

### اختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

#### التمرين الأول ( 4 نقاط ) :

نعتبر في مجموعة الأعداد الحقيقية  $R$  المعادلة التفاضلية  $(E)$

$$y' + 3y = 0 \quad (E')$$

1) حل في  $R$  المعادلة التفاضلية  $(E')$

2) عين الأعداد الحقيقية  $a ; b ; c$  بحيث يكون كثير الحدود  $P(x) = ax^2 + bx + c$  حيث  $P(x)$  حل للمعادلة  $(E)$ .

3) برهن أن  $g$  حل للمعادلة  $(E')$  إذا وفقط إذا كانت الدالة  $f$  حيث  $f(x) = g(x) + P(x)$  هي حل للمعادلة  $(E)$ .

4) عين حلول المعادلة  $(E)$  ثم استنتج الحل الخاص  $f$  لهذه المعادلة و الذي يأخذ القيمة  $\frac{9}{4}$  عند القيمة  $0$ .

#### التمرين الثاني ( 4 نقاط ) :

$n$  عدد طبيعي و  $a$  و  $b$  عددان طبيعيان حيث  $24 = n^3 + 5n^2 + 7n$  و

$$\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; 21).$$

1) برهن أن  $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(a; b)$ .

2) استنتاج القيم الممكنة للعدد  $\text{PGCD}(a; b)$ .

$$\text{PGCD}(a; b) = 7.$$

3) عين قيمة العدد الطبيعي  $n$  بحيث يكون  $\frac{n^3 + 5n^2 + 7n + 24}{n+3}$  غير قابل للاختزال.

#### التمرين الثالث ( 5 نقاط ) :

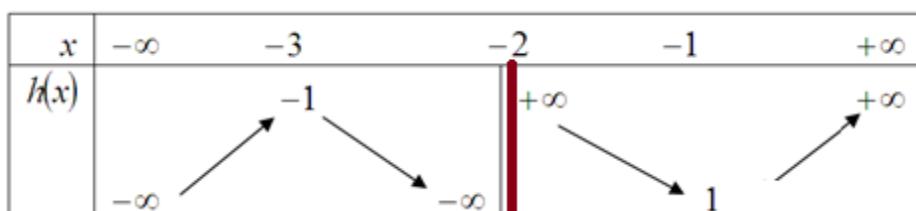
نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على  $R - \{-2\}$  حيث  $h(x) = ax + b + \frac{c}{2(x+2)}$  أعداد حقيقة و  $(C_h)$  التمثيل

البيانى الدالة  $h$  في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد المتتجانس

و جدول تغيراتها هو

1) باستعمال جدول التغيرات الدالة  $h$  جد الأعداد  $c ; b ; a$ .

2) فرض أن



$$h(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2(x+2)}$$

أ- عين معادلتي المستقيمان المقاربان للمنحنى  $(C_h)$

ب- أحسب  $h(-4-x) + h(x)$  مفسرا النتيجة بيانيا.

ج- أنشئ المستقيمان المقاربان والمنحنى  $(C_h)$

3) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد حلول المعادلة :  $h(x)=m(x+2)$

$$k(x)=\ln\left(\frac{x^2+4x+5}{2x+4}\right) \quad (4) \text{ تعتبر الدالة } k \text{ حيث}$$

أ- بين أن  $k(x)=\ln(h(x))$  في مجال يطلب تعينه

ب- باستعمال جدول تغيرات  $h$  استنتج اتجاه تغير الدالة  $k$ .

ج- أحسب نهايات الدالة  $k$  عند طرفي مجموعة تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

5) استنتاج حلول المتراجحة  $k(x) > \ln(2)$

**المرين الرابع ( 7 نقاط )**

**الجزء الأول :**  $g$  دالة معرفة على مجموعة الاعداد الحقيقة  $R$  بـ

1) أدرس تغيرات الدالة  $g$  ثم شكل جدول تغيراتها

2) بين أن المعادلة  $g(x)=0$  تقبل حين إحداها معدوم والأخر  $\alpha$  حيث  $1,59 < \alpha < 1,60$  ثم استنتاج إشارة  $(g(x))$

**الجزء الثاني :**

$f$  دالة عددية معرفة على مجموعة الاعداد الحقيقة  $R$  كما يلي  

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x^2}{e^x-1} : x \neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$
 تمثيلها البياني في معلم

متعامد و متجانس

1) بين أن الدالة  $f$  تقبل الاشتتقاق عند 0 ثم أكتب معادلة الماس  $(C_f)$  للمنحنى  $(T)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

2) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم  $x$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=\frac{x^2 e^{-x}}{1-e^{-x}}$  ثم أحسب  $f(x)$  فسر النتيجة هندسيا

4) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم  $x$  فإن  $f'(x)=\frac{xg(x)}{(e^x-1)^2}$  ثم استنتاج اتجاه تغير الدالة  $f$

و شكل جدول تغيراتها .

5) ليكن  $(C)$  التمثيل البياني للدالة  $x \mapsto -x^2$

أ- أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)+x^2]$  ثم فسر النتيجة بيانيا

ب- أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة للمنحنى  $(C)$  ثم أرسم  $(T)$  و  $(C_f)$  و  $(C)$

مع تمنيات الاستاذ : جواليل أحمد - بالتوفيق و النجاح في بكالوريا 2018

## التصحيح المفصل للاختبار الاول في مادة الرياضيات شعبة الرياضيات

## التمرين الاول :

$$y' + 3y = 0 \quad \dots \dots \dots (E') \quad , \quad y' + 3y = 3x^2 - 4x + 4 \quad \dots \dots \dots (E)$$

$$1) \text{ حل المعادلة } y = Ce^{-3x} \text{ حيث } C \text{ ثابت حقيقي.}$$

2) تعين الأعداد الحقيقة  $a$  ;  $b$  ;  $c$  حتى يكون  $P(x)=ax^2+bx+c$  حل للمعادلة ( $E$ ). أي لدينا

$$p'(x) + 3p(x) = 3ax^2 + (2a + 3b)x + 3c + b \quad \text{و منه} \quad P'(x) = 2ax + b$$

$$\therefore P(x) = x^2 - 2x + 2 \quad \text{و منه} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases} \quad \text{و منه} \quad \begin{cases} 3a = 3 \\ 2a + 3b = -4 \\ 3c + b = 4 \end{cases} \quad \text{نجد أن } (E)$$

(3) إثبات أن  $g$  حل للمعادلة  $(E')$  إذا وفقط إذا كانت الدالة  $f$  هي حل للمعادلة  $(E)$

حل للمعادلة  $(E')$  يعني ان  $p'(x) + 3p(x) = 3x^2 - 4x + 4$  و  $g'(x) + 3g(x) = 0$  منه

$$f'(x) + 3f(x) = 3x^2 - 4x + 4 \text{ and } p'(x) + g'(x) + 3p(x) + 3g(x) = 3x^2 - 4x + 4$$

إذن  $f$  حل للمعادلة (E).....(1)

حل للمعادلة (E) يعني  $f'(x) + 3f(x) = 3x^2 - 4x + 4$  بالتعويض نجد أن

$$\text{و منه } [p(x) + g(x)]' + 3[p(x) + 3g(x)] = 3x^2 - 4x + 4$$

$$\text{فإن } p'(x) + 3p(x) = 3x^2 - 4x + 4 \text{ و بما أن } p'(x) + g'(x) + 3p(x) + 3g(x) = 3x^2 - 4x + 4$$

$$g'(x) + 3g(x) = 0 \quad \text{و منه} \quad g'(x) + 3g(x) + 3x^2 - 4x + 4 = 3x^2 - 4x + 4$$

(2)..... $E'$  حل للمعادلة أي ان  $g$

من (1) و (2) نستنتج انها صحيحة .

$$f(x) = g(x) + P(x) = Ce^{-3x} + x^2 - 2x + 2 \quad \text{حيث } f(E) \text{ هي حلول المعادلة (4)}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}e^{-3x} + x^2 - 2x + 2 \quad \text{أي ان } C = \frac{1}{4} \quad C + 2 = \frac{9}{4} \quad \text{يعني ان } f(0) = \frac{9}{4}$$

## التمرين الثاني :

$b = n + 3$  و  $a = n^3 + 5n^2 + 7n + 24$  عدد طبيعي و  $b$  عددان طبيعيان حيث  $24 \leq b < a$

(1) البرهان أن  $a = n^3 + 5n^2 + 7n + 24$  و نقسمها إقليديا على  $b$  نجد  $PGCD(a; b) = PGCD(b; 21)$  لدينا

و منه بما ان  $PGCD(a;b)$  قاسم للعددين  $a$  و  $b$  فهو قاسم للعدد  $a = (n+3)(n^2 + 2n + 1) + 21$

أي قاسم للعدد 21 و منه  $PGCD(a; b)$  قاسم مشترك للعددين 21 و  $b$  و منه  $a - b(n^2 + 2n + 1)$

$$(1) \dots PGCD(b; 21) \text{ قاسم للعدد } PGCD(a; b)$$

$PGCD(b; 21)$  قاسم مشترك للعددين 21 و  $b$  أي قاسم للعدد  $a$  و منه  $PGCD(a; b)$  قاسم مشترك للعددين  $a$  و  $b$  فهو قاسم للعدد  $(b; 21)$  أي ان  $PGCD(a; b)$  للعدد  $(2).... PGCD(a; b)$

$$PGCD(a; b) = PGCD(b; 21)$$

(2) استنتاج القيم الممكنة للعدد  $PGCD(a; b)$  من ما سبق  $PGCD(a; b)$  القيم الممكنة للعدد  $\{1; 3; 7; 21\}$  هي قواسم الطبيعية 21 وهي  $PGCD(a; b)$

(3) تعين قيمة العدد الطبيعي  $n$  بحيث يكون  $PGCD(a; b) = 7$  أي ان  $n+3$  من

$$\begin{cases} n+3 = 3k+1 \\ \text{أو} \\ n+3 = 3k+2 \end{cases} : k \in \mathbb{N}^*$$

مضاعفات 7 و ليست من مضاعفات 21 أي ان  $n+3$  عدد طبيعي غير معدوم و منه

$$\begin{cases} n = 3k-2 \\ \text{أو} \\ n = 3k-1 \end{cases} : k \in \mathbb{N}^*$$

(4) تعين قيمة العدد الطبيعي  $n$  بحيث يكون الكسر  $\frac{n^3 + 5n^2 + 7n + 24}{n+3}$  غير قابل للاختزال أي ان العددان  $a$  و  $b$  أوليان

$$n+3 = 21k'+4 : k' \in \mathbb{N} \quad \text{أو} \quad n+3 = 21k'+2 : k' \in \mathbb{N}^* \quad \text{أو} \quad n+3 = 21k'+1 : k' \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{أو} \quad n+3 = 21k'+10 : k' \in \mathbb{N} \quad \text{أو} \quad n+3 = 21k'+8 : k' \in \mathbb{N}^* \quad \text{أو} \quad n+3 = 21k'+5 : k' \in \mathbb{N}$$

$$\text{أو} \quad n+3 = 21k'+17 : k' \in \mathbb{N} \quad \text{أو} \quad n+3 = 21k'+13 : k' \in \mathbb{N}^* \quad \text{أو} \quad n+3 = 21k'+11 : k' \in \mathbb{N}$$

**(الأعداد المضافة أولية مع 21 في كل مرة)**  $n+3 = 21k'+20 : k' \in \mathbb{N}$   $\text{أو} \quad n+3 = 21k'+19 : k' \in \mathbb{N}$

$$\text{و منه} \quad n = 21k'+1 : k' \in \mathbb{N}^* \quad \text{أو} \quad n = 21k'-1 : k' \in \mathbb{N}^* \quad \text{أو} \quad n = 21k'-2 : k' \in \mathbb{N}^*$$

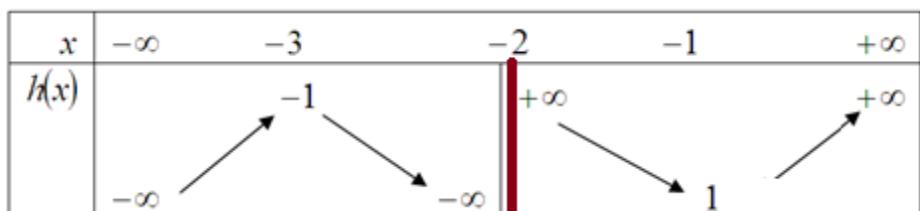
$$\text{أو} \quad n = 21k'+7 : k' \in \mathbb{N} \quad \text{أو} \quad n = 21k'+5 : k' \in \mathbb{N}^* \quad \text{أو} \quad n = 21k'+2 : k' \in \mathbb{N}$$

$$\text{أو} \quad n = 21k'+14 : k' \in \mathbb{N} \quad \text{أو} \quad n = 21k'+10 : k' \in \mathbb{N}^* \quad \text{أو} \quad n = 21k'+8 : k' \in \mathbb{N}$$

$$\text{أو} \quad n = 21k'+17 : k' \in \mathbb{N} \quad \text{أو} \quad n = 21k'+16 : k' \in \mathbb{N}$$

**المرين الثالث :**

نعتبر الدالة  $h$  المعروفة على  $\{ -2 \}$  بـ  $R - \{-2\}$  التمثيل  $(C_h)$  حيث  $h(x) = ax + b + \frac{c}{2(x+2)}$



البيانى لدالة  $h$  في المستوى المنسوب الى المعلم  
المعتمد المتتجانس  
و جدول تغيراتها هو

(1) النعدين باستعمال جدول التغيرات الدالة  $h$  الأعداد الحقيقة  $a ; b ; c$ . لدينا أي ان

$$\begin{cases} h(-1)=1 \\ h(-3)=-1 \end{cases}$$

و منه بالجمع نجد  $b=2a.....(1)$  أي ان  $-4a+2b=0$  - أي ان  $c=-2a+2.....(2)$

و لدينا  $h'(-1)=0$  و  $h'(x)=a-\frac{c}{2(x+2)^2}$  أي ان  $a-\frac{c}{2}=0$  و منه  $c=2a.....(3)$  من (2) و (3) نجد

$$b=1 \quad c=1 \quad a=\frac{1}{2}$$

$$h(x)=\frac{1}{2}x+1+\frac{1}{2(x+2)} \quad (2) \quad \text{نفرض أن}$$

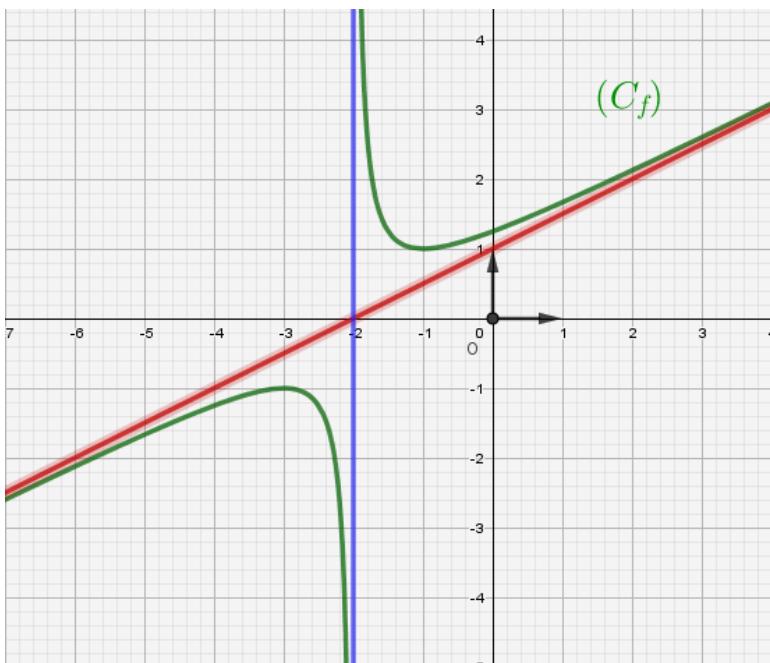
أ- تعين معادلتي المستقيمان المقاربان للمنحنى  $(C_h)$

$$: h(-4-x)+h(x)$$

$$h(-4-x)+h(x)=\frac{1}{2}(-4-x)+1+\frac{1}{2(-4-x+2)}+\frac{1}{2}x+1+\frac{1}{2(x+2)}$$

$$h(-4-x)+h(x)=0 \quad \text{و منه} \quad h(-4-x)+h(x)=\frac{1}{2}(-4)+\frac{1}{2(-2-x)}+2+\frac{1}{2(x+2)}$$

التفسير البياني :  $(C_h)$  يقبل مركز تناطر هو النقطة  $A(-2;0)$



ج- أنشئ المستقيمان المقاربان والمنحنى  $(C_h)$

(3) المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد حلول المعادلة :  $h(x)=m(x+2)$  حلولها هي ايجاد فواصل نقط تقاطع  $(C_h)$  مع المستقيم  $(\Delta_m)$  الذي معادلته

$$y=m(x+2)$$

$$\text{لما } (\Delta_m) \text{ و } (C_h) \text{ لا يتقاطعان } m \in \left[ -\infty ; \frac{1}{2} \right]$$

يتقاطعان ومنه المعادلة ليس لها حلول.

$$\text{لما } m \in \left[ \frac{1}{2} ; +\infty \right] \text{ يتقاطعان } (\Delta_m) \text{ و } (C_h)$$

في نقطتان ومنه للمعادلة حلين

$$k(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 4x + 5}{2x + 4}\right)$$

4) نعتبر الدالة  $k$  حيث

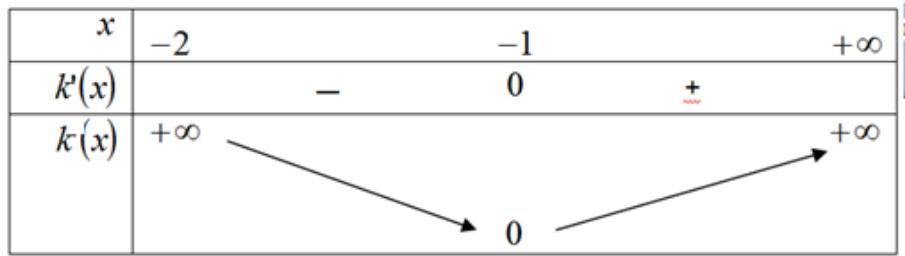
أ- تبين أن  $k(x) = \ln(h(x))$  في مجال يطلب تعينه تكون الدالة  $k$  معرفة على المجال  $[-2; +\infty)$  و الذي تكون فيه  $h(x)$  موجبة.

ب- باستعمال جدول تغيرات  $h$  استنتاج اتجاه تغير الدالة  $k$  لدينا  $k'(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$  و منه للدالتين  $k$  و  $h$  نفس اتجاه التغير على المجال  $[-2; +\infty)$  و منه  $k$  متزايدة على المجال  $[-1; +\infty)$  و متناظرة على المجال

ج- حساب نهايات الدالة  $k$  عند طرفي مجموعة تعريفها باستعمال نهاية دالة مركبة نجد أن بوضع

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} k(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t) = +\infty$$

تشكيل جدول تغيراتها



: استنتاج حلول المتراجحة  $x \in ]-2; +\infty[$  (5)  
و يكافئ ان  $k(x) > \ln(2)$   
و  $\ln(h(x)) > \ln(2)$

أي ان  $h(x) > 2$  معناه  $\frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{2(x+2)} > 0$  أي ان  $\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2(x+2)} > 2$  بتوحيد المقامات نجد

بما ان  $x \in ]-2; +\infty[$  الكسر السابق اشارته من اشارة البسط أي ان  $x^2 - 3 > 0$  وهي محققة من

$S = ]-2; -\sqrt{3}[ \cup ]\sqrt{3}; +\infty[$  و منه حلول المتراجحة هي

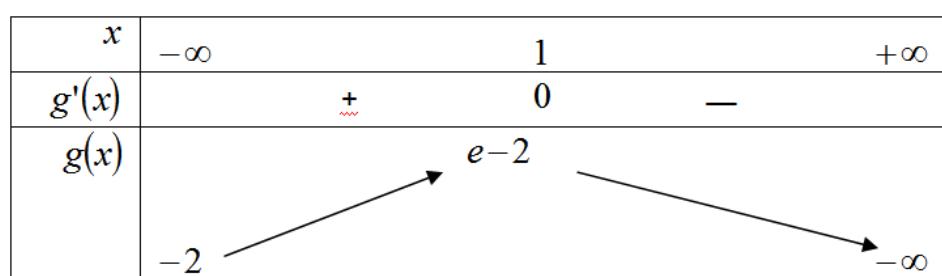
أجل  $x \in ]-2; -\sqrt{3}[ \cup ]\sqrt{3}; +\infty[$

الترین الرابع (7 نقاط)

الجزء الأول :  $g(x) = (2-x)e^x - 2$  دالة معرفة على مجموعة الاعداد الحقيقية  $R$  بـ دراسة تغيرات الدالة  $g$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(2-x)e^x - 2] = -2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x)e^x = -\infty$$

النهايات :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2$  اشارتها من إشارة  $(1-x)e^x$  وهي موجبة على المجال  $[-\infty; 1]$  و سالبة على المجال  $[1; +\infty]$  المشتقة :  $g'(x) = (1-x)e^x$  اشارتها من إشارة  $(1-x)e^x$  وهي موجبة على المجال  $[-\infty; 1]$  و سالبة على المجال  $[1; +\infty]$  و منه  $g$  متزايدة على المجال  $[-\infty; 1]$  و متناظرة على المجال  $[1; +\infty]$



تشكيل جدول تغيراتها

(2) تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلين إحداهما معدوم والأخر  $\alpha$  حيث  $+1,59 < \alpha < 1,60$  لدينا  $g(0) = 0$  و بما ان  $g(1,59) = -0,02$  و  $g(1,6) = 0,01$  بما الدالة  $g$  مستمرة و متناقصة على المجال  $[1; +\infty]$  فحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلين إحداهما معدوم والأخر  $\alpha$  حيث  $1,59 < \alpha < 1,60$ .

استنتاج إشارة  $g(x)$  من جدول تغيراتها نستنتج اشارتها

$x$	$-\infty$	0	$\alpha$	$+\infty$
اشارة $g(x)$	—	0	+	0 —

الجزء الثاني :

دالة عدديّة معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية  $R$  كما يلي  $f$  تقميّلها البياني في معلم  $(C_f)$  و  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{e^x - 1} : x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

متعامد و متجانس

(1) اثبات أن الدالة  $f$  تقبل الاشتتقاق عند 0 : نحسب نهاية النسبة  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{e^h - 1} = 1 = f'(0)$  . منه محققة .

كتابة معادلة الماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي  $y = x$  .

(2) حساب  $f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x - 1] = -1$  ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = +\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = -\infty$  :

(3) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم  $x$  فإن  $f(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}}$  : لدينا  $f(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}}$  بضرب المقام والبسط في  $e^{-x}$  نجد وهو المطلوب

حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [1 - e^{-x}] = 1$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}} = 0$  :

تفسير النتيجة هندسيا هو ان حامل محور الفواصل هو مستقيم مقارب للمنحنى  $(C_f)$

(4) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم  $x$  فإن  $f'(x) = \frac{x g(x)}{(e^x - 1)^2}$  : نحسب المشتقة

$$x g(x) f'(x) = \frac{2x(e^x - 1) - x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{x[(2-x)e^x - 2]}{(e^x - 1)^2} = \frac{x g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

$x$	$-\infty$	0	$\alpha$	$+\infty$
اشارة $x g(x)$	+	0	+	0 —

استنتاج اتجاه تغير الدالة  $f$  و منه  $f$  متزايدة على المجال

$[\alpha; +\infty[$  و متناقصة على المجال  $]-\infty; \alpha]$

$x$	$-\infty$	0	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0
$f(x)$		0	$f(\alpha)$	0

(5) ليكن  $(C)$  التمثيل البياني للدالة  $x \mapsto -x^2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x^2] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 e^x}{e^x - 1} = 0 \quad : \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x^2]$$

- حساب و منه  $(C_f)$  متقاربان جهة  $-\infty$

ب- دراسة وضعية  $(C_f)$  بالنسبة لمنحنى  $(C)$  لدينا اشارته من إشارة المقام و

ينعدم عند 0 و منه  $(C_f)$  يقع فوق  $(C)$  على المجال  $[0; +\infty)$  و يتقطعان في  $O$  و  $(C_f)$  يقع تحت  $(C)$  على المجال  $[-\infty; 0]$ .

أرسم  $(C)$  و  $(C_f)$  و  $(T)$  :

