المستوى:الثالثة ثانوي رياضيات	فيفري2020
فرض الثلاثي الثاني في الرياضيات	المدة : 2 سا

التمرين الأول(7 نقط)

(u_n)متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 1-\frac{1}{e}$ و من اجل كل عدد طبيعي n ،

$u_{n+1} = 1-\sqrt{1-u_n}$

1- برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n: $0 < u_n < 1$

2- بين انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - u_n}{1-u_n+\sqrt{1-u_n}}$

ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية و تقاربها.

(v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = ln\,(1-u_n)$

3- أن بين (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

4- اكتبv_n و u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

5-احسب $P_n = (1-u_0)\times(1-u_1)\times\ldots\times(1-u_n)$،

التمرين الثاني(8 نقطة)

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = ln\,(\frac{2\,e^{2x}+1}{e^x})$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم بين أن : $f(x) = x+ln\,2 + ln\,(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}})$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) ليكن (C_f) الممثل للدالة f في المتجانس و المتعامد المعلم إلى المنسوب المستوي حيث : $||\vec{i}|| = 3$

بين أن المستقيم $(\Delta): y = x + ln2$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

4) بين أن نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين تنتمي إلى(C_f)

5) ادرس الوضع النسبي ل(C_f) و المستقيمين المقاربين.

6) أنشئ (C_f)

التمرين الثالث(5 نقطة)

/1 نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلتين : $2081x-2018y=1......(E)$ و $2081x-2018y=03......(E')$

أ- بين أن العددان 2018 و 2081 أوليان فيما بينهما .

ب – باستعمال خوارزمية إقليدس عين حلا خاصا للمعادلة (E) ثم استنتج حلا خاصا للمعادلة (E') .

ج – حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E') .

/2 نرمز ب d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y .

أ – ماهي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب – عين حلول المعادلة (E') حتى يكون $d=3$.

/3 A و B عددان طبيعيان يكتبان على الترتيب في نظام التعداد الذي أساسه 5 على الشكل : $\overline{\alpha\beta0\alpha\alpha}$ ؛ $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\beta}$.

أ – بين أنه إذا كان : $B-A=63$ فإن $19\alpha+6\beta=63......(*)$

ب – بين أنه توجد ثنائية وحيدة $(\alpha;\beta)$ من $\mathbb{N}^2$ تحقق المعادلة $(*)$ ثم استنتج كتابة العددان A و B في النظام العشري .

بالتوفيق

التعليم ليس استعدادا للحياة انه الحياة ذاتها

التصحيح النموذجي

رقم التمرين	الحل	العلامة	
التمرين 1	1- البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n: $P(n)....:0< u_n < 1$ ا) من اجل $n=0$: $0< u_0 < 1$ و منه $P(0)$ صحيحة		7 ن
	ب) نفرض صحة $P(n)....:0< u_n < 1$ و نبرهن صحة $P(n+1)$ لدينا $0< u_n < 1$ و منه $-1 < \sqrt{1- u_n} < 0$ إذن $0< u_{n+1} < 1$ ومنه $0< u_n < 1$	1	
	2- نبين انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - u_n}{1-u_n+\sqrt{1-u_n}}$ لدينا $u_{n+1} - u_n = 1- \sqrt{1- u_n} - u_n = \frac{(1-u_n)-(\sqrt{1-u_n})(1-u_n)+(\sqrt{1-u_n})}{(1-u_n)+(\sqrt{1-u_n})}$ $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - u_n}{1-u_n+\sqrt{1-u_n}} = \frac{u_n(u_n-1)}{1-u_n+\sqrt{1-u_n}}$ لدينا $; u_n > 0; (u_n - 1) < 0$ $1 - u_n + \sqrt{1-u_n} > 0$ و منه نستنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما	1	
	3-تبيان أن $({}_n)$ هندسية $v_{n+1} = ln(1-u_{n+1}) = ln\,(1-(1-\sqrt{1- u_n}))$ $= ln\,(1-u_n)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\; ln(1-u_n) = \frac{1}{2}v_n$ ومنه (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ الأول حدها و $v_0 = -1$	1	
	4- كتابة v_n و u_n بدلالة n		

<table>
<tr>
<td></td>
<td>2
1</td>
<td>$; v_n = -(\frac{1}{2})^n$ $; u_n = 1- e^{-(\frac{1}{2})^n}$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>1</td>
<td>5-حساب $P_n = (1- u_0)\times (1- u_1)\times\ldots\times (1- u_n)$

$P_n = e^{(\frac{1}{2})^n-2}$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>8ن</td>
<td>0.5
1

1

1.5</td>
<td>(1 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\ln 2$
2) الإثبات أن
$f(x) = x + \ln 2 + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
اتجاه التغيّر: f دالة تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$
$f'(x) = \frac{e^x(2e^{2x} - 8e^x - 1)}{(e^x+2)(2e^{2x}+1)}$
$y_1 = \frac{-4+3\sqrt{2}}{2}$ $/ e^x = y ; \Delta = 72$
$y_2 = \frac{-4-3\sqrt{2}}{2}$ مرفوض
$x_1 = \ln y_1 = \ln\left(\frac{-4+3\sqrt{2}}{2}\right) \approx -2,1$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$\ln\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-2\right)$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
</table>
</td>
<td>التمرين 2</td>
</tr>
</table>

0.5

$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - (x + \ln 2)\right)$ / 3

المستقيم $(\Delta): y = x + \ln 2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

0.5

4 / الإثبات أن نقطة تقاطع مقاربي المنحنى (C_f) تنتمي إلى (C_f): ولتكن هذه النقطة هي النقطة $A(-2\ln 2; -\ln 2)$ نبين أن:

$f(-2\ln 2) = -\ln 2$

---

5 / دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم الذي معادلته: $y = -\ln 2$

1

$$f(x) + \ln 2 = \ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^x+2}\right) + \ln 2$$

$$= \ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^x+2} \times 2\right) = \ln\left(\frac{4e^{2x}+2}{e^x+2}\right)$$

$\ln\left(\frac{4e^{2x}+2}{e^x+2}\right) \geq 0$ أي $\frac{4e^{2x}+2}{e^x+2} \geq 1;$

ومنه: $e^x(4e^x - 1) \geq 0$ أي : $e^x \geq \frac{1}{4}$ اي:

$x \geq -\ln 4$ ومنه من اجل كل x ; $x \geq -\ln 4$ فإن (C_f) فوق المستقيم المقارب وتحته في المجال الاخر.

دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم الذي معادلته (Δ) :

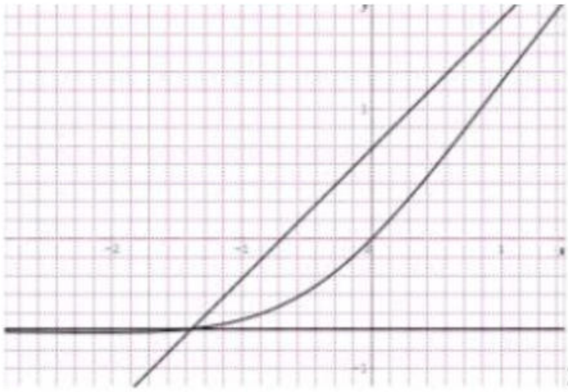
1

f متناقصة تماما على المجال $]-\infty, x_1[$

ومتزايدة تماما على $]x_1; +\infty[$

تابع للسؤال 2 / جدول التغيرات:

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$+\infty$

التمثيل البياني : 

1

التمرين3

5ن

1/ نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلتين : $(E)......2081x-2018y=1$ و $(E')......2081x-2018y=03$

أ- تبيان أن العددان 2018 و2081 أوليان فيما بينهما :

1

الحاصل		1	32	31	2
القاسم والمقسوم	2081	2018	63	2	1
الباقي		63	2	1	0

آخر باقي غير معدوم في سلسلة القسمات المتتالية يساوي 1 ومنه $pgcd(2081,2018)=1$ أي العددان2018 و2081 أوليان فيما بينهما .

ب – باستعمال خوارزمية إقليدس تعيين حل خاص للمعادلة (E) ثم استنتج حلا خاصا للمعادلة (E') :

لدينا : $\begin{cases}63=2081-2018\\2=2018-63(32)\\1=63-2(31)\end{cases}$ ومنه $1=63-(2018-63(32))(31)$ تكافيء $1=63(993)-2018(31)$ ومنه

0.5 $1=(2081-2018)(993)-2018(31)$ ومنه $1=2081(993)-2018(1024)$

ومنه الثنائية $(993;1024)$ حل خاص للمعادلة (E') .

0.5 ومنه حل خاص للمعادلة (E') هو : $(993\times3;1024\times3)$ أي الثنائية $(2979;3072)$ حل خاص للمعادلة (E') .

ج – حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E') :

0.5

$\begin{cases} 2081x-2018y=3 \\ 2081(2979)-2018(3072)=3 \end{cases}$ ومنه $2081(x-2979)=2018(y-3072)....(*)$

$2081 / 2081(x-2979)$ ومنه $2081 / 2018(y-3072)$ وبما أن $pgcd(2081,2018)=1$ فإنه حسب مبرهنة غوص

$2081 / (y-3072)$ ومنه يوجد $k\in\mathbb{Z}$ حيث $y-3072=2081k$ وعليه نجد $y=2081k+3072$

وبالتعويض في المعادلة $(*)$ نجد $x=2018k+2979$ ومنه $S=\{(2018k+2979;2081k+3072)\ / k\in\mathbb{Z}\}$

2/ أ – القيم الممكنة للعدد d :

لدينا $\begin{cases} d/x \\ d/y \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} d/2081x \\ d/2018y \end{cases}$ ومنه $d/2081x-2018y$ ومنه $d/3$ ومنه $d\in\{1;3\}$

0.5

ب – تعيين حلول المعادلة (E') حتى يكون $d=3$:

لدينا $d=3$ ومنه $\begin{cases} 3/x \\ 3/y \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x\equiv 0[3] \\ y\equiv 0[3] \end{cases}$ تكافيء $\begin{cases} 2018k+2979\equiv 0[3] \\ 2081k+3072\equiv 0[3] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 2018k\equiv 0[3] \\ 2081k\equiv 0[3] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} k\equiv 0[3] \\ k\equiv 0[3] \end{cases}$

0.5 ومنه يوجد $k'\in\mathbb{Z}$ حيث : $k=3k'$

ومنه حلول المعادلة (E') بحيث $p\gcd(x;y)=3$ هي : $S=\left\{(6054k'+2979;6243k'+3072)\ /\ k'\in\mathbb{Z}\right\}$

3/ $A=\overline{\alpha\beta 0\alpha\alpha}^{5}$ ؛ $B=\overline{\alpha\beta\alpha\beta\beta}^{5}$.

أ – تبيان أنه إذا كان : $B-A=63$ **فإن** $19\alpha+6\beta=63......(*)$

لدينا $\begin{cases} A=\overline{\alpha\beta 0\alpha\alpha}^{5}=\alpha.5^0+\alpha.5^1+0.5^2+\beta.5^3+\alpha.5^4 \\ B=\overline{\alpha\beta\alpha\beta\beta}^{5}=\beta.5^0+\beta.5^1+\alpha.5^2+\beta.5^3+\alpha.5^4 \end{cases}$ حيث $0\prec\alpha\leq 4$ و $0\leq\beta\leq 4$

0.5

ومنه $\begin{cases} A=631\alpha+125\beta \\ B=650\alpha+131\beta \end{cases}$ ومنه $B-A=19\alpha+6\beta$

ومنه إذا كان $B-A=63$ فإن $19\alpha+6\beta=63......(*)$

ب – تبيان أنه توجد ثنائية وحيدة $(\alpha;\beta)$ من $\mathbb{N}^2$ تحقق المعادلة $(*)$ ثم استنتاج كتابة العددان A و B في النظام العشري

لدينا $\alpha \in \{1;2;3;4\}$ و $\beta \in \{0;2;3;4\}$

4	3	2	1	
76	57	38	19	0
82	63	44	25	1
88	69	50	31	2
94	75	56	37	3
100	81	62	43	4

0.5

ومنه توجد ثنائية وحيدة $(\alpha;\beta)$ تحقق المعادلة $(*)$ حيث $(\alpha;\beta)=(3;1)$.

● **استنتاج كتابة العددان A و B في النظام العشري :**

لدينا $\begin{cases} A = 631\alpha + 125\beta \\ B = 650\alpha + 131\beta \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} A = 631(3) + 125(1) \\ B = 650(3) + 131(1) \end{cases}$ ومنه نجد $\begin{cases} A = 2018 \\ B = 2081 \end{cases}$

0.5