إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

المستوى: الثالثة علوم تجريبية المدة: ساعتان

التمرين الأوّل :............. (06,5 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على $[0;1]$ بـ : $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+4}$.

1) أ) أدرس تغيّرات الدالة f على $[0;1]$.

ب) إستنتج أنّه إذا كان $x\in[0;1]$ فإنّ $f(x)\in[0;1]$.

ج) مثّل بيانيا الدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$. (الوحدة $10cm$).

2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بـ : $u_0=0$ وَ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) باستعمال المنحني (C) للدّالة f عيّن على محور الفواصل الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 .

✓ أعط تخمينا حول إتجاه و تقارب المتتالية (u_n) .

ب) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le 1$.

ج) بيّن أنّ : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ ، ثمّ إستنتج إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

د) هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ . برّر إجابتك .

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$.

أ) برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل .

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثمّ عبارة u_n بدلالة n .

ج) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الثاني :............. (06 نقاط)

يلعب طفل بـ 20 كريّة ، منها 13 كريّة حمراء وَ 7 كريّات خضراء . يضع 10 كريّات حمراء وَ 3 كريّات خضراء في العلبة A ، و يضع الباقي في العلبة B .

1) في أوّل لعبة يختار 3 كريّات عشوائيا و في **آن واحد** من العلبة A و ينظر كم كريّة حمراء ظهرت .
ليكن X المتغيّر العشوائي المتعلق بعدد الكرات الحمراء المسحوبة .

✓ عيّن قانون إحتمال المتغيّر العشوائي X ، ثمّ أحسب أمله الرّياضي $E(X)$.

2) و في ثاني لعبة ، يختار الطفل إحدى العلب و يسحب منها كرة واحدة .
أ) مثّل هذه الوضعية بشجرة الإحتمالات .

ب) أحسب إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء .

ج) علما أنّ الطفل سحب كرة حمراء ، ما إحتمال أن تكون من العلبة A ؟ .

التمرين الثالث : .... (07,5 نقاط)

الجزء الأوّل : نعتبر الدّالة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = \ln x + \dfrac{x-2}{x}$.

1) أحسب نهايات الدالة g عند 0 وَ $+\infty$.

2) أدرس تغيّرات الدالة g و شكل جدول تغيّراتها .

3) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيدا α حيث : $1,4 < \alpha < 1,5$.

✓ إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0;+\infty[$.

الجزء الثّاني : f دالة معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = 1 + (x-2)\ln x$.

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب نهاية الدّالة f عند 0 و عند $+\infty$ ، ثمّ فسّر النهاية عند 0 هندسيا .

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها .

3) بيّن أنّ : $f(\alpha) = 1 - \dfrac{(\alpha-2)^2}{\alpha}$ ، ثمّ أعط قيمة مقرّبة لـ $f(\alpha)$ من أجل $\alpha \approx 1,45$.

4) (T_{x_0}) هو المماس لـلمنحني (C_f) عند النقطة M_0 ذات الفاصلة x_0 :

أ) أكتب المعادلة الديكارتية للمماس (T_{x_0}) .

ب) عيّن x_0 إذا علمت أنّ المماس (T_{x_0}) يمر بالنقطة $A(2;0)$.

ج) إستنتج أنّ (C_f) يقبل مماسين يمرّان بالنقطة A ، ثمّ أكتب معادلة كل منهما .

5) أرسم كلاً من المماسين و المنحني (C_f) .

الجزء الثالث : نعتبر المستقيم (d_m) الذي معادلته $y = mx - 2m$ ، حيث m وسيط حقيقي .

أ) تحقّق أنّ (d_m) يمر بالنقطة A .

ب) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx - 2m$.

بالتوفيق في بكالوريا 2018 ـــــــــــ أساتذة المادة

تصحيح الإختبار للفصل الثاني شعبة العلوم تجريبية

التمرين الأول :

لدينا الدالة f المعرفة على $[0;1]$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+4}$.

1) أ) دراسة تغيّرات الدالة f على $[0;1]$:

لدينا من أجل كل x من $[0;1]$: $f'(x)=\dfrac{10}{(x+4)^2}$ ، أي : $f'(x)>0$.

ومنه الدالة f متزايدة على المجال $[0;1]$.

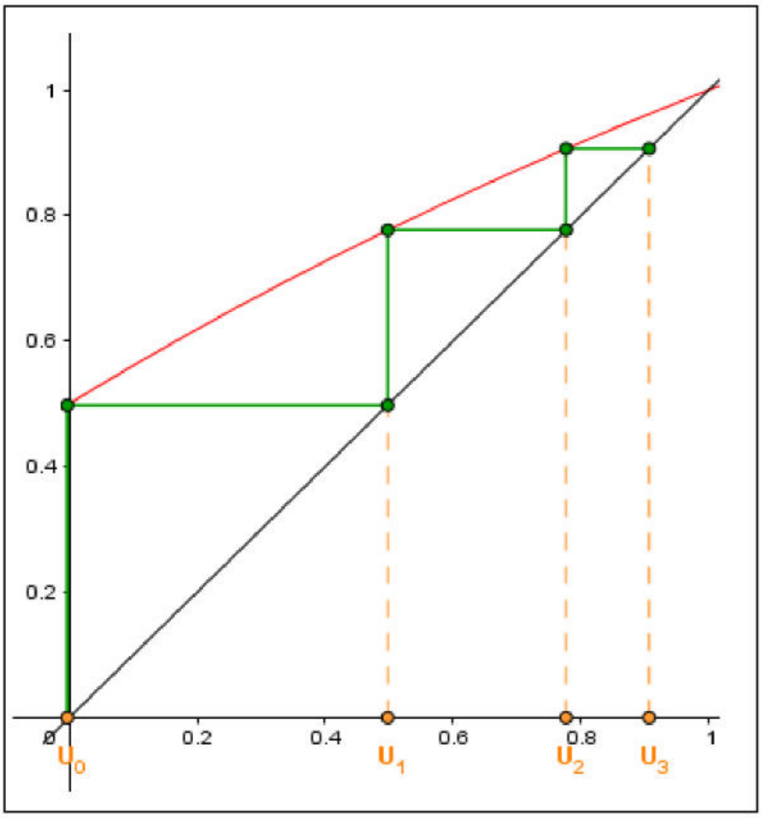
ب) لدينا $x\in[0;1]$ أي : $0\le x\le 1$ ، بما أن الدالة f متزايدة على $[0;1]$ فإن : $f(0)\le f(x)\le f(1)$ ، أي :

$\dfrac{1}{2}\le f(x)\le 1$ ، لكن : $0\le\dfrac{1}{2}\le f(x)\le 1$ ، ومنه : $0\le f(x)\le 1$ ، أي : $f(x)\in[0;1]$.

إذن : إذا كان $x\in[0;1]$ فإن $f(x)\in[0;1]$.

ج) **التمثيل البياني :**

أنظر الشكل المقابل .



2) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}.$$

أ) تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 .

أنظر الشكل المقابل .

التخمين : نلاحظ أن المتتالية (u_n) متزايدة و تتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع المنحني (C) و المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

ب) برهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le 1$: (**نستعمل البرهان بالتراجع**)

✓ التحقّق من أجل $n=0$ ، $(u_0=0)$ ، أي : $0\le 0\le 1$ ، ومنه : $0\le u_0\le 1$ (**محقّقة**).

✓ نفرض صحة الخاصية من أجل n ، أي : $0\le u_n\le 1$.

✓ نثبت صحة الخاصية من أجل $n+1$ ، أي : $0\le u_{n+1}\le 1$.

لدينا فرضا : $0\le u_n\le 1$ ، و حسب السؤال الأوّل **(ب)** نستنتج أنّ : $0\le f(u_n)\le 1$ أي : $0\le u_{n+1}\le 1$.

الخاصية محققة من أجل $n+1$ يستلزم أنّها صحيحة من أجل n ، ومنه من أجل كل عدد طبيعي n :
$0 \le u_n \le 1$. وهو المطلوب.

ج) بيان أنّ : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$:

$u_{n+1}-u_n=\dfrac{3u_n+2}{u_n+4}-u_n$ ، أي : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3u_n+2-u_n^2-4u_n}{u_n+4}$ ، أي :

$u_{n+1}-u_n=\dfrac{-u_n^2-u_n+2}{u_n+4}$ ، ومنه : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$. **وهو المطلوب.**

✓ لدينا : $0\le u_n\le 1$ ، ومنه : $1-u_n\ge 0$ ، وَ أيضا : $u_n+2>0$ ، وَ $u_n+4>0$.

إذن : $u_{n+1}-u_n\ge 0$ ، و منه المتتالية (u_n) متزايدة.

د) نعم المتتالية (u_n) متقاربة.

✓ بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بـ 1 $(0\le u_n\le 1)$ إذن فهي متقاربة.

3) لدينا : (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$.

أ) برهان أن المتتالية (v_n) هندسية:

نحسب v_{n+1} : $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}=\dfrac{\dfrac{3u_n+2}{u_n+4}-1}{\dfrac{3u_n+2}{u_n+4}+2}=\dfrac{\dfrac{3u_n+2-u_n-4}{u_n+4}}{\dfrac{3u_n+2+2u_n+8}{u_n+4}}=\dfrac{2u_n-2}{5u_n+10}$ ، ومنه :

$v_{n+1}=\dfrac{2(u_n-1)}{5(u_n+2)}$ ، أي : $v_{n+1}=\dfrac{2}{5}v_n$ ، إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\dfrac{2}{5}$ وَ $v_0=-\dfrac{1}{2}$.

ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n ، ثمّ عبارة u_n بدلالة n :

✓ عبارة v_n : $v_n=v_0\times q^n$ ، أي : $v_n=-\dfrac{1}{2}(\dfrac{2}{5})^n$.

✓ عبارة u_n : لدينا $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$ ، أي : $v_nu_n+2v_n=u_n-1$ ، أي : $v_nu_n-u_n=-2v_n-1$ ،

ومنه : $(v_n-1)u_n=-2v_n-1$ ، أي : $u_n=\dfrac{-2v_n-1}{v_n-1}$ ، أي : $u_n=\dfrac{-2\times(-\dfrac{1}{2})(\dfrac{2}{5})^n-1}{(-\dfrac{1}{2})(\dfrac{2}{5})^n-1}$ ،

إذن : $u_n=\dfrac{(\dfrac{2}{5})^n-1}{(-\dfrac{1}{2})(\dfrac{2}{5})^n-1}$.

ج) إستنتاج نهاية المتتالية (u_n) :

نعلم أنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{2}{5})^n=0$ ، ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=1$.

التمرين الثاني :

1) اللّعبة الأولى :

أوّلا نعين قيم المتغيّر العشوائي X : بما أنّه يرفق بعدد الكرات الحمراء المسحوبة فتكون قيمه كالتالي :

. $\mathbb{X} \in \{0;1;2;3\}$

✓ تعيين قانون إحتمال المتغير العشوائي X :

عدد الحالات الممكنة للسحب من العلبة A هي : $286 = \frac{13!}{3!(13-3)!} = C_{13}^{3}$.

1) $p(X=0) = \frac{C_3^3}{286} = \frac{1}{286}$.

2) $p(X=1) = \frac{C_{10}^1 \times C_3^2}{286} = \frac{10\times 3}{286} = \frac{30}{286}$.

3) $p(X=2) = \frac{C_{10}^2 \times C_3^1}{286} = \frac{45\times 3}{286} = \frac{135}{268}$.

4) $p(X=3) = \frac{C_{10}^3}{286} = \frac{120}{286}$.

X_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{286}$	$\frac{30}{286}$	$\frac{135}{286}$	$\frac{120}{286}$

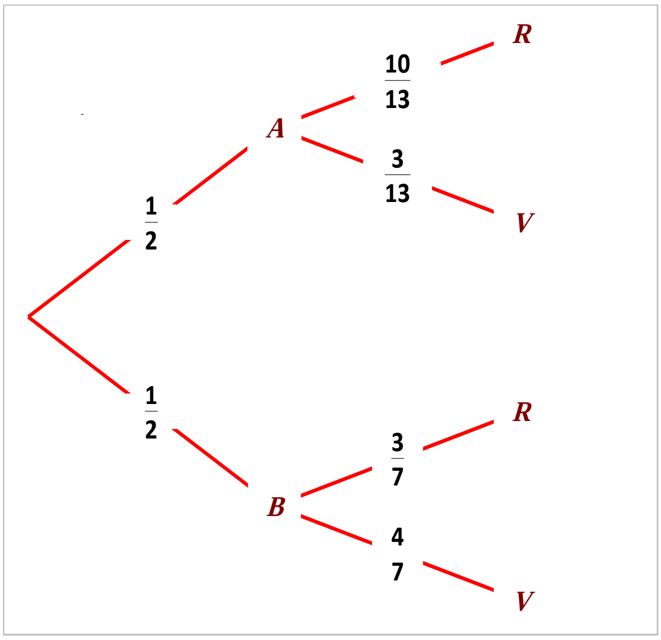
✓ حساب الأمل الرياضي $E(X)$:

$E(X) = \frac{0(1)+1(30)+2(135)+3(120)}{286} = \frac{30+270+360}{286} = \frac{660}{286} \approx 2,3$.

2) اللّعبة الثانية :

أ) تمثيل الوضعية بشجرة الإحتمالات :

أنظر الشكل المقابل .



ب) إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء هو :

$p(R) = p(A\cap R) + p(B \cap R)$.

$p(R) = (p(A)\times p_A(R)) + (p(B)\times p_B(R))$.

أي ، $p(R) = (\frac{1}{2}\times\frac{10}{13}) + (\frac{1}{2}\times\frac{3}{7})$:

$p(R) = (\frac{5}{13}) + (\frac{3}{14}) = \frac{70+39}{182} = \frac{109}{182}$.

ج) حساب الإحتمال الشرطي : $p_R(A)$

$$p_R(A) = \frac{p(A\cap R)}{p(R)} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{109}{182}} = \frac{5}{13}\times\frac{182}{109}$$

ومنه : $p_R(A) = \frac{70}{109}$.

التمرين الثالث :

الجزء الأول : نعتبر الدّالة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=\ln x+\dfrac{x-2}{x}$.

1) حساب النهايات :

✓ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=-\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}-2\\0^+\end{cases}$ $\begin{cases}\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x=-\infty\\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{x-2}{x}=-\infty\end{cases}$.

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x}=1\end{cases}$.

2) دراسة تغيّرات الدالة g و تشكيل جدول تغيّراتها :

الدالة المشتقة :

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ،

و دالتها المشتقة هي : $g'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}$.

نلاحظ أن : $g'(x)>0$ من أجل كل x من $]0;+\infty[$.

إذن الدالة g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

جدول التغيّرات :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3) بيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α حيث : $1,4<\alpha<1,5$:

الدالة g مستمرة و رتيبة على $]0;+\infty[$ ، إذن هي مستمرة و رتيبة على المجال $[1,4;1,5]$.

و بما أنّ : $\begin{cases}g(1,4)=-0,09\\g(1,5)=0,07\end{cases}$ أي : $g(1,4)\times g(1,5)<0$ ، إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α

حيث : $1,4<\alpha<1,5$.

✓ إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $]0;+\infty[$: نلخّص الإشارة في الجدول التالي :

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

من أجل $x\geq\alpha$ يكون $g(x)\geq g(\alpha)$ ، أي : $g(x)\geq 0$.

من أجل $0<x<\alpha$ يكون $g(x)<g(\alpha)$ ، أي : $g(x)<0$.

الجزء الثاني : f دالة معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=1+(x-2)\ln x$.

1) حساب النهايات :

✓ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\left[1+(x-2)\ln x\right]=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}(x-2)=-2\\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\ln x=-\infty\end{cases}$.

التفسير الهندسي : المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديّا معادلته $x=0$.

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+(x-2)\ln x\right]=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{cases}$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f و تشكيل جدول تغيّراتها :

✓ **الدالة المشتقة :** الدالة f تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ، و دالتها المشتقة هي :

$f'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}(x-2)$ ، أي : $f'(x)=\ln x+\dfrac{x-2}{x}$ ، ومنه : $f'(x)=g(x)$.

إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

✓ **جدول التغيّرات :**

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) بيّن أنّ : $f(\alpha)=1-\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ، ثمّ أعط قيمة مقرّبة لـ $f(\alpha)$ من أجل $\alpha\approx 1,45$.

نعلم أنّ : $g(\alpha)=0$ ، أي : $\ln\alpha+\dfrac{\alpha-2}{\alpha}=0$ ، ومنه : $\ln\alpha=-\dfrac{\alpha-2}{\alpha}$.

نحسب الآن $f(\alpha)$: $f(\alpha)=1+(\alpha-2)\ln\alpha$ ، أي : $f(\alpha)=1+(\alpha-2)(-\dfrac{\alpha-2}{\alpha})$ ، ومنه :

$f(\alpha)=1-\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ، و هو المطلوب .

✓ من أجل $\alpha\approx 1,45$ ، يكون : $f(\alpha)\approx 0,8$.

4) (T_{x_0}) هو المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة M_0 ذات الفاصلة x_0 :

أ) كتابة معادلة المماس (T_{x_0}) : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

ب) بما أنّ (T_{x_0}) يشمل النقطة $\mathrm{A}(2;0)$ فيكون لدينا : (إحداثياها يحقّقان معادلة المماس (T_{x_0})).

أي : $0=f'(x_0)(2-x_0)+f(x_0)$ ، أي : $0=\left[\ln x_0+\dfrac{x_0-2}{x_0}\right](2-x_0)+1+(x_0-2)\ln x_0$ ، ومنه :

$0=(x_0-2)\left[\ln x_0-(\ln x_0+\dfrac{x_0-2}{x_0})\right]+1$ ، أي : $(x_0-2)\left[-\dfrac{x_0-2}{x_0}\right]=-1$ ، ومنه :

$-\dfrac{(x_0-2)^2}{x_0}=-1$ ، أي : $-(x_0-2)^2=-x_0$ ، أي : $(x_0-2)^2=x_0$ ، أي : $x_0^2-4x_0+4-x_0=0$ ،

ومنه : $x_0^2-5x_0+4=0$ ، معناه أنّ : $x_0=1$ ، أو $x_0=4$.

ج) إذن المنحني (C_f) يقبل مماسين يمران بالنقطة A :

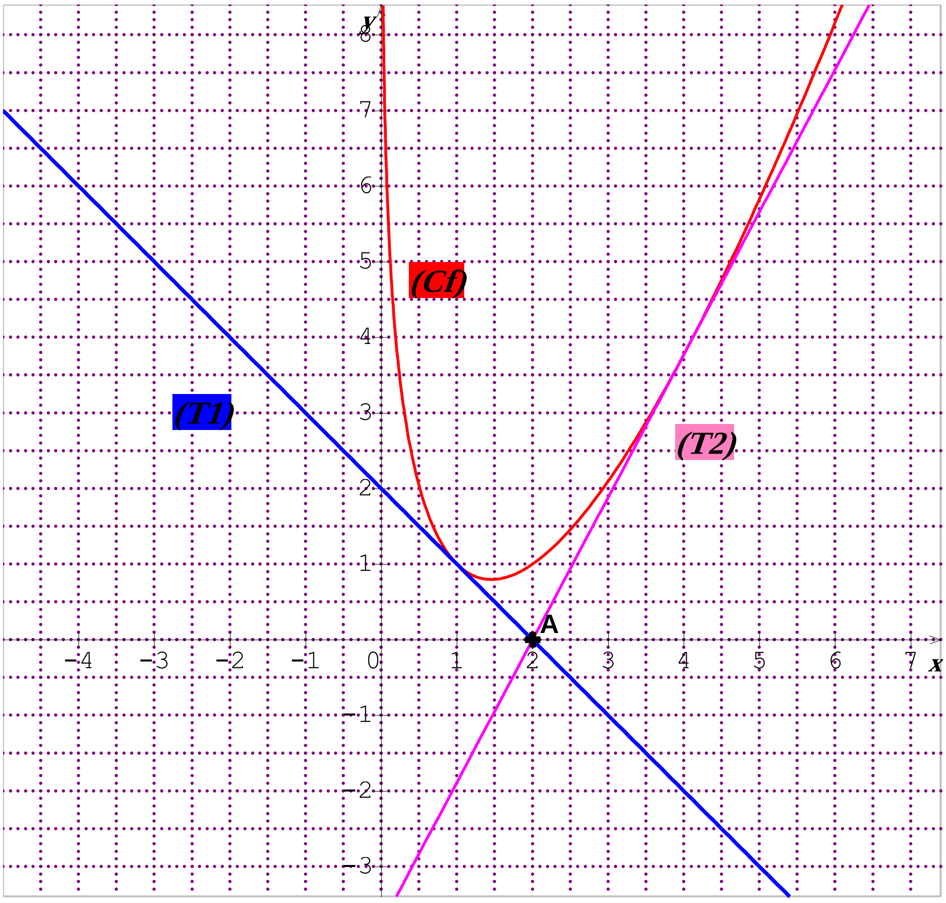
✓ المماس الأول يمسّ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

✓ المماس الثاني يمسّ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 4 .

1) معادلة المماس الأول : $(T_1): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ، ومنه : $(T_1): y=-x+2$.

2) معادلة المماس الثاني : $y=f'(4)(x-4)+f(4)$ ، ومنه : $(T_2): y=(\ln 4+\dfrac{1}{2})x-2\ln(4)-1$.

5) رسم المماسين و المنحنى (C_f) :



الجزء الثالث : $(d_m): y=mx-2m$.

أ) التحقق أنّ : (d_m) يمر بالنقطة A أي : نعوض إحداثيي النقطة A في معادلة المستقيم (d_m) :

$0=m(2)-2m$ ، إذن : (d_m) يشمل النقطة A .

ب) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $f(x)=mx-2m$:

عدد حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (d_m) .

المستقيم (d_m) يتحرك حركة دورانية حول النقطة الثابتة A .

نعلم أنّ المماسين (T_1) و (T_2) يمرّان أيضا بالنقطة A .

لدينا : $\begin{cases}(d_m): y = mx - 2m \\ (T_1): y = -x + 2 \\ (T_2): y = (\ln 4 + \frac{1}{2})x - 2\ln(4) - 1\end{cases}$. ندرس ثلاث حالات :

✓ لما : $m < 0$ ، هناك ثلاث حالات :

1) $m < -1$ معناه أنّ : (d_m) يقع فوق (T_1) ، ومنه المعادلة تقبل حلّين متمايزين .

2) $m = -1$ معناه أنّ : (d_m) هو نفسه (T_1) ، ومنه المعادلة تقبل حل وحيد هو 1 .

3) $-1 < m < 0$ معناه أنّ : (d_m) يقع تحت (T_1) ، ومنه المعادلة لا تقبل حلول .

✓ لما : $m = 0$ معناه أنّ : $(d_m): y = 0$ ، ومنه المعادلة لا تقبل حلول .

✓ لما : $m > 0$ ، هناك ثلاث حالات :

1) $0 < m < \ln 4 + \frac{1}{2}$ معناه أنّ : (d_m) يقع تحت (T_2) ، ومنه المعادلة لا تقبل حلول .

2) $m = \ln 4 + \frac{1}{2}$ معناه أنّ : (d_m) هو نفسه (T_2) ، ومنه المعادلة تقبل حل وحيد هو 4 .

3) $m > \ln 4 + \frac{1}{2}$ معناه أنّ : (d_m) يقع فوق (T_2) ، ومنه المعادلة تقبل حلين متمايزين .

تمنياتنا للجميع بالنجاح الباهر في بكالوريا 2018 إن شاء الله

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبد الرزاق