اختبار في مادة الرياضيات

التمرين الأول : 08 نقاط

I. n عدد طبيعي غير معدوم .

نضع $\alpha = n+3$ و $\beta = 2n+1$ ونسمي $\delta = PGCD(\alpha;\beta)$

أ. عين القيم الممكنة لـ δ .

ب. برهن أنَ α و β من مضاعفات العدد 5 إذا وفقط إذا كان ، $n \equiv 2[5]$.

ج. استنتج قيم $PGCD(\alpha;\beta)$ حسب قيم العدد الطبيعي n .

II. نعتبر العددين a و b المعرفين بـ : $a = n^2+2n-3$ و $b = 2n^2-n-1$

أ. بين أنَ العدد $n-1$ يقسم كلا من العددين a و b.

ب. نضع $d = PGCD(a;b)$. عين قيم d حسب قيم العدد الطبيعي n.

ج. عين قيمة d من أجل $n = 2015$.

التمرين الثاني : 12 نقطة

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = \dfrac{2e-x}{x} - \ln(x)$

1- أدرس تغيرات الدالة g .

2- أحسب $g(e)$ ثمَ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = (2e-|x|)\times \ln|x|$

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- برهن أنَ الدالة f زوجية .

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x) = g(x)$.

3- استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

4- أ) عين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل .

ب) أحسب $f(e^2)$ ثم أرسم المنحني (C_f).

III. نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $h(x) = (2e-x)\times|\ln x|$

1- أكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

2- بيَن كيفية الحصول على (C_h) ثمَ أرسمه .

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح ✿ أستاذ المادة

تصحيح الاختبار الأول

[Sous-titre du document]

القسم : 3 ثانوي   الشعبة : رياضيات

من إنجاز الأستاذ : ثابت إبراهيم

30/11/2014

تصحيح الاختبار الأول السنة الدراسية : 2015 – 2014 الشعبة : رياضيات

التصحيح	العلامات مجزأة
التمرين الأول : (08 نقاط)	
I. لدينا : $\alpha = n+3$ و $\beta = 2n+1$ ونسمي $\delta = PGCD(\alpha;\beta)$ **أ) تعيين القيم الممكنة لـ δ :** - لدينا : δ / α و δ / β ومنه $\delta / 2\alpha - \beta$ أي $\delta / 2(n+3)-(2n+1)$ وبالتالي : $\delta / 5$ أي $\delta \in D_5$ إذن : $\delta \in \{1;5\}$	01.5
ب) البرهان أنَ α و β من مضاعفات العدد 5 إذا وفقط إذا كان ، $n \equiv 2[5]$: - 1) إذا كان α و β من مضاعفات العدد 5 فإنَ $5/\alpha$ و $5/\beta$ ومنه $\begin{cases} \alpha \equiv 0[5] \\ \beta \equiv 0[5] \end{cases}$ أي $\begin{cases} n+3 \equiv 0[5] \\ 2n+1 \equiv 0[5] \end{cases}$ ومنه $3n+4 \equiv 0[5]$ أي $3n \equiv -4[5]$ وبالتالي $3n \equiv 5-4[5]$ إذن $3n \equiv 1[5]$ أي أنَ : $2\times 3n \equiv 2\times 1[5]$ - وبالتالي $n \equiv 2[5]$ 2) إذا كان $n \equiv 2[5]$ فإنَ $\begin{cases} n+3 \equiv 2+3[5] \\ 2n+1 \equiv 2\times 2+1[5] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \alpha \equiv 0[5] \\ \beta \equiv 0[5] \end{cases}$ أي α و β من مضاعفات العدد 5 **α و β من مضاعفات العدد 5 إذا وفقط إذا كان ، $n \equiv 2[5]$**	01.5
ج) استنتاج قيم $PGCD(\alpha;\beta)$ حسب قيم العدد الطبيعي n : • إذا كان $n \equiv 2[5]$ أي $n = 5k+2 (k \in \mathbb{N})$ فإنَ $PGCD(\alpha;\beta)=5$ • إذا كان $n \neq 5k+2 (k \in \mathbb{N})$ فإنَ $PGCD(\alpha;\beta)=1$	01
II. لدينا : $a = n^2+2n-3$ و $b = 2n^2-n-1$ **أ) تبيان أنَ العدد $n-1$ قاسم للعددين a و b :** • لدينا : $a=(n-1)(n+3)$ و $b=(n-1)(2n+1)$ اي أنَ $(n-1)/a$ و $(n-1)/b$	01
ب) تعيين قيم d حسب قيم العدد الطبيعي n : • لدينا : $d = PGCD(a;b) = PGCD((n-1)(n+3);(n-1)(2n+1))$ أي $d=(n-1)\times PGDC(n+3;2n+1)=(n-1)\times PGCD(\alpha;\beta)$ وبالتالي : $d=(n-1)\times\delta$ - إذا كان $n=5k+2(k\in\mathbb{N})$ فإنَ $d=5(n-1)$ لانَ $\delta=5$ - أما إذا كان $n\neq 5k+2(k\in\mathbb{N})$ فإنَ : $d=n-1$ لانَ $\delta=1$	01 01
ج) تعيين قيمة d من أجل $n=2015$: • لدينا : $2015 \equiv 0[5]$ أي $2015 \not\equiv 2[5]$ وبالتالي $d=2015-1=2014$	01

	التمرين الثاني : (12 نقطة)
	• لدينا : $g(x)=\frac{2e-x}{x}-\ln x$ $\qquad D_g=]0;+\infty[$
2×0.25	**1- دراسة تغيرات الدالة g :** • **حساب النهايات :** $\lim_{x\to0^+} g(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2e-x}{x}-\ln x\right)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim_{x\to0^+}\frac{2e-x}{x}=+\infty\\ \lim_{x\to0^+}(-\ln x)=+\infty\end{cases}$ $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2e-x}{x}-\ln x\right)=-\infty$ لأن $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{2e-x}{x}=-1\\ \lim_{x\to+\infty}(-\ln x)=-\infty\end{cases}$
0.75	• **حساب المشتقة :** $g'(x)=\frac{-x-(2e-x)}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{-x-2e+x-x}{x^2}=\frac{-x-2e}{x^2}$ $g'(x)=\frac{-x-2e}{x^2}$
0.5	• **دراسة إشارة المشتقة :** $g'(x)=0$ يعني $-x-2e=0$ ومنه $x=-2e$ لكن $(-2e)\notin]0;+\infty[$ وبالتالي من أجل $x\in]0;+\infty[$ ، $g'(x)\neq0$ x: 0 ‖ $+\infty$; $g'(x)$: ‖ $-$
0.5	• **جدول تغيرات الدالة** g : x: 0 ‖ e $+\infty$ $g'(x)$: ‖ $-$ $g(x)$: ‖ $+\infty$ ↘ 0 ↘ $-\infty$
0.25 0.5	**2- حساب $g(e)$ ثم استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:** • $g(e)=\frac{2e-e}{e}-\ln e=1-1=0$ • **جدول إشارة $g(x)$:** x: 0 ‖ e $+\infty$ $g(x)$: ‖ $+$ 0 $-$
	II. لدينا : $f(x)=(2e-\|x\|)\times\ln\|x\|$ $\qquad D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
0.5	**1- البرهان على أن الدالة f زوجية :** • لدينا D_f متناظرة بالنسبة إلى 0 أي من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ فإنَ $(-x)\in\mathbb{R}^*$ و لدينا : $f(-x)=(2e-\|-x\|)\times\ln(\|-x\|)=(2e-\|x\|)\times\ln(\|x\|)=f(x)$ لأنَ $\|-x\|=\|x\|$ **ومنه f دالة زوجية**

2- تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=g(x)$:

- من أجل $x\in]0;+\infty[$ لدينا : $f(x)=(2e-x)\times\ln x$

ومنه $f'(x)=-\ln x+(2e-x)\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{2e-x}{x}-\ln x=g(x)$

أي $f'(x)=g(x)$

0.75

3- استنتاج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}^*$:

- إشارة $f'(x)$ من أجل $x\in]0;+\infty[$ من نفس إشارة $g(x)$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

☜ ثم نكمل جدول إشارة $f'(x)$ بالتناظر بالنسبة إلى 0 لأنّ f زوجية .

x	$-\infty$		$-e$		0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

01

- **جدول تغيرات الدالة f** :
- **حساب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف :**

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(2e-x)\times\ln x=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(2e-(-x))\times\ln(-x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(2e-x)\times\ln x\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[(2e-(-x))\times\ln(-x)\right]=-\infty$$

4×0.25

x	$-\infty$		$-e$		0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	$-\infty$

0.5

4- أ) تعيين نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل :

$f(x)=0$ يعني $(2e-|x|)\times\ln|x|=0$

إما $2e-|x|=0$ ومنه $|x|=2e$ أي $x=2e$ أو $x=-2e$

أو $\ln|x|=0$ ومنه $|x|=1$ أي $x=1$ أو $x=-1$

وبالتالي : $(C_f)\cap(x'x)=\{(-2e;0),(-1;0),(1;0),(2e;0)\}$

01

ب) حساب $f(e^2)$

$f(e^2)=(2e-e^2)\times\ln e^2=4e-2e^2\simeq-3.9$

0.25

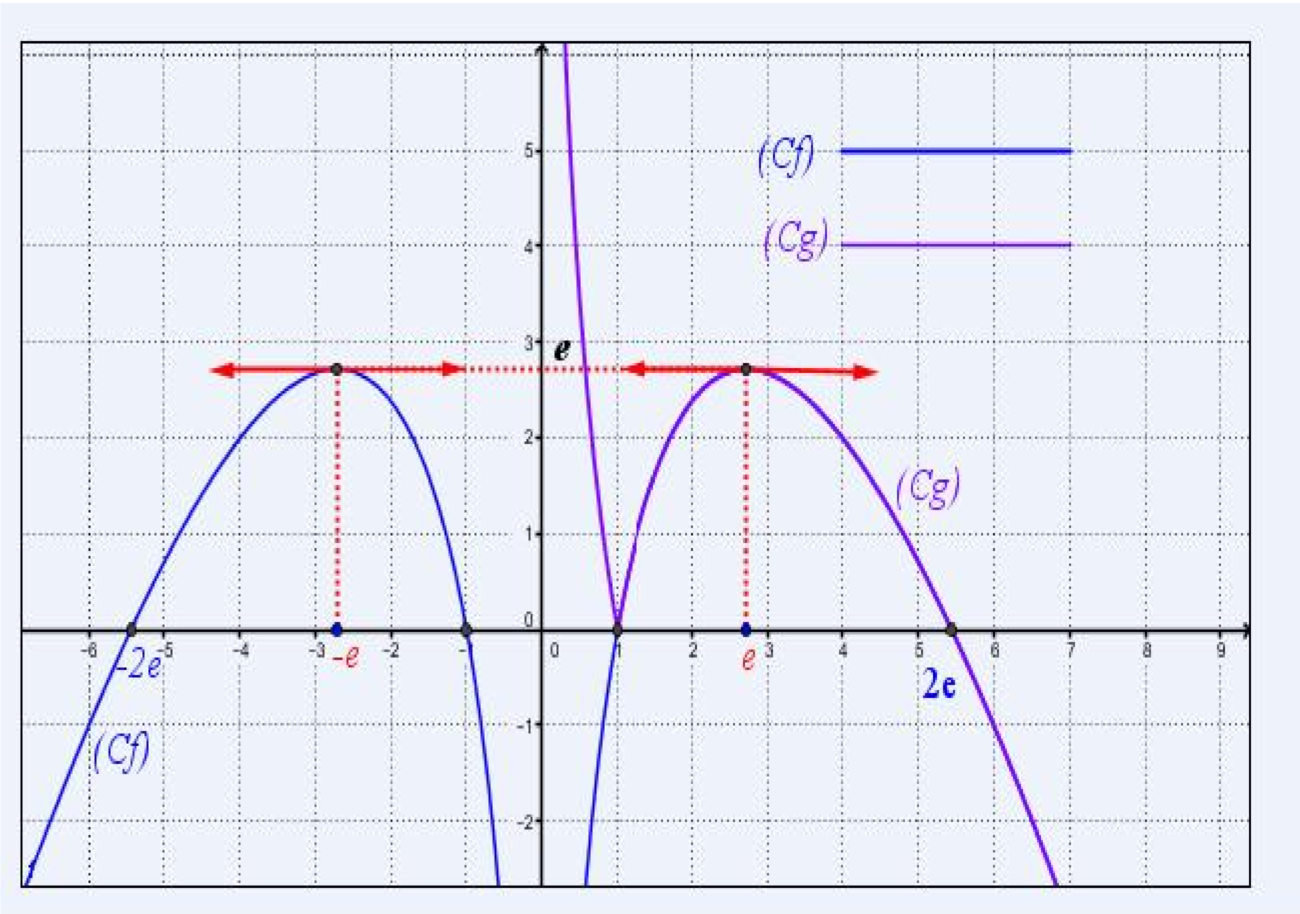
.III لدينا : $h(x)=(2e-x)\times|\ln x|$

1- كتابة $h(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة :

إشارة $\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

0.5

01 0.5	• إذا كان $x \in]0;1]$ فإنَ $h(x) = (2e - x) \times (-\ln x) = -f(x)$ • إذا كان $x \in [1;+\infty[$ فإنَ $h(x) = (2e - x) \times \ln x$ • **كيفية الحصول على (C_h) باستعمال (C_f):** - إذا كان $x \in]0;1]$ فإنَ (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل . - إذا كان $x \in [1;+\infty[$ فإنَ (C_h) منطبق على (C_f) .
02	☜ الرسم :  ☜ انتهى تصحيح الاختبار الأول 2014 – 2015  ☺بالتوفيق في البكالوريا 2015 ❀