

### الاختبار الأول في مادة الرياضيات

#### التمرين الأول :

(u<sub>n</sub>) المتتالية العددية المعرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية كما يلي : u<sub>0</sub> = 2 و من أجل كل عدد

$$\text{طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times (0.5)^n$$

. (1) أ) أنقل على ورقة اجابتك ثم اتمم الجدول التالي، تدور النتائج الى 10<sup>-2</sup>.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u <sub>n</sub>									

. ب) من خلال الجدول السابق ، ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u<sub>n</sub>). .

. (2) أ) برهن بالترافق أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n غير معروف : u<sub>n</sub> ≥ 15/4 × (0.5)<sup>n</sup>

. ب) استنتاج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n غير معروف : u<sub>n+1</sub> - u<sub>n</sub> ≤ 0

. ج) استنتاج أن (u<sub>n</sub>) متتالية متقاربة .

. (3) (v<sub>n</sub>) المتتالية العددية المعرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية كما يلي :

$$v_n = u_n - 10 \times (0.5)^n$$

. أ) بين أن (v<sub>n</sub>) متتالية هندسية يتطلب تعين أساسها وحدتها الأولى .

. ب) أكتب v<sub>n</sub> بدالة n ثم استنتاج u<sub>n</sub> بدالة n .

. ج) احسب  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  .

. (4) أحسب المجموع S<sub>n</sub> حيث : S<sub>n</sub> = u<sub>0</sub> + u<sub>1</sub> + ..... + u<sub>n</sub> .

#### التمرين الثاني :

f الدالة المعرفة على R كما يلى: f(x) = ln(e<sup>x</sup> + e<sup>-x</sup>/4) و Cf التمثيل البياني للدالة f في المستوى

المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس (j̄). (o; i; j̄)

. (1) احسب  $\lim_{n \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x)$  .

$$(2) \text{ أ) بين انه من اجل كل عدد حقيقي } x : f'(x) = \left( \frac{4e^{2x} - 1}{4e^{2x} + 1} \right)$$

. ب) ادرس اشارة (x)'f على R ثم انجز جدول تغيرات الدالة f .

. (3) أ) بين ان المستقيم (Δ) اذا المعادلة y = x مستقيم مقارب للمنحنى (Cf) بجوار +∞

. ب) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x ، f(x) = -x - 2 ln 2 + ln(4e<sup>2x</sup> + 1) .

. ج) استنتاج ان المنحنى (Cf) يقبل مستقيما مقاربا اخر (Δ') بجوار -∞ - يتطلب تعين معادلة له

. (4) عين نقط تقاطع المنحنى (Cf) مع محور التراتيب ثم ارسم المنحنى (Cf)

. (5) نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي x حيث : f(x) = m - 2.....(1) و m وسيط حقيقي .

. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة (1)

## تصحيح الاختبار الأول لقسم 3 تقني رياضي 2018/2017

**الترميم الأول : (09 نقط)**

**(1) اتمام الجدول التالي، تدور النتائج الى  $10^{-2}$  ..... (01ن)**

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$u_n$	2	3.14	2.18	1.19	0.61	0.31	0.16	0.08	0.04

**ب) يبدو أن الممتاليه  $(u_n)$  متناقصة ابتداء من الحد الثاني ..... (0.5ن)**

**(2) برهان بالترابع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معروف :**

- تتأكد من صحة الخاصية من أجل  $n=1$  و  $u_1 = 3.4$  .  
اذن الخاصية صحيحة من أجل  $n=1$  .

- نفرض صحة الخاصية من أجل  $n$  حيث  $u_n \geq \frac{15}{4} \times (0.5)^n$  أي  $n \geq 1$  وبرهن على صحة الخاصية

.  $u_{n+1} \geq \frac{15}{4} \times (0.5)^{n+1}$  :

لدينا :  $\frac{1}{5}u_n \geq \frac{3}{4} \times (0.5)^n$  اذن  $u_n \geq \frac{15}{4} \times (0.5)^n$

.  $\frac{1}{5}u_n + 3(0.5)^n \geq \frac{15}{4} \times (0.5)^n$  يعني  $\frac{1}{5}u_n + 3(0.5)^n \geq \frac{3}{4} \times (0.5)^n + 3(0.5)^n$

.  $u_{n+1} \geq \frac{15}{4} \times (0.5)^n$

.  $(0.5)^n > (0.5)^{n+1}$  غير معروف ،

.  $u_{n+1} \geq \frac{15}{4} \times (0.5)^{n+1}$  . اذن الخاصية صحيحة من أجل  $(n+1)$

.  $u_n \geq \frac{15}{4} \times (0.5)^n$  غير معروف :

**ب) استنتاج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معروف :**

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معروف :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + 3(0.5)^n - u_n = -\frac{4}{5}u_n + 3(0.5)^n = \frac{4}{5}\left(-u_n + \frac{15}{4} \times (0.5)^n\right)$$

.  $u_n \geq \frac{15}{4} \times (0.5)^n$  من الاجابة (2) أ) من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معروف :

اذن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معروف :

اذن الممتاليه  $(u_n)$  متناقصة .

**ج) استنتاج أن  $(u_n)$  ممتاليه متقاربة ..... (0.5ن)**

بما أن المتتالية متناقصة (الإجابة 1) ب ) ومحدودة من الأسفل، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم :  $u_n \geq \frac{15}{4} \times (0.5)^n > 0$  (الإجابة 1 أ ) فهي متقاربة .

(3) نبين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعين أساسها وحدتها الأول من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 10 \times (0.5)^{n+1}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3(0.5)^n - 10(0.5)^n \times (0.5)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3(0.5)^n - 5(0.5)^n$$

$$\vdots$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n - 2(0.5)^n$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n - 10(0.5)^n)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$$

اذن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{1}{5}$  وحدتها الأول  $v_0$  حيث

$$(0.5) \dots v_0 = u_0 - 10(0.5)^0 = 2 - 10 = -8$$

ب) كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$  .

$$(0.5) \dots v_n = v_0 q^n = -8 \left( \frac{1}{5} \right)^n$$

لدينا  $u_n = -8 \left( \frac{1}{5} \right)^n + 10 \times (0.5)^n$  وبالتالي  $u_n = v_n + 10 \times (0.5)^n$  اذن  $v_n = u_n - 10 \times (0.5)^n$  :

اجل كل عدد طبيعي  $n$  (0.5).....

ج) حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  (0.5).....

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0.5)^n = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{5} \right)^n = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ -8 \left( \frac{1}{5} \right)^n + 10(0.5)^n \right] = 0$$

عنصران من المجال [ ]-1;1 . 0.5

(4) حساب المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$\begin{aligned}
S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\
S_n &= v_0 + 10(0.5)^0 + v_1 + 10(0.5)^1 + \dots + v_n + 10(0.5)^n \\
S_n &= v_0 + v_1 + \dots + v_n + 10[(0.5)^0 + (0.5)^1 + \dots + (0.5)^n] \\
S_n &= -8 \left[ \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{5} - 1} \right] + 10 \left[ \frac{(0.5)^{n+1} - 1}{0.5 - 1} \right] \\
S_n &= 10 \left[ \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} - 1 \right] - 20[(0.5)^{n+1} - 1] \\
S_n &= 10 \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} - 20(0.5)^{n+1} + 10
\end{aligned}$$

### التمرين الثاني : (11 نقطة)

(1) حساب  $\lim_{n \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

(2) نبين انه من اجل كل عدد حقيقي  $x$  :

الدالة  $f$  قابلة للاشتتقاق على  $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{e^x - \frac{e^{-x}}{4}}{e^x + \frac{e^{-x}}{4}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{4e^x - e^{-x}}{4}}{\frac{4e^x + e^{-x}}{4}}$$

$$f'(x) = \frac{4e^x - e^{-x}}{4e^x + e^{-x}}$$

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(4e^{2x} - 1)}{e^{-x}(4e^{2x} + 1)}$$

$$f'(x) = \frac{4e^{2x} - 1}{4e^{2x} + 1}$$

(ب) دراسة اشارة  $f'(x)$  على  $\mathbb{R}$  ثم انجاز جدول تغيرات الدالة  $f$

$$(2e^x - 1)(2e^x + 1) = 0 \quad \text{يعني} \quad 2e^x - 1 = 0 \quad \text{يعني} \quad f'(x) = 0$$

$$\cdot \quad x = -\ln 2$$

$x$	$-\infty$	$-ln2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

. الدالة متناقصة تماما على المجال  $[-2\ln 2; +\infty]$  ومتزايدة تماما على المجال  $[-\infty; -2\ln 2]$ .

جدول التغيرات : (0.5)

$x$	$-\infty$	$-ln2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(-ln2)$	$+\infty$

$$f(-\ln 2) = 0$$

(3) ا) نبين ان المستقيم ( $\Delta$ ) اذا المعادلة  $y = x$  مستقيم مقارب للمنحنى ( $Cf$ ) بجوار  $+\infty$

$$f(x) - y = \ln\left(e^x + \frac{e^{-x}}{4}\right) - x$$

$$f(x) - x = \ln\left(e^x + \frac{e^{-x}}{4}\right) - \ln e^x$$

$$f(x) - x = \ln\left(\frac{e^x}{e^x} + \frac{e^{-x}}{4e^x}\right)$$

$$f(x) - x = \ln\left(1 + \frac{e^{-2x}}{4}\right)$$

$$\text{اذن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \ln 1 = 0$$

وبالتالي : المستقيم ( $\Delta$ ) اذا المعادلة  $y = x$  مستقيم مقارب للمنحنى ( $Cf$ ) بجوار  $+\infty$

ب) نبين انه من اجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f(x) = -x - 2\ln 2 + \ln(4e^{2x} + 1)$

من اجل كل عدد حقيقي  $x$  :

(01.5).....

$$f(x) = \ln\left(e^x + \frac{e^{-x}}{4}\right)$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{4e^x + e^{-x}}{4}\right)$$

$$f(x) = \ln(4e^x + e^{-x}) - \ln 4$$

$$f(x) = \ln e^{-x}(4e^{2x} + 1) - \ln 2^2$$

$$f(x) = \ln e^{-x} + \ln(4e^{2x} + 1) - 2\ln 2$$

$$f(x) = -x - 2\ln 2 + \ln(4e^{2x} + 1)$$

ج) استنتاج ان المنحنى ( $Cf$ ) يقبل مستقيما مقاربا اخر ( $\Delta'$ ) بجوار  $\infty$ - يتطلب تعين معادلة له بما أن  $\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(4e^{2x} + 1)] = \ln 1 = 0$  فان المنحنى ( $Cf$ ) يقبل مستقيما مقاربا اخر ( $\Delta'$ ) بجوار  $-\infty$  - معادلة له  $y = -x - 2\ln 2$

4) تعين نقط تقاطع المنحنى ( $Cf$ ) مع محور التراتيب ثم رسم المنحنى ( $Cf$ )

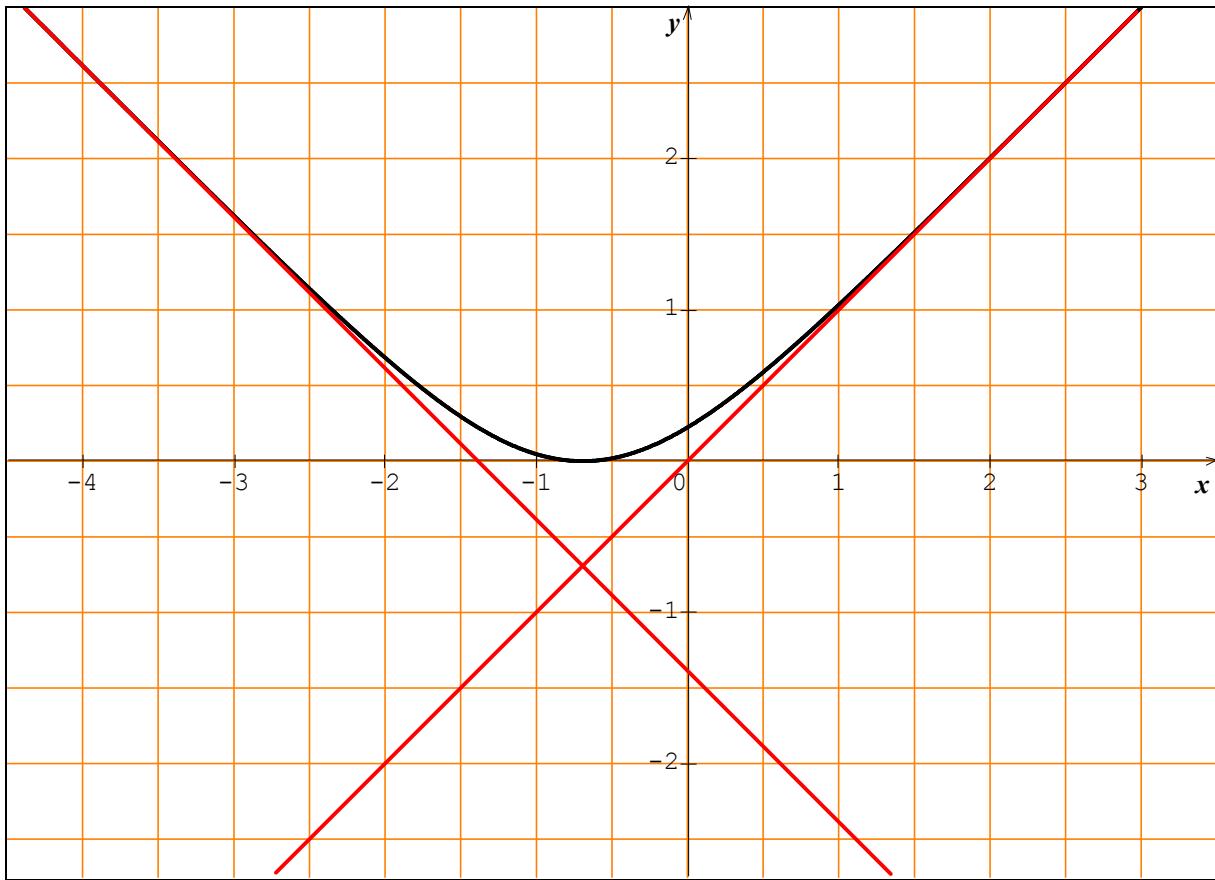
$$\ln\left(e^x + \frac{e^{-x}}{4}\right) = 0 = \ln 1 \quad \text{يعني} \quad f(x) = 0 \quad \text{يعني}$$

$$4e^{2x} - 4e^x + 1 = 0 \quad 4e^{2x} + 1 = 4e^x \quad 4e^x + e^{-x} = 4 \quad \text{يعني} \quad \left(e^x + \frac{e^{-x}}{4}\right) = 1$$

$$x = -\ln 2 \quad (2e^x - 1) = 0 \quad (2e^x - 1)^2 = 0 \quad \text{يعني}$$

$$(Cf) \cap (yy') = \{A(-\ln 2; 0)\} : \quad \text{اذن}$$

رسم المنحنى ( $Cf$ )



(5) المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد واصارة حلول المعادلة (1) .....(01)

حلول المعادلة (1) هي فوائلن نقط تقاطع المنحنى ( $C_f$ ) مع المستقيم ذو معادلة  $y = m - 2$

- اذا كان :  $0 < m - 2 < 2$  أي  $2 < m < 0$  المعادلة لا تقبل حلولا .
- اذا كان :  $m - 2 = 0$  أي  $m = 2$  المعادلة تقبل حللا مضاعفا سالبا .
- اذا كان :  $m - 2 < -\ln 2$  أي  $m < 2 - \ln 2$  المعادلة تقبل حللين متباينين سالبين .
- اذا كان :  $m = 2 - \ln 2$  أي  $m - 2 = -\ln 2$  المعادلة تقبل حللين متباينين أحدهما سالب والاخر معدوم .
- اذا كان :  $m - 2 > 2 - \ln 2$  أي  $m > 2 - \ln 2$  المعادلة تقبل حللين متباينين أحدهما موجب والاخر سالب .