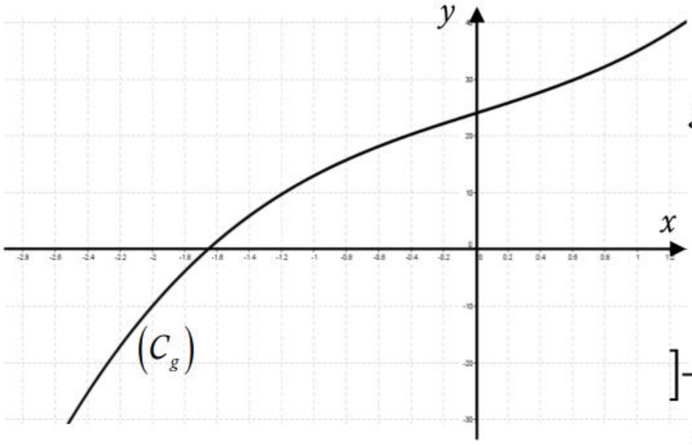
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية قسنطينة / ثانوية الحريـــة

الشعبة : علوم تجريبية

فرض في مادة : الرياضيات — **المدة : ساعة**

التمرين :



I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2x^3+9x+24$

و (C_g) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل .

بقراءة بيانية :

أ) حدّد إشارة $g(-1)$ و $g(-2)$.

ب) استنتج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $]-2;-1[$

بحيث $g(\alpha)=0$ ، ثم تحقق أنّ: $-1,70<\alpha<-1,60$

جـ) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{-x^3-6}{2x^2+3}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\dfrac{x.g(-x)}{(2x^2+3)^2}$.

ب) استنتج أنّ الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0]$ و $[-\alpha;+\infty[$ و متزايدة تماما على المجال $[0;-\alpha]$. ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) أ) بين أن: $f(x)+\dfrac{x}{2}=\dfrac{3x-12}{2(2x^2+3)}$ ، ثم استنتج أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-\dfrac{x}{2}$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) إلى المستقيم (Δ).

4) نقبل أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة x_0 حيث: $-1,82<x_0<-1,81$

– ارسم بعناية المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) . (نأخذ $f(-\alpha)\approx f(1,75)\approx-1,2$)

5) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=f(|x|)$. و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ) بيّن أن h دالة زوجية .

ب) لاحظ أنه من أجل $x\in\mathbb{R}^+$ لدينا : $h(x)=f(x)$. استنتج كيفية رسم (Γ) انطلاقا من (C_f) ثم أرسمه .

حل التمرين :

-الإشارة : $g(-1)>0$, $g(-2)<0$ **(من البيان و ليس حسابيا)**

-الدالة g معرفة و مستمرة و رتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال $]-2\,;-1[$

و لدينا $g(-2)\times g(-1)<0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]-2\,;-1[$

-التحقق أن $-1{,}70<\alpha<-1{,}60$:

لدينا : $g(-1{,}70)\times g(-1{,}60)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(-1{,}70)=-1{,}126 \\ g(-1{,}60)=1{,}408 \end{cases}$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1{,}70<\alpha<-1{,}60$

-إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$:		$-$	0	$+$	

-حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3-6}{2x^2+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3}{2x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3-6}{2x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{2}=-\infty$$

-المشتقة :

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=\frac{-3x^2\left(2x^2+3\right)-4x\left(-x^3-6\right)}{\left(2x^2+3\right)^2}=\frac{-2x^4-9x^2+24x}{\left(2x^2+3\right)^2}=\frac{x\left(-2x^3-9x+24\right)}{\left(2x^2+3\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x\left(2(-x)^3+9(-x)+24\right)}{\left(2x^2+3\right)^2}=\frac{x.g(-x)}{\left(2x^2+3\right)^2}$$

-اتجاه تغير الدالة f : إشارة المشتقة من إشارة $x.g(-x)$.

أولا نعين إشارة $g(-x)$:

إذا كان $-x\le\alpha$ فإن $g(-x)\le 0$ و منه : إذا كان $x\ge-\alpha$ فإن $g(-x)\le 0$

إذا كان $-x\ge\alpha$ فإن $g(-x)\ge 0$ و منه : إذا كان $x\le-\alpha$ فإن $g(-x)\ge 0$

	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$g(-x)$:		$+$	0	$-$	

و منه إشارة المشتقة هي :

	$-\infty$		0		$-\alpha$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$g(-x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

و منه الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0]$ و $[-\alpha;+\infty[$ و متزايدة تماما على $[0;-\alpha]$

–جدول تغيرات الدالة f :

$$f(0)=\frac{-(0)^3-6}{2(0)^2+3}=-2$$

	$-\infty$		0		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$f(-\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

–التبيين :

$$f(x)+\frac{x}{2}=\frac{-x^3-6}{2x^2+3}+\frac{x}{2}=\frac{2(-x^3-6)+x(2x^2+3)}{2(2x^2+3)}=\frac{-12+3x}{2(2x^2+3)}$$

–المستقيم المقارب المائل :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-\left(-\frac{x}{2}\right)\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-12+3x}{2(2x^2+3)}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3x}{4x^2}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3}{4x}\right]=0$$

إذن : المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y=-\frac{x}{2}$ بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

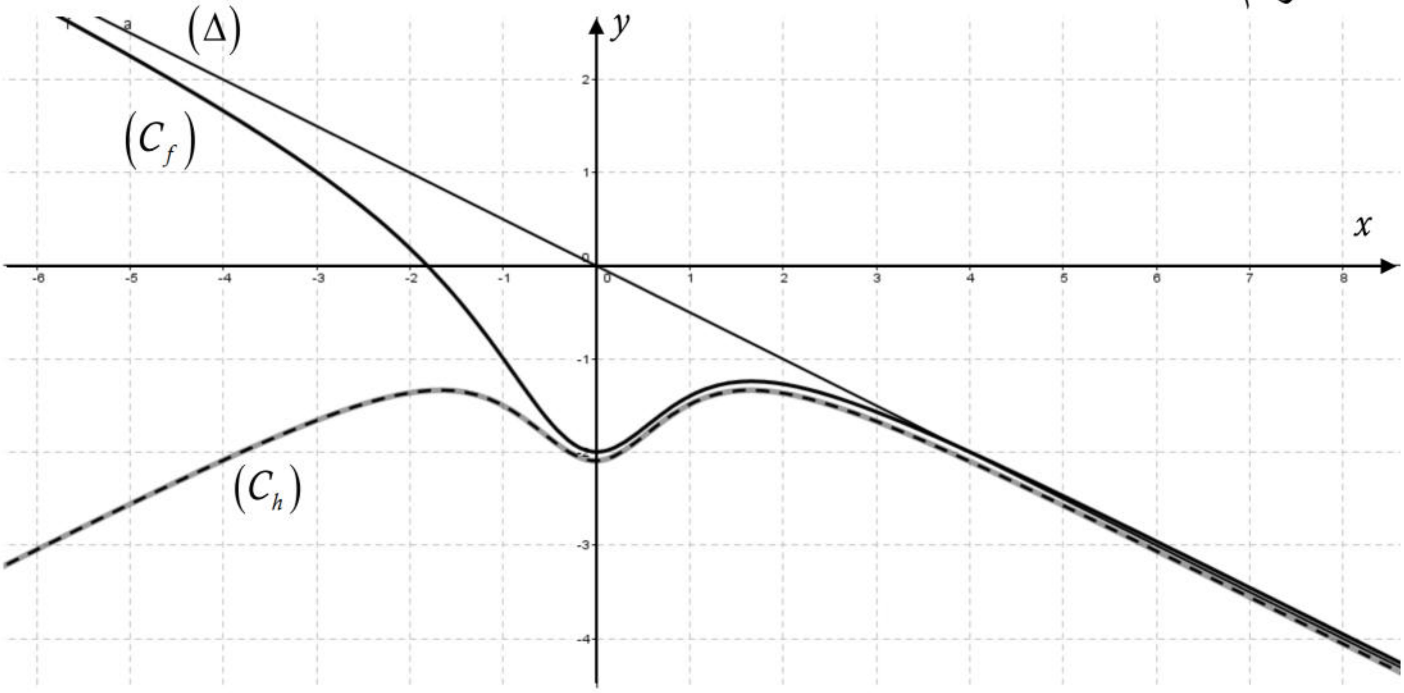
–الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) :

ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y_\Delta=\frac{-12+3x}{2(2x^2+3)}$

$$f(x)-y_\Delta=0 \quad\Leftrightarrow\quad -12+3x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=4$$

$-\infty$		4		$+\infty$
	$-$	0	$+$	
	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	

-الرسم :



-التبيين أن الدالة h زوجية :

من أجل $x \in \mathbb{R}$ لدينا : $-x \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ متناظر بالنسبة إلى الصفر)

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

ومنه h دالة زوجية

-كيفية رسم المنحنى (Γ) الممثل للدالة h :

لما $x \in \mathbb{R}^+$ $(x \geq 0)$ المنحنى (Γ) منطبق على المنحنى (C_f) .

لما $x \in \mathbb{R}^-$ $(x \leq 0)$ المنحنى (Γ) متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لأن الدالة h زوجية .

-رسم المنحنى (Γ) انطلاقا من (C_f) :

الرسم في نفس المعلم السابق (المنحنى الممثل بنقاط متقطعة)