثنائيات $(a;b)$:<br>▪ من أجل $n=11$ لدينا :<br>$5(3a'b'+7)=2^{11}-48$ ومنه $5(3a'b'+7)=2000$<br>أي $3a'b'+7=400$<br>ومنه $a'b'=131$<br>وبالتالي مجموعة الثنائيات $(a';b')$ $\{(131;1),(1;131)\}$<br>ومنه مجموعة الثنائيات $(a;b)$ $\{(655;5),(5;655)\}$ | 0.5 |
| التمرين الرابع ☹☺☺ | ( 07 نقاط) |
| نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(1-2x)e^{2x}$<br>نسمي $(C_f)$ المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.( وحدة الطول $2cm$ ) | |

**I.** **1) أحسب نهايتي الدالة $f$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$.**

- **حساب النهايات عند $-\infty$ وعند $+\infty$ :**
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(1-2x)e^{2x} = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-2xe^{2x}\right)=0$ لان $\lim_{x\to-\infty} e^{2x}=0,\ \lim_{x\to-\infty} 2xe^{2x}=0$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(1-2x)e^{2x} = -\infty$ لان $\lim_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}(1-2x)=-\infty$

$0.25+0.25$

**2) أحسب عبارة $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x$، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $f$.**

- **حساب المشتقة :**
- $f'(x) = -2e^{2x} + (1-2x)\times 2e^{2x} = (-2+2-4x)e^{2x} = -4xe^{2x}$

$f'(x) = -4xe^{2x}$ من أجل كل عدد حقيقي $x$

$0.25$

- **استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$:**
- **جدول اشارة المشتقة :**

شارة $f'(x)$ من اشارة $-x$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

- الدالة $f$ متزايدة على المجال $]-\infty;0]$ ومتناقصة على المجال $[0;+\infty[$.

$0.25$

**3) شكل جدول تغيرات الدالة $f$.**

- **جدول تغيرات الدالة $f$ :**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

$0.5$

**4) حل المعادلة $f(x)=0$ ثم استنتج نقاط تقاطع $(C_f)$ مع محور الفواصل.**

- **حل المعادلة $f(x)=0$ :**
- $f(x)=0$ يكافئ $(1-2x)e^{2x}=0$

يكافئ $1-2x=0$ لان $e^{2x}\neq 0$

يكافئ $x=\dfrac{1}{2}$

- **استنتاج نقاط تقاطع $(C_f)$ مع محور الفواصل:**

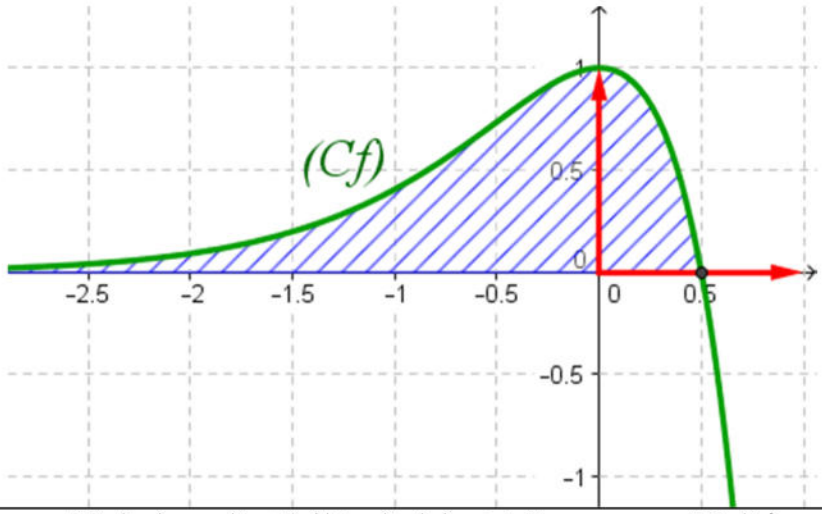
$(C_f)\cap(x'x)=\left\{\left(\dfrac{1}{2};0\right)\right\}$

$0.25$

**5) أحسب $f(1)$ ثم أرسم $(C_f)$.**

- **حساب $f(1)$ :**
- $f(1)=(1-2(1))e^{2\times1}=-e^2=-7.39$

▪ **الرسم :**




$0.25+0.5$

---

6) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ التالية : $(E): f(x)=f(m)$

---

▪ **مناقشة حلول المعادلة $(E): f(x)=f(m)$:**

▪ حلول المعادلة $f(x)=f(m)$ بيانيا هي فواصل نقاط تقاطع المنحني $(C_f)$ مع المستقيم ذي المعادلة $y=f(m)$ الموازي لحامل محور الفواصل $(x'x)$.

تغير قيم $f(m)$ حسب قيم $m$

| $m$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(m)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

▪ **المناقشة :**

▪ إذا كان $f(m)\in]-\infty;0[$ أي $m\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ المعادلة تقبل حلا موجبا تماما.

▪ إذا كان $f(m)=0$ أي $m=\frac{1}{2}$ المعادلة تقبل حلا موجبا $x=\frac{1}{2}$.

▪ إذا كان $f(m)\in]0;1[$ أي $m\in]-\infty;0[\cup\left]0;\frac{1}{2}\right[$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الاشارة.

▪ إذا كان $f(m)=1$ أي $m=0$ المعادلة تقبل حلا معدوما مضاعفا.

$01$

---

**7) أ) عين العددين الحقيقيين $b,a$ بحيث تكون الدالة $F$ المعرفة بـ : $F(x)=(ax+b)e^{2x}$ دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$.**

---

▪ **تعيين العددين الحقيقيين $b,a$:**

- $F$ دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ يعني $F'(x)=f(x)$

أي $ae^{2x}+(ax+b)\times 2e^{2x}=(1-2x)e^{2x}$ ومنه $(2ax+a+2b)e^{2x}=(1-2x)e^{2x}$

بالمطابقة نجد $\begin{cases}2a=-2\\a+2b=1\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$

أي $F(x)=(-x+1)e^{2x}$

$0.5$

| | |
|---|---|
| | ب) أحسب بـ $cm^2$ و بدلالة $\lambda$ المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني $(C_f)$ و المستقيمات التي معادلاتها : $x=\frac{1}{2}, y=0$ و $x=\lambda$ حيث $\lambda<\frac{1}{2}$ ثم أحسب $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} S(\lambda)$. |
| 0.5 | ▪ حساب $S(\lambda)$: <br> $f$ دالة مستمرة وموجبة على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ وبالتالي : <br> $S(\lambda)=\int_{\lambda}^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\left[F(x)\right]_{\lambda}^{\frac{1}{2}}=\left[(-x+1)e^{2x}\right]_{\lambda}^{\frac{1}{2}}=\left(-\frac{1}{2}+1\right)e-(-\lambda+1)e^{2\lambda}$ <br> أي $S(\lambda)=\left(\frac{1}{2}e+\lambda e^{2\lambda}-e^{2\lambda}\right)\times us=\left(\frac{1}{2}e+\lambda e^{2\lambda}-e^{2\lambda}\right)\times 4cm^2$ <br> ومنه $S(\lambda)=\left(2e+4\lambda e^{2\lambda}-4e^{2\lambda}\right)cm^2$ |
| 0.25 | ▪ حساب $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} S(\lambda)$ : <br> $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} S(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\left(2e+4\lambda e^{2\lambda}-4e^{2\lambda}\right)=(2e)cm^2$ لان <br> $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2\lambda}=0$ , $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} 4\lambda e^{2\lambda}=0$ |
| | **II.** نسمي $f'=f^{(1)}, f''=f^{(2)}, f'''=f^{(3)},\dots,f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة $f$. <br> 1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$. |
| 0.75 | ▪ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$ <br> - نسمي $P(n)$ هذه الخاصية . <br> 1) من أجل $n=1$ لدينا : <br> $f^{(1)}(x)=2^1(1-1-2x)e^{2x}=-4xe^{2x}=f'(x)$ <br> ومنه $P(1)$ صحيحة . <br> 2) نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$ <br> ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أن <br> $f^{(n+1)}(x)=2^{n+1}(1-(n+1)-2x)e^{2x}=2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$ <br> - لدينا : $f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}(x)\right)'=2^n\times\left[-2e^{2x}+(1-n-2x)\times 2e^{2x}\right]$ <br> ومنه $f^{(n+1)}(x)=2^n(-2+2-2n-4x)e^{2x}=2^n\times 2(-n-2x)e^{2x}$ <br> أي : $f^{(n+1)}(x)=2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$ <br> ومنه $P(n+1)$ صحيحة. <br> 3) حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم. |
| | 2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ المنحنى $\left(C_{f^{(n)}}\right)$ الممثل للدالة $f^{(n)}$ حيث $f^{(n)}$ الدالة المشتقة من الرتبة $n$ للدالة $f$ يقبل مماسا يوازي حامل محور الفواصل في النقطة $M_n(x_n;y_n)$. <br> أ) أحسب بدلالة $n$ كلا من $x_n$ و $y_n$ . |

| | |
|---|---|
| ▪ **حساب $x_n$ و $y_n$ بدلالة $n$:**<br>- $\left(C_{f^{(n)}}\right)$ **يقبل مماسا يوازي** $(x'x)$ يعني $f^{(n+1)}(x)=0$<br>أي $2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}=0$ ومنه $-n-2x=0$<br>وبالتالي $x=-\frac{1}{2}n$ أي $x_n=-\frac{1}{2}n$<br>من أجل $x=-\frac{1}{2}n$ لدينا :<br>$y_n=f^{(n)}\left(-\frac{1}{2}n\right)=2^n\left(1-n-2\left(-\frac{1}{2}n\right)\right)e^{2\left(-\frac{1}{2}n\right)}=2^n e^{-n}=\left(2e^{-1}\right)^n$<br>أي $y_n=\left(2e^{-1}\right)^n$ | $0.25+0.25$ |
| **ب) بين أن المتتالية $(x_n)$ حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ . | |
| ▪ **تبيان أن $(x_n)$ متتالية حسابية :**<br>- **لدينا :** $x_{n+1}-x_n=-\frac{1}{2}(n+1)-\left(-\frac{1}{2}n\right)=-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n=-\frac{1}{2}$<br>ومنه $(x_n)$ متتالية حسابية أساسها $r=-\frac{1}{2}$ وحدها الأول $x_0=0$.<br>- **حساب** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ **:**<br>$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}n\right)=-\infty$ | $0.5$ |
| **ج) بين أن المتتالية $(y_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب** $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ | |
| ▪ **تبيان أن المتتالية $(y_n)$ هندسية :**<br>- لدينا : $y_n=\left(2e^{-1}\right)^n$ ومنه $y_{n+1}=\left(2e^{-1}\right)^{n+1}=2e^{-1}\times\left(2e^{-1}\right)^n=2e^{-1}\times y_n$<br>ومنه $(y_n)$ هندسية أساسها $q=2e^{-1}$ وحدها الأول $y_0=1$.<br>- **حساب** $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ **:**<br>$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2e^{-1}\right)^n=0$ لان $-1<2e^{-1}<1$ | $0.5$ |


**✌انتهى تصحيح الموضوع الثاني ❁ بالتوفيق ☺ والنجاح ☺☺ في البكالوريا 2015 ❁**