الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الثانويات: **زريمش عيسى(م.حمام دباغ)– بن يوب محمد(ثا.حمام دباغ)**

امتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي — **هواري بومدين(عين احساينية)– غجاتي علاوة (الركنية) – قالمة**

الشعبة : رياضي و تقني رياضي — **دورة : ماي 2017**

اختبار في مادة: الرياضيات — **المدة: 04 سا و 30 د**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعيين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول:(04 نقــاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$، نعتبر المستقيمين (d)و (d')المعرفين كمايلي:

$$(d'):\begin{cases} x=4+3t' \\ y=3+t' \quad ;t'\in\mathbb{R} \\ z=3+2t' \end{cases} \quad ، \quad (d):x-2=\frac{y-1}{2}=1-z$$

1) أكتب التمثيــل الوسيطي للمستقيم (d) ، ثم بين أن المستقيمين (d) و (d') ليسا من نفس المستوي.

2) أ*/ أوجد المعــادلة الديكــارتية للمستويين (p_1) و (p_2) اللذين يشملان النقطة $A\,(4;-7;5)$.

حيث المستوي (p_1) يحوي المستقيم (d) و المستوي (p_2) يحوي المستقيم (d') .

ب*/ تحقق أن المستويين (p_1) و (p_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) معرف بـ: $(\Delta):\begin{cases} x=\frac{-1}{11}+9\alpha \\ y=3-22\alpha \quad ;\alpha\in\mathbb{R} \\ z=11\alpha \end{cases}$

3) لتكــن $B\left(\frac{-1}{11};3;0\right)$ نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوي (Q) ذو المعادلة: $11x+y-z=2$.

أ*/ أوجد إحداثيات النقطة A' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (Q).

ب*/ استنتج المسقط العمودي للمستقيم (Δ) على المستوي (Q).

4) (Γ) مجموعة النقط $M\,(x,y,z)$ من الفضاء تحقق : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

*/ عين طبيعة المجموعة (Γ) محددا عناصرها المميزة.

التمرين الثاني: (04 نقــاط)

A_0 و B_0 نقطتان من المستوي حيث: $A_0B_0=8$ (الوحدة هي السنتيمتر) ، ليــكن S التشابــه المباشر الذي مركزه النقطة A_0 ونسبتــــه $\frac{1}{2}$ و زاويتـــه $\frac{3\pi}{4}$.

نعرف متتــالية النقـــط (B_n) كمـــايلي : $B_{n+1}=S\,(B_n)$ ، من أجل كل عدد طبيعي n .

1) أنشئ النقط B_1 ، B_2 ، B_3 و B_4 .

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n المثلثان: $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان.

3) نعرف متتالية (u_n) بـ : $u_n = B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

أ*/ أثبت أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب*/ أكتب عبـارة u_n بـدلالة n .

ج*/ نضع المجموع: $\delta_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ ، أحسب δ_n بدلالة n ثم أوجد $\lim\limits_{n \to +\infty} \delta_n$

4) أ*/ حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة : $3x - 4y = 2$

ب*/ ليكن (Δ) المستقيم العمودي على المستقيم (A_0B_0) في النقطة A_0 .

*جـد قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها تكون النقطة B_n تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

التمرين الثالث: (05 نقـــاط)

1) نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$(E) ... \overline{z}^3 - 3\overline{z}^2 + 3\overline{z} + 7 = 0$ ، $\overline{z}$ هو مرافق العدد المركب z .

أ*/ بين أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $(\overline{z} + 1)(\overline{z}^2 - 4\overline{z} + 7) = 0$.

ب*/ حـل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C و D لواحقها على الترتيب : $z_A = -1$ ، $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = \overline{z_B}$ ، $z_D = 3$.

أ*/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا ســـالبا .

ب*/ عين طبيعة المثلث ABC .

3) أ*/أكتب العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج أن النقطة A صورة D بتحويل نقطي يطلب تعيينه.

ب*/ أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD .

4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي لاحقتها z تحقق: $z + 1 = 2\sqrt{3}.k.e^{i\frac{\pi}{6}}$ حيث k يمسح المجال $[0; +\infty[$

*/ عين قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overrightarrow{AB})$ ، ثم استنتج مجموعة النقط (Γ).

5) أ*/ عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث يكون : $-\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} + \alpha\,\overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

ب*/ عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\| -\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} - 3\overrightarrow{DM} \right\| \leq 2\left\| \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM} \right\|$

جـ*/ استنتج مجموعة نقط تقاطع (E) و (Γ).

التمرين الرابع:(07 نقـــاط)

1) g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بــــ: $g(x)=x^2e^x$

أ*/ أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

ب*/ استنتج أنه : إذا كان $0 \prec x \prec 1$ فإن $g(x) \prec g\left(\frac{1}{x}\right)$ و إذا كان $x \succ 1$ فإن $g(x) \succ g\left(\frac{1}{x}\right)$

2) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=\left(x^2-2x+2\right)e^x+e^{\frac{1}{x}}-3e$$

(C_f) تمثيـلها البيـاني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

h دالـة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=e^{\frac{1}{x}}-3e$. (C_h) تمثيلها البياني (**<u>أنظر الملحق</u>**)

أ*/ أحسـب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{\succ} 0} f(x)$.

ب*/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، ثم احسب $f'(1)$.

ج*/ شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

3) أ*/ بين أن المعادلة: $\left(x^2-2x+2\right)e^x=-h(x)$ تقبل حلين α و β حيـث: $1.5 \prec \beta \prec 1.6$

و $0.5 \prec \alpha \prec 0.6$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين .

ب*/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h).

ج*/ بين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته .

4) أ*/ أرسم (T) و (C_f) . **(الملحــق يعــاد مع ورقة الإجابـــة)**

ب*/ m عدد حقيقي موجب تماما ، أوجد قيمة m حتى تقبل المعادلة (E) حلين متمايزين:

$$(E)....f(x)=\left(m^2-2m+2\right)e^m+h(m)$$

5) أ*/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $\int_1^x\left[f(t)-h(t)\right]dt=\left(x^2-4x+6\right)e^x-3e$

ب*/ ليكن العدد λ من المجـال $]0;1[$ ،

$A(\lambda)$ مسـاحة الحيز المستوي المحـدد بالمنحنيين (C_h) و (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتاهما :

$x=\lambda$ و $x=1$.

* استنتـج $A(\lambda)$ (مقدرة بوحدة المساحة) ، ثم احسـب $\lim\limits_{\lambda \xrightarrow{\succ} 0} A(\lambda)$.

<u>انتهى الموضوع الأول</u>

الموضوع الثاني:

التمرين الأول:(04 نقــاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$، نعتبر النقط $A\left(3;1;0\right)$ ، $B\left(1;2;0\right)$ ، $C\left(3;2;1\right)$

و $D\left(0;0;m\right)$ حيث m عدد حقيقي موجب ، (Q) مستوي معرف بـ: $\begin{cases} x=2-2\alpha+\beta \\ y=\frac{3}{2}-4\alpha+2\beta \;;(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \\ z=-5\alpha \end{cases}$

1) أ*/ أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $Cos\widehat{ABC}$ و $Sin\widehat{ABC}$.

ب*/ أحسب مساحة المثلث ABC .

ج*/ بين أن $\vec{n}(1;2;-2)$ شعاع نـاظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكــارتية له .

د*/ بين أن $ABCD$ رباعي وجوه و أن حجمـه : $V=\frac{2m+5}{6}\,uv$

2) أ*/ بين أن: (Q) هو المستوي المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ معادلته الديكارتية : $-2x+y=\frac{-5}{2}$.

ب*/ استنتج ان المستويين (ABC) و (Q) متعامدان و أنهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيـله الوسيــطي.

ج*/ أحسب $d\left(D;(Q)\right)$ ثم استنتج بدلالة m المسافة بين النقطة D و المستقيم (Δ).

3) لتكن (S_m) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $x^2+y^2+z^2-2mz+m^2-9=0$

أ*/ بين أنه من اجل عدد حقيقي m فان (S_m) سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

ب*/عين قيمة m حتى يكون المستوي (ABC) مماسا لسطح الكرة (S_m).

4) أكتب معادلة المستوي (P) الموازي تماما للمستوي (ABC) و يمس سطح الكرة (S_m).

التمرين الثاني:(04 نقــاط)

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $11x-5y=2$

أ*/ أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $y\equiv 4[11]$.

ب*/ استنتج حلول المعادلة (E).

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم ، نضــــع : $a=5n+2$ و $b=11n+4$.

أ*/ عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

ب*/عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون: $PGCD(a;b)=2$.

ج*/ استنتج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما.

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $A=5n^2+7n+2$ و $B=11n^2+15n+4$.

أ*/ بين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B .

ب*/ استنتج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B.

التمرين الثالث: (05 نقـاط)

1) عين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث : $\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1 + i\sqrt{3} \\ (\sqrt{3}+2i)z_1 - z_2 = (1-\sqrt{3})i \end{cases}$

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O\ ;\vec{u}\ ;\vec{v}\right)$ ، نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين: $z_A = 1-i$ و $z_B = 2+\sqrt{3}+i$.

أ*/ اكتب z_A على الشكل الأسي .

ب*/ بين أن: $\dfrac{z_B}{z_A} = (1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم استنتج الشكل الأسي للعدد z_B .

ج*/هل تـوجد قيم للعدد الطبيعي n حتى تكون صورة العدد $\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right)^n$ تنتمي إلى المنصف الأول؟

3) أ*/ أوجد لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O وزاويته $\dfrac{-\pi}{6}$.

ب*/ احسب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BB']$. (مقـدرة بوحدة المساحة)

ج*/ عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $\arg\left[\left(z-z_B\right)^2\right] = \arg\left(z_B\right) - \arg\left(z_{B'}\right)$

د*/ عين z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $AB'BC$ مستطيل، ثم اوجد z_I لاحقة مركز ثقله.

4) نضــع: $f = ros$ (يرمز o إلى تركيب التحويلين S و r) .

أ*/عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S حيث يكون f تشابه مباشر مركزه O ونسبته 2 و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$

ب*/ أوجد مساحة صورة الدائرة (γ) بالتشابه المباشر S (مقدرة بوحدة المساحة).

5) أ*/ إذا كان $S(M) = M'$ ، ما طبيعة المثلث OMM' ؟

ب*/عين مجموعة النقط M من المستوي التي يكون من أجلها : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM'} = 0$

التمرين الرابع: (07 نقــاط)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بــ: $f(x) = x - e + \ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ*/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x + e + \ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$

ب */ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ج*/ أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

2) أ*/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D') معادلتاهما:

$y = x - e$ و $y = -x + \ln 2 + e$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$ على الترتيب.

ب*/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيمين المقاربين (D) و (D').

ج*/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=\frac{1}{2}\ln 2+e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f).

3) أرسم (Δ)، (D)، (D') و (C_f)

4) ليكن (D_m) المستقيم الذي معادلته : $y=mx-m\left(e+\frac{\ln 2}{2}\right)+\frac{\ln 2}{2}$ حيث m وسيط حقيقي.

أ*/ بين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln 2}{2}+e\,;\,\frac{\ln 2}{2}\right)$.

ب*/ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f) .

5) نضع: $I=\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}\left[f(x)-(x-e)\right]dx$ ، $I_n=\int_0^1 \ln\left(1+X^n\right)dX$ ، n عدد طبيعي غير معدوم

أ*/ فسر هندسيا العدد I و احسب العدد I_1.

ب*/ بين أن: $0\le I_n\le \ln 2$

ج*/ عين اتجـاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

6) باستعمال : $\ln(1+X)\le X$ ، من أجل كل $X\in\left]0;+\infty\right[$

أ*/ استنتج أن : $0\le I+I_1\le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}\,dx-1+\ln 4$

ب*/ اعط حصرا للعدد $I+I_1$.

انتهى

الموضوع الثاني

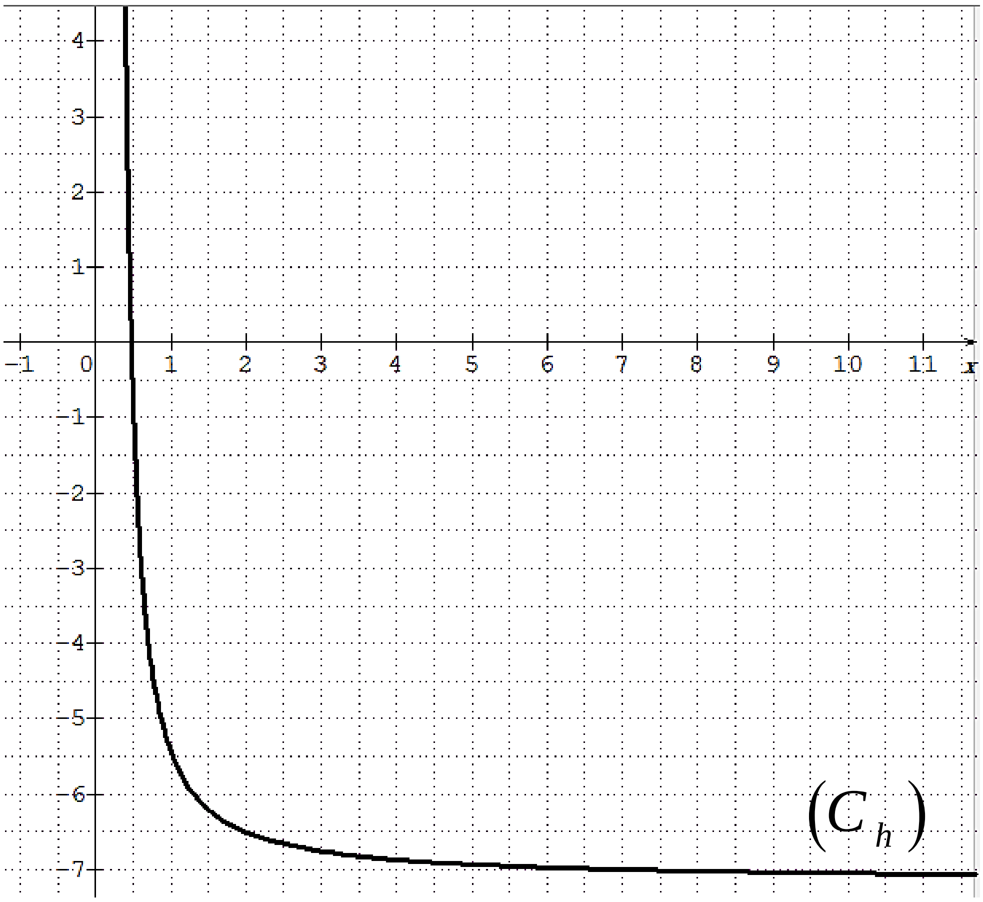
بالتوفيق في امتحان شهادة البكالوريا

الملحق:

الاسم :.........

اللقب : ....

القسم :........

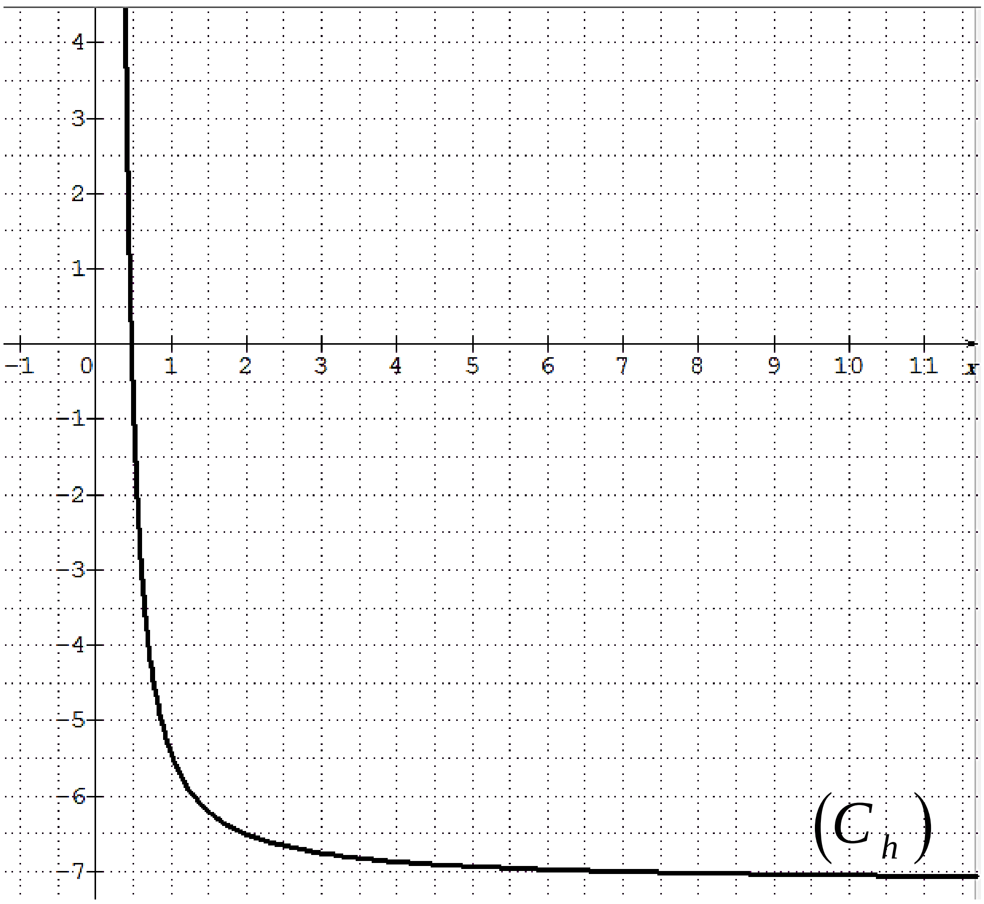


الملحق:

الاسم :............

اللقب : ....

القسم : ....



تصحيح البكالوريا التجريبي 2017 رياضي وتقني رياضي

الموضوع الاول: **التمرين الأول:(04 نقاط)**

1) كتابة التمثيل الوسيطي (d) : t وسيط حقيقي

أي أن: $x-2=\frac{y-1}{2}=1-z=t$ ومنه: $(d):\begin{cases}x-2=t\\ \frac{y-1}{2}=t\ ;t\in\mathbb{R}\\ 1-z=t\end{cases}$

إذن:التمثيل الوسيطي للمستقيم (d) هو $\begin{cases}x=t+2\\y=2t+1;t\in\mathbb{R}\\z=-t+1\end{cases}$

***/ تبيان أن (d) و (d') ليسا من نفس المستوى:**

$\vec{u}(1;2;-1)$ شعاع توجيه (d) ، $\vec{u}'(3;1;2)$ شعاع توجيه (d')

بماأن $\frac{1}{1}\neq\frac{1}{3}$ فإن الشعاعين $\vec{u}(1;2;-1)$ و $\vec{u}'(3;1;2)$

غير مرتبطين خطيا ، فيكون المستقيمان (d) و (d')

إما ليسا من نفس المستوي و إما متقاطعان من نفس المستوي

لتكن $E(x;y;z)$ نقطة تقاطع (d) و (d') أي :

نبحث عن الثنائية (t,t') $\begin{cases}x=t+2=3t'+4...(1)\\y=2t+1=t'+3...(2)\ ;(t,t')\in\mathbb{R}^2\\z=-t+1=2t'+3...(3)\end{cases}$

بجمع (1) و(3): $t'=\frac{-4}{5}$ وبتعويضها في (1) أو (3)

نجد: $t=\frac{-2}{5}$ ، الثنائية $\left(\frac{-2}{5};\frac{-4}{5}\right)$ لا تحقق (2)

ومنـه: (d) و (d') ليسا من نفس المستوى

2) أ) إيجاد المعادلة الديكارتية للمستويين (p_1) و (p_2)

ويشملان $A(4;-7;5)$ و $(d)\subset(P_1)$ و $(d')\subset(P_2)$

تعيين معادلة المستوى (p_1): (p_1) يشمل $A(4;-7;5)$

وموجه بالشعاعين $\vec{u}(1;2;-1)$ شعاع توجيه (d) و

$\overrightarrow{AD}(-2;8;-4)$ حيث $D(2;1;1)$ نقطة من (d)

ليكن: $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي للمستوي (p_1) غير معدوم

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{u}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}a+2b-c=0 & ...(1)\\ -2a+8b-4c=0 & ..(2)\end{cases}$ بجمع (1) و (2)

نجد $6b-3c=0$ ومنه $c=2b$ نأخذ: $b=1$ نجد $c=2$

و $a=0$ ومنه: $\vec{n}(0;1;2)$ ناظمي لـ $(P_1):y+2z+d=0$

$A\in(P_1)$ معناه $7+10+d=0$ معناه $d=-3$

ومنـــه: $(P_1):y+2z-3=0$

تعيين معادلة للمستوى (P_2): لدينا (P_2) يشمل $A(4;-7;5)$

وموجه بالشعاعين $\vec{u}'(3;1;2)$ شعاع توجيه (d') و

$\overrightarrow{AC}(0;10;-2)$ حيث $C(4;3;3)$ نقطة من (d')

بنفس الطريقة $(P_2):11x-3y-15z+10=0$

ب) التحقق أن (p_1) و (p_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ)

بما أن: $\frac{1}{-3}\neq\frac{0}{11}$ فإن $\vec{n}(0;1;2)$ و $\vec{n}'(11;-3;-15)$ غير

مرتبطين خطيا وعليه يكون المستويان (P_1) و (P_2) متقاطعين

وفق مستقيم (Δ). لدينا: $(\Delta):\begin{cases}x=\frac{-1}{11}+9\alpha\\y=3-22\alpha\ ;\alpha\in\mathbb{R}\\z=11\alpha\end{cases}$

$(P_1):y+2z-3=0$ ، $(P_2):11x-3y-15z+10=0$

$(-22\alpha+3)+2(11\alpha)-3=0$ يكافئ $0.\alpha=0$

المعادلة تقبل مالا نهاية من الحلول ومنه : $(\Delta)\subset(P_1)$

$11\left(\frac{-1}{11}+9\alpha\right)-3(3-22\alpha)-15(11\alpha)+10=0$ يكافئ $0.\alpha=0$

المعادلة تقبل مالا نهاية من الحلول ومنه : $(\Delta)\subset(P_2)$

نستنتج أن $(\Delta)=(P_1)\cap(P_2)$

3) أ/*) إيجاد إحداثيات A' المسقط العمودي لـ A على المستوى (Q): $A'(x';y';z')$ ، $\vec{n}_Q(11;1;-1)$ ناظمي لـ (Q)

و $A\in(\Delta)$. بما أن: $11x_A+y_A-z_A\neq 2$ فإن $A\notin(Q)$

وبالتالي $\overrightarrow{AA'}$ يوازي $\vec{n}_Q$ يوجد $k\in\mathbb{R}$ حيث $\overrightarrow{AA'}=k\cdot\vec{n}_Q$

أي $\overrightarrow{AA'}(x'-4;y'+7;z'-5)$

$\begin{cases}x'-4=11k\\y'+7=k\\z'-5=-k\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}x'=11k+4\\y'=k-7\\z'=-k+5\end{cases}$ ، $A'\in(Q)$ معناه

$11(11k+4)+(k-7)-(-k+5)-2=0$ معناه $k=-\frac{10}{41}$

بالتعويض عن قيمة k نجد: $A'\left(\frac{54}{41};-\frac{297}{41};\frac{215}{41}\right)$

ب) استنتاج المسقط العمودي لـ (Δ) على المستوى (Q):

المسقط العمودي للمستقيم (Δ) على (Q) هوالمستقيم (BA')

4) تعيين طبيعة المجموعة (Γ) حيث $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

(Γ) هي سطح كرة قطرها $[AB]$، $AB=\sqrt{\frac{17150}{121}}\approx 11.9$

ومركزها النقطة $I\left(\frac{43}{22};-2;\frac{5}{2}\right)$ منتصف $[AB]$

التمرين الثاني: (04 نقاط) $A_0B_0=8$، S التشابه المباشر مركزه A_0 ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$: $B_{n+1}=S(B_n)$

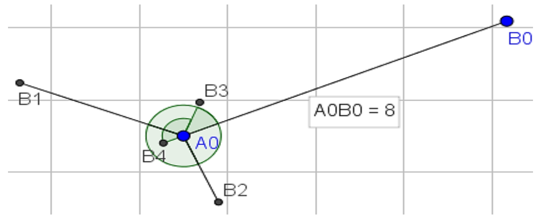
1) انشاء النقط B_1، B_2، B_3 و B_4:

$B_1=S(B_0)$ يكافئ $\begin{cases} A_0B_1=\frac{1}{2}A_0B_0=4 \\ (\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_1})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$

$B_2=S(B_1)$ معناه $\begin{cases} A_0B_2=\frac{1}{2}A_0B_1=2 \\ (\overrightarrow{A_0B_1},\overrightarrow{A_0B_2})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$

$B_3=S(B_2)$ معناه $\begin{cases} A_0B_3=\frac{1}{2}A_0B_2=1 \\ (\overrightarrow{A_0B_2},\overrightarrow{A_0B_3})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$

$B_4=S(B_3)$ معناه $\begin{cases} A_0B_4=\frac{1}{2}A_0B_3=\frac{1}{2} \\ (\overrightarrow{A_0B_3},\overrightarrow{A_0B_4})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$



2) اثبات أن المثلثين $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ **متشابهان من أجل كل عدد طبيعي** n:

$B_{n+1}=S(B_n)$ معناه $A_0B_{n+1}=\frac{1}{2}A_0B_n$

و $(\overrightarrow{A_0B_n},\overrightarrow{A_0B_{n+1}})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$ ، بما أن:

$\frac{A_0B_{n+1}}{A_0B_n}=\frac{\frac{1}{2}A_0B_n}{A_0B_n}=\frac{1}{2}$ و $\frac{A_0B_{n+2}}{A_0B_{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}A_0B_{n+1}}{A_0B_{n+1}}=\frac{1}{2}$ و

$(\overrightarrow{A_0B_{n+1}},\overrightarrow{A_0B_{n+2}})=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0B_n},\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0B_{n+1}}\right)=(\overrightarrow{A_0B_n},\overrightarrow{A_0B_{n+1}})$

فإن المثلثين $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان

(ضلعان و زاوية محصورة بينهما) ومنه: $\frac{B_{n+1}B_{n+2}}{B_nB_{n+1}}=\frac{1}{2}$

3) أ*/ اثبات أن (u_n) **متتالية هندسية أساسها** $\frac{1}{2}$: نعرف

متتالية (u_n) بـ $u_n=B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n.

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{B_{n+1}B_{n+2}}{B_nB_{n+1}}=\frac{1}{2}$ ومنـه: (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حـدها الأول $u_0=B_0B_1$

ب*/ كتابة عبارة u_n **بـدلالة** n:

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=u_0\left(\frac{1}{2}\right)^n=B_0B_1\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ج*/ نضع المجموع: $\delta_n=u_0+u_1+u_2+....+u_n$ ،

حساب δ_n **بدلالة** n **ثم إيجاد** $\lim_{n\to+\infty}\delta_n$: δ_n م.ح.م.هندسية

$$\delta_n=u_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)=2B_0B_1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

ومنه: $\lim_{n\to+\infty}\delta_n=2B_0B_1$

4) أ*/ نحل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ **المعادلة :** $(1)...3x-4y=2$

(1) يكـافئ $3x=4y+2$ يكـــافئ $3x\equiv2[4]$

يكـــافئ $7\times3x\equiv7\times2[4]$ يكـــافئ $x\equiv2[4]$

ومنه: $x=4\lambda+2$ ، $\lambda\in\mathbb{Z}$ بالتعويض في المعادلة (1) نجد

$y=3\lambda+1$ إذن: $S=\{(4\lambda+2;3\lambda+1);\lambda\in\mathbb{Z}\}$

ب*/ تعيين قيم العدد الطبيعي n **التي من اجلها تكون النقطة** B_n **تنتمي إلى المستقيم** (Δ):

لدينا: (Δ) العمودي على (A_0B_0) في النقطة A_0 وكذلك

$(\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_n})=(\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_1})+(\overrightarrow{A_0B_1},\overrightarrow{A_0B_2})+...$

$....+(\overrightarrow{A_0B_{n-1}},\overrightarrow{A_0B_n})=\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}+...+\frac{3\pi}{4}=n\frac{3\pi}{4}$

B_n تنتمي إلى (Δ) معناه $(\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_n})=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$

نجد: $n\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ يكافئ $3n=4\left(\frac{1}{2}+k\right)$

يكـــافئ $3n=2+4k$ يكـــافئ $3n-4k=2$

ومنه قيم n هــي $n=4k'+2$ ، $k'\in\mathbb{N}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) أ*/نبين أن المعادلة (E) تكافئ $(\overline{z}+1)(\overline{z}^2-4\overline{z}+7)=0$

لدينا : $(E)...\ \overline{z}^3-3\overline{z}^2+3\overline{z}+7=0$

$(\overline{z}+1)(\overline{z}^2-4\overline{z}+7)=0$ يكافئ $\overline{z}^3-4\overline{z}^2+7\overline{z}+\overline{z}^2-4\overline{z}+7=0$

يكافئ $\overline{z}^3-3\overline{z}^2+3\overline{z}+7=0$

ب */ نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) :

(E) تكافئ $(\overline{z}+1)(\overline{z}^2-4\overline{z}+7)=0$

يكافئ $(z+1)(z^2-4z+7)=0$ يكافئ $\overline{(z+1)}\,\overline{(z^2-4z+7)}=0$

يكافئ $\begin{cases} z=-1 \\ z^2-4z+7=0 \end{cases}$ ، $\Delta=-12=(2\sqrt{3}i)^2$

$z_1=2-\sqrt{3}i$ و $z_2=2+\sqrt{3}i$

ومنه : $S=\left\{-1;2-\sqrt{3}i\;;2+\sqrt{3}i\right\}$

2)أ/*تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب $(z_B-z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا: لدينا

$$(z_B-z_A)^n=(2+\sqrt{3}i+1)^n=(3+\sqrt{3}i)^n$$

ومنه $(z_B-z_A)^n=(2\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$

$(z_B-z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا معناه:

$\arg(z_B-z_A)^n=\pi+2k\pi$ ومنه $\dfrac{n\pi}{6}=\pi+2k\pi$

إذن $n=12k+6\;;k\in\mathbb{N}$

ب*/تعيين طبيعة المثلث ABC

$$AC=|z_C-z_A|=|3-i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$$

$$AB=|z_B-z_A|=|3+i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$$

$$BC=|z_C-z_B|=|-2i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$$

بما ان : $AB=AC=BC$ فإن المثلث ABC متقايس الأضلاع

3) أ/* كتابة العدد $\dfrac{z_A-z_C}{z_D-z_C}$ على الشكل الأسي:

$$\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}=\frac{-1-2+i\sqrt{3}}{3-2+i\sqrt{3}}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

***/استنتاج طبيعة التحويل الذي يحول A إلى D وعناصره المميزة:** $\dfrac{z_A-z_C}{z_D-z_C}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه $z_A-z_C=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_D-z_C)$

معناه النقطة A صورة النقطة D بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة C و نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$

ب/تعيين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD

لدينا: $\dfrac{z_A-z_C}{z_D-z_C}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه

$$\begin{cases}\left|\dfrac{z_A-z_C}{z_D-z_C}\right|=\sqrt{3}\\ (\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA})=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

اذن المثلث ACD قائم في C ومنه مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ACD هو النقطة I منتصف الوتر $[AD]$

لاحقتها $z_I=\dfrac{z_A+z_D}{2}=\dfrac{3}{2}-i\dfrac{1}{2}$

4 /* تعيين قيس للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$:

لدينا : $(\vec{u};\overrightarrow{AB})=\arg(z_B-z_A)=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\;;k\in\mathbb{Z}$

***/استنتاج (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث :**

$z+1=2\sqrt{3}ke^{i\frac{\pi}{6}}$ معناه $z-z_A=k(z_B-z_A)$

معناه $\overrightarrow{AM}=k\cdot\overrightarrow{AB}$

ومنه :من أجل k يمسح المجال $[0;+\infty[$ المجموعة (Γ) هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة A وشعاع توجيهه $\overrightarrow{AB}$

لاحظ : $2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}=3+i\sqrt{3}$

5) أ/*تعيين قيمة العدد α حيث $-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}+\alpha\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

$-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}+\alpha\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

معناه النقطة C هي مرجح الجملة $\{(A;-1),(B;2),(D;\alpha)\}$

$$\begin{cases}x_C=\dfrac{-x_A+2x_B+\alpha x_D}{-1+2+\alpha}\\ y_C=\dfrac{-y_A+2y_B+\alpha y_D}{-1+2+\alpha}\end{cases}$$ يكافئ $$\begin{cases}2=\dfrac{1+4+3\alpha}{1+\alpha}\\ -\sqrt{3}=\dfrac{0+2\sqrt{3}+0\cdot\alpha}{1+\alpha}\end{cases}$$ ومنه $\alpha=-3$

ب*/ تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث :

$$(*)...\left\|-\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BM}-3\overrightarrow{DM}\right\|\le 2\left\|\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}\right\|$$

$(*)$ تكافئ $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MD}\right\|\le 2\left\|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC}\right\|$

$(*)$ تكافئ $\left\|-\left(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MD}\right)\right\|\le 2\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$

$(*)$ تكافئ $\left\|(-1+2-3)\overrightarrow{CM}\right\|\le 2BC$ تكافئ $CM\le BC$

ومنه مجموعة النقط (E) هي قرص مركزه النقطة C

ونصف قطره هو : $BC=2\sqrt{3}$

جـ*/ استنتاج مجموعة نقط تقاطع القرص (E) و نصف المستقيم $[AB)$: لدينا القرص (E) مركزه C ونصف قطره

$BC=2\sqrt{3}$ و $AC=2\sqrt{3}$ معناه A تنتمي إلى القرص (E)

ومنه تقاطع القرص (E) ونصف المستقيم $[AB)$ هو القطعة المستقيمة $[AB]$.

التمرين الرابع: (07 نقـاط)

1) g معرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2e^x$

أ/* دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$: $g'(x)=(x^2+2x)e^x$

بما ان $g'(x)>0$ فإن الدالة g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

ب*/ استنتاج أنه : إذا كان $0<x<1$ فإن $g(x)<g\left(\dfrac{1}{x}\right)$

و إذا كان $x>1$ فإن $g(x)>g\left(\dfrac{1}{x}\right)$

إذا كان $0<x<1$ فـإن $x<\dfrac{1}{x}$ و لدينا g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ، فـإن $g(x)<g\left(\dfrac{1}{x}\right)$

إذا كان $x>1$ فـإن $x>\dfrac{1}{x}$ ولدينا g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ، فـإن $g(x)>g\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2) f معرفة على $]0;+\infty[$: $f(x)=(x^2-2x+2)e^x+e^{\frac{1}{x}}-3e$

أ*/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=+\infty$

ب*/ نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، ثم حساب $f'(1)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ دالتها المشتقة f' :

$$f'(x)=x^2e^x-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)$$

ومنه: $f'(1)=g(1)-g\left(\frac{1}{1}\right)=0$

ج*/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$:

إشـــارة $f'(x)$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$

f متناقصة تماما على $]0;1]$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-e=-2.71$	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ*/ نبين أن المعادلة: $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل حلين α و β حيث: $1.5<\beta<1.6$ و $0.5<\alpha<0.6$

$(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تكافئ $(x^2-2x+2)e^x+h(x)=0$

تكافئ $f(x)=0$ ، لدينا: $f(0.5)\approx1.25$ ، $f(0.6)\approx-0.74$

بما ان الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $[0.5;0.6]$

$f(0.6)\times f(0.5)<0$ فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن المعادلة $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل حل وحيد α

حيث: $0.5<\alpha<0.6$ ، $f(\alpha)=0$

لدينا: $f(1.5)\approx-0.60$ ، $f(1.6)\approx0.44$

بما ان الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $[1.5;1.6]$

$f(1.6)\times f(1.5)<0$ فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن المعادلة $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل حل وحيد β

حيث: $1.5<\beta<1.6$ ، $f(\beta)=0$

*/استنتاج أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين:

بما ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α وβ فإن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β

ب*/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-h(x)=(x^2-2x+2)e^x$

$x^2-2x+2\succ0$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ لأن $\Delta=-4$

ومنه : (C_f) يقع فوق (C_h) على المجال $]0;+\infty[$

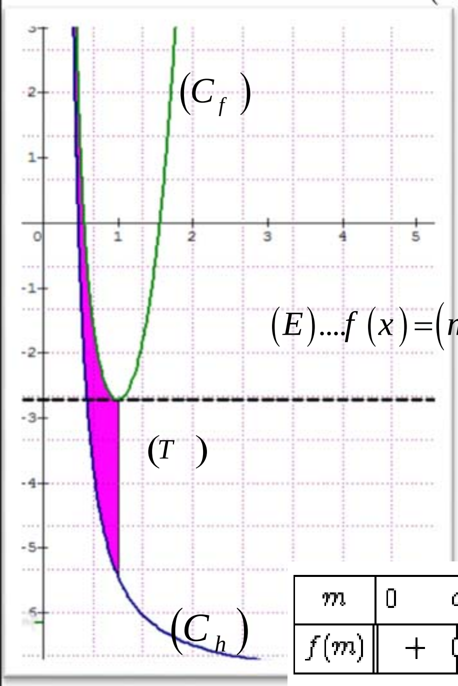
ج*/ نبين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته :

بمان الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ فإن تمثيلها (C_f) يقبل عند كل نقطة فاصلتها من $]0;+\infty[$ مماسا

$f'(1)=0;f(1)=-e$ ، $(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)$

ومنه: $(T):y=-e$

4) أ*/ رسم (T) و (C_f):



ب*/إيجاد قيم m حتى تقبل المعادلة (E) حلين متمايزين:

لدينا m وسيط حقيقي حيث $m\succ0$

$$(E)...f(x)=(m^2-2m+2)e^m+h(m)$$

المعادلة (E) تكـــافئ

$f(x)=f(m)$

إشارة $f(m)$:

m	0		α		1		β		$+\infty$
$f(m)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

من أجـــل $m=1$ المعادلة (E) تقبل حلا مضاعفا .

ومنـــه: المعادلة (E) تقبل حلين متمايزين لما

$m\in]0;1[\cup]1;+\infty[$

5) أ*/ نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$$\int_1^x[f(t)-h(t)]dt=(x^2-4x+6)e^x-3e$$

لدينا: $\int_1^x[f(t)-h(t)]dt=\int_1^x(t^2-2t+2)e^t\,dt$

الدالة: $t\to(t^2-2t+2)e^t$ مستمرة على $]0;+\infty[$ فهي تقبل دوالا أصلية على $]0;+\infty[$.

$$\left[(t^2-4t+6)e^t-3e\right]'=(t^2-2t+2)e^t$$

$$\int_1^x(t^2-2t+2)e^tdt=\int_1^x\left[(t^2-4t+6)e^t-3e\right]'dt$$

$$=(x^2-4x+6)e^x-3e$$

ب*/استنتاج $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_h) و (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=\lambda$ و $x=1$ (مقدرة بوحدة المساحة) حيث $\lambda\in]0;1]$:

$$A(\lambda)=\int_{1}^{\lambda}[f(t)-h(t)]dt=-\int_{\lambda}^{1}[f(t)-h(t)]dt$$

$$A(\lambda)=-\left[(\lambda^2-4\lambda+6)e^{\lambda}-3e\right]$$

$$=\left(3e-(\lambda^2-4\lambda+6)e^{\lambda}\right)ua$$

*/ حساب $\lim\limits_{\lambda \xrightarrow{>} 0} A(\lambda)$:

$$\lim_{\lambda \xrightarrow{>} 0} A(\lambda)=\lim_{\lambda \xrightarrow{>} 0}\left[3e-(\lambda^2-4\lambda+6)e^{\lambda}\right]=3e$$

الموضوع الثاني

التمرين الاول : (04 نقاط)

$A(3;1;0)$ ، $B(1;2;0)$ ، $C(3;2;1)$ و $D(0;0;m)$

1) أ*/ حساب $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{BA}(2;-1;0)$ ، $\overrightarrow{BC}(2;0;1)$

لدينا : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2(2)+0(-1)+1(0)=4$

*/ استنتاج القيمتين المضبوطتين لـ $Cos\,\widehat{ABC}$ و $Sin\,\widehat{ABC}$: لدينا $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\|\overrightarrow{BA}\|\cdot\|\overrightarrow{BC}\|Cos\,\widehat{ABC}$

ومنه: $Cos\,\widehat{ABC}=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\cdot\|\overrightarrow{BC}\|}=\dfrac{4}{\sqrt5\sqrt5}=\dfrac45$

لدينا: $\sin\widehat{ABC}^{\,2}=1-Cos\,\widehat{ABC}^{\,2}$

ومنه $\sin\widehat{ABC}=\dfrac35$ أو $\sin\widehat{ABC}=-\dfrac35$

ب*/ حساب مساحة المثلث ABC ولتكن S_{ABC} :

$$S_{ABC}=\frac12 BA\times BC\times\sin\widehat{ABC}=\frac12\sqrt5\times\sqrt5\times\frac35=\frac32ua$$

ج*/ نبين أن $\vec n(1;2;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) :

بما أن $\vec n\cdot\overrightarrow{BC}=1(2)+2(0)-2(1)=0$ وكذلك

$$\vec n\cdot\overrightarrow{BA}=1(2)+2(-1)-2(0)=0$$

فإن $\vec n(1;2;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

*/ استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

لدينا $(ABC): x+2y-2z+d=0$

$A\in(ABC)$ تكافئ $3+2+d=0$ تكافئ $d=-5$

ومنه: $(ABC): x+2y-2z-5=0$

د*/ تبيان أن $ABCD$ رباعي وجوه:

نبين أن النقطة D لا تنتمي الى المستوي (ABC)

لدينا $0+2(0)-2m-5=0$ أي $m=-\dfrac52$ إذن: $D\notin(ABC)$

لأن m عدد حقيقي موجب ومنه: $ABCD$ رباعي وجوه

*/ نبين أن حجم رباعي الوجوه $ABCD$ هو $V=\dfrac{2m+5}{6}uv$

لدينا $V_{ABCD}=\dfrac13 S_{ABC}\times h$ ، $h=d(D,(ABC))$ هو الارتفاع

$$d(D;(ABC))=\frac{|-2m-5|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{2m+5}{3}$$

ومنه $V=\dfrac13\times\dfrac32\times\dfrac{2m+5}{3}=\dfrac{2m+5}{6}uv$

2) أ*/ نبين أن (Q) هو المستوي المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ معادلته الديكارتية $-2x+y=\dfrac{-5}{2}$ **هناك عدة طرق منها:**

*إحداثيات $I(2;\frac32;0)$ منتصف $[AB]$ تحقق التمثيل الوسيطي لـ (Q) والشعاع $\overrightarrow{AB}(2,-1,0)$ عمودي على شعاعي توجيهه $\vec{u'}(1;2;0)$ و $\vec u(-2;-4;-5)$ ومنه (Q) مستوي محوري لـ $[AB]$

*/تعيين معادلة (Q) : لدينا

$$(Q):\begin{cases}x=2-2\alpha+\beta\ldots(1)\\ y=\frac32-4\alpha+2\beta\ldots(2)\\ z=-5\alpha\ldots(3)\end{cases};(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

من (1) نجد: $z=-5\alpha$

يكافئ $\alpha=\dfrac{z}{-5}$ بالتعويض في (1) نجد: $x=2-2\left(\dfrac{z}{-5}\right)+\beta$

ومنه: $\beta=x-2-\dfrac{2z}{5}$ نعوض قيمة β و α في (2) نجد:

$y=\dfrac32-4\left(\dfrac{z}{-5}\right)+2\left(x-2-\dfrac{2z}{5}\right)$ ومنه : $-2x+y=\dfrac{-5}{2}$

ومنه معادلة (Q) هي: $-4x+2y+5=0$

*/بطريقة آخرى: (Q) يشمل $I\left(2;\frac32;0\right)$ منتصف $[AB]$

و $\overrightarrow{AB}(-2;1;0)$ شعاع ناظمي له والتمثيل الوسيطي يحقق

ومنه المستوي المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ $(Q): -2x+y=\dfrac{-5}{2}$

ب*/استنتاج ان المستويين (ABC) و (Q) متعامدان و هما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيله الوسيطي:

بما أن $\vec n.\overrightarrow{AB}=1.(-2)+2.(1)+0.(-2)=0$ فإن (Q) و (ABC) متعامدان فهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

*/تعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) :

بطرح (2) من (1) نجد: $\begin{cases}x+2y-2z-5=0\ldots(1)\\ -4x+2y+5=0\ldots(2)\end{cases}$

نضع $5x-2z-10=0$ $z=t$ (t وسيط حقيقي) نجد

إذن: $x=\frac{2}{5}t+2$ و $y=\frac{4}{5}t+\frac{3}{2}$

$$(\Delta):\begin{cases} x=\frac{2}{5}t+2 \\ y=\frac{4}{5}t+\frac{3}{2}\ ;t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

ج*/ حساب $d(D;(Q))$ ثم استنتاج بدلالة m المسافة بين D و (Δ) :

$$d(D;(Q))=\frac{|-4(0)+2(0)+5|}{\sqrt{16+4}}=\frac{5}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

بما أن (Q) و (ABC) متعامدان فإن حسب مبرهنة فيثاغورس

$$d(D;(\Delta))^2=d(D;(Q))^2+d(D;(ABC))^2$$

ومنه: $d(D;(\Delta))=\sqrt{\frac{5}{4}+\left(\frac{2m+5}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{16m^2+80m+145}}{6}$

3)أ*/تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي m _ (S_m) سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها:

لدينا: $x^2+y^2+z^2-2mz+m^2-9=0$

ومنه : $x^2+y^2+(z-m)^2=9$ إذن: (S_m) سطح كرة مركزها النقطة $D(0;0;m)$ و نصف قطرها $r=3$.

ب*/تعيين m حتى يكون المستوى (ABC) مماسا لسطح الكرة (S_m) :

(ABC) مماس لسطح الكرة (S_m) يعني $d(D;(ABC))=3$ أي أن: $\frac{2m+5}{3}=3$ ومنه : $m=2$

4) معادلة المستوى (P) الموازي تماما للمستوى (ABC) ويمس (S_m) : لدينا: $(P): x+2y-2z+d=0$

المستوى (P) مماس لـ (S_m) يعني : $d(D;(P))=\frac{|-4+d|}{3}=3$ أي $|-4+d|=9$

ومنه : $d=13$ أو $d=-5$ هو المستوى (ABC)

إذن : $(p): x+2y-2z+13=0$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1)أ*/إثبات أن: $y\equiv4[11]$ ، $(E)...11x-5y=2$

$11x-5y=2$ يكافئ $5y=11x+2$ ومنه $5y\equiv-2[11]$ أي $5y\equiv20[11]$ ومنه : $y\equiv4[11]$

ب*/استنتاج حلول المعادلة (E) :

$y\equiv4[11]$ معناه $y=11k+4$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ،نعوض قيمة y في المعادلة (E) نجد: $x=5k+2$

ومنه: $S=\{(11k+4;5k+5)/k\in\mathbb{Z}\}$

2)أ*/تعيين القيم الممكنة لـ $d=PGCD(a;b)$:

$a=5n+2$ و $b=11n+4$ ، $n\in\mathbb{N}^*$

$$11a-5b=11(5n+2)-5(11n+4)=55n+22-55n-20=2$$

ومنه : $d/2$ إذن : $d\in D_2=\{1;2\}$.

ب*/تعيين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون: $PGCD(a;b)=2$: لدينا $PGCD(a;b)=2$

معناه 2 يقسم a و 2 يقسم b معناه 2 يقسم $b-2a$

أي 2 يقسم $11n+4-2(5n+2)$ وبالتالي 2 يقسم n .

ومنه n عدد زوجي يكتب من الشكل: $n=2\alpha\ /\alpha\in\mathbb{N}^*$

ج*/ استنتاج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما: من السؤال السابق

من أجل $PGCD(a;b)=2$ قيم n : $n=2\alpha\ /\alpha\in\mathbb{N}^*$

ومنه : قيم n حيث $PGCD(a;b)=1$ هي : $n=2\alpha+1/\alpha\in\mathbb{N}$

3) أ*/نبين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

$A=5n^2+7n+2$ و $B=11n^2+15n+4$ ، $n\in\mathbb{N}$

$A=(n+1)(5n+2)=a(n+1)$ ، $B=(n+1)(11n+4)=b(n+1)$

ومنه : $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

ب*/ استنتاج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B :

$$PGCD(A;B)=PGCD(a(n+1);b(n+1))=(n+1)PGCD(a;b)$$

ومنه نميز حالتين :

الحالة1: إذا كان $PGCD(a;b)=2$ معناه $n=2\alpha/\alpha\in\mathbb{N}^*$

نجد : $PGCD(A;B)=(2\alpha+1)2=4\alpha+2$

الحالة2: إذا كان $PGCD(a;b)=1$ معناه $n=2\alpha+1/\alpha\in\mathbb{N}$

نجد : $PGCD(A;B)=(2\alpha+1+1)1=2\alpha+2$

التمرين الثالث (05 نقاط)

1)تعيين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث :

$$\begin{cases} 2z_1+iz_2=1+i\sqrt{3}...(1) \\ (\sqrt{3}+2i)z_1-z_2=(1-\sqrt{3})i..(2) \end{cases}$$

نضرب طرفي المعادلة الأولى في $(-i)$ نجد

$$\begin{cases} -2iz_1+z_2=-i+\sqrt{3}......(1') \\ \sqrt{3}z_1+2iz_1-z_2=i-i\sqrt{3}...(2) \end{cases}$$

بجمع $(1')$ و (2) : $\sqrt{3}z_1=\sqrt{3}(1-i)$ ومنه $z_1=1-i$

بالتعويض في $(1')$ نجد : $z_2=2+\sqrt{3}+i$

2)أ*/كتابة z_A على الشكل الأسي : $z_A=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

ب*/نبين أن : $\frac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$:

$$\frac{z_B}{z_A}=\frac{2+\sqrt{3}+i}{1-i}=\frac{(2+\sqrt{3}+i)(1+i)}{2}=\frac{(1+\sqrt{3})+\sqrt{3}(1+\sqrt{3})i}{2}$$

ومنه: $\frac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})\frac{(1+\sqrt{3}i)}{2}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$

*/ استنتاج الشكل الأسي للعدد z_B :

$$z_B = z_A(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ومنه : $z_B=\sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{12}}$

ج*/ تعيين قيم للعدد الطبيعي n حتى تكون صورة العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ تنتمي إلى المنصف الأول إن وجدت :

معناه $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n=\frac{\pi}{4}+k\pi$ لدينا : $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n=(1+\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$

أي : $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n\equiv\frac{n\pi}{3}[2\pi]$ ومنه : $\frac{n\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$

أي $4n-12k=3$ ، $PGCD(12;4)=4$ و4 لا تقسم 3 ومنه المعادلة لا تقبل حلول اذن لايوجد قيم لـ n تحقق المطلوب .

3) أ*/ إيجاد لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{-\pi}{6}$

عبارة الدوران r من الشكل : $z'=e^{-i\frac{\pi}{6}}z$

$$z_{B'}=e^{-i\frac{\pi}{6}}z_B=e^{-i\frac{\pi}{6}}\sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{12}}=\sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

$$z_{B'}=\sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{-i\frac{\pi}{12}}=\overline{z_B}=2+\sqrt{3}-i$$

ب*/ حساب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BB']$ لدينا:

$$R=\frac{BB'}{2}=\frac{|z_{B'}-z_B|}{2}=\frac{|-2i|}{2}=\frac{2}{2}=1 \text{ ، } S=\pi R^2$$

ومنه : $s=\pi\, u.a$

ج*/ تعيين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى حيث:

أي أن $\arg\left[(z-z_B)^2\right]=\arg(z_B)-\arg(z_{B'})$

$2\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}+2k\pi$ و ومنه $\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{12}+k\pi$

تفسيرها : $(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\frac{\pi}{12}+k\pi / k\in\mathbb{Z}$

ومنه مجموعة النقط هي المستقيم (OB) ماعدا النقطة B .

د*/ تعيين z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $AB'BC$ مستطيلا:

$$(\overrightarrow{B'B};\overrightarrow{B'A})=\arg\left(\frac{z_A-z_{B'}}{z_B-z_{B'}}\right)=\arg(z_A-z_{B'})-\arg(z_B-z_{B'})$$

$$(\overrightarrow{B'B};\overrightarrow{B'A})=\arg(1-i-2-\sqrt{3}+i)-\arg(2i)=\pi-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

ومنه نجد : $(\overrightarrow{B'B};\overrightarrow{B'A})=\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}$

يكفي أن نبين : $\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{AC}$ معناه : $\begin{cases}x_C=1\\y_C=1\end{cases}$ ومنه $z_C=1+i$

بطريقة اخرى: لدينا $z_{B'}=\overline{z_B}$ معناه B وB' متناظران

بالنسبة لمحور الفواصل ولدينا : $B'(2+\sqrt{3};-1)$ و $A(1;-1)$

أي : A وB' لهما نفس الترتيب معناه ينتميان إلى المستقيم معادلته $y=-1$ موازي لمحور الفواصل ومنه نجد :

$z_C=\overline{z_A}=1+i$.

*/ إيجاد z_I لاحقة مركز ثقل المستطيل $AB'BC$

$z_I=\frac{z_A+z_B+z_{B'}+z_C}{4}$ ومنه $z_I=\frac{1-i+4+2\sqrt{3}+1+i}{4}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

4) أ*/ تعيين العبارة المركبة للتشابه المباشر S حيث يكون

f تشابه مباشر مركزه O ونسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{3}$: $f=ros$

S تشابه مباشر مركزه O ونسبته k وزاويته θ أي ros

تشابه مباشر مركزه O ونسبته k وزاويته $\theta-\frac{\pi}{6}$

ومنه : $k=2$ و $\theta-\frac{\pi}{6}\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ أي $\theta\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

ومنه عبارة التشابه S هي : $z'=2e^{i\frac{\pi}{2}}z$ ونكتب $z'=2iz$

ب*/ إيجاد مساحة صورة الدائرة (γ) بالتشابه المباشر S :

مساحة صورة الدائرة (γ) هي s' حيث: $s'=k^2s=4\pi\, ua$.

5) أ*/ إذا كان $S(M)=M'$ ، إيجاد طبيعة المثلث OMM':

ومنه : $z'=2e^{i\frac{\pi}{2}}z$ معناه $\frac{z'}{z}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه $\arg\frac{z'}{z}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

معناه $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ و $\left|\frac{z'}{z}\right|=2$ أي $|z'|=2|z|$

معناه $\|\overrightarrow{OM'}\|=2\|\overrightarrow{OM}\|$ ومنه: المثلث OMM' قائم في O

ب*/ تعيين مجموعة النقط M من المستوى التي يكون من أجلها : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'}=0$: $\overrightarrow{AM}(z-z_A)$ ، $\overrightarrow{AM}(x-1;y+1)$

و $\overrightarrow{AM'}(z'-z_A)$ أي $\overrightarrow{AM'}(2iz-z_A)$ ومنه $\overrightarrow{AM'}(-2y-1;2x+1)$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'}=0$ معناه $(x-1)(-2y-1)+(y+1)(2x+1)=0$

معناه $x+3y+2=0$

مجموعة النقط المطلوبة هي مستقيم معادلته $x+3y+2=0$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1) أ*/ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x)=-x+e+\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$$

$$f(x)=x-e+\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)=x-e+\ln\left(\frac{e^{2(x-e)}+2}{e^{2(x-e)}}\right)$$

$$=x-e+\ln\left(e^{2(x-e)}+2\right)-\ln\left(e^{2(x-e)}\right)=-x+e+\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$$

ب */ حساب النهايات $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

ج*/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{1-2e^{-2(x-e)}}{1+2e^{-2(x-e)}}$

$f'(x)=0$ معناه $1-2e^{-2(x-e)}=0$ معناه $x=e+\ln\sqrt{2}$

x	$-\infty$	$e+\ln\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

الدالة f متزايدة تماما على $[e+\ln\sqrt{2};+\infty[$

الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;e+\ln\sqrt{2}]$

تشكيل جدول تغيراتها :

x	$-\infty$		$\ln2/2+e$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$3\ln2/2+e$	$\nearrow$	$+\infty$

2) أ*/ نبين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D')

معادلتاهما: $y=x-e$ و $y=-x+\ln2+e$ عند $+\infty$

وعند $-\infty$ على الترتيب: بما أن

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-e)]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)=\ln1=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+e+\ln2)]=\lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)-\ln2\right]=0$$

فإن: (D) مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

و (D') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$

ب*/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (D) و (D')

لدينا: $f(x)-(x-e)=\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)$

$1+2e^{-2(x-e)}\succ1$ معناه $\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)\succ\ln1=0$

ومنه: $f(x)-(x-e)\succ0$ إذن (C_f) يقع فوق م.م (D)

لدينا: $f(x)-(-x+e+\ln2)=\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)-\ln2$

$2+e^{2(x-e)}\succ2$ معناه $\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)\succ\ln2$ ومنه:

$f(x)-(-x+e+\ln2)\succ0$ إذن (C_f) يقع فوق م.م (D')

من أجل كل عدد حقيقي x

ج*/ نبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=\frac{1}{2}\ln2+e$

هو محور تناظر للمنحنى (C_f):

من أجل كل x من ℝ: $2\left(\frac{\ln2}{2}+e\right)-x$ من ℝ، لدينا

$$f\left(2\left(\frac{\ln2}{2}+e\right)-x\right)=f(\ln2+2e-x)$$

$$=-x+e+\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)=f(x)$$

ومنه: $(\Delta):x=\frac{1}{2}\ln2+e$ محور تناظر للمنحنى (C_f)

3) رسم (Δ)، (D)، (D') و (C_f).

4) أ*/ نبين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة

$A\left(\frac{\ln2}{2}+e;\frac{\ln2}{2}\right)$: $(D_m):y=mx-m\left(e+\frac{\ln2}{2}\right)+\frac{\ln2}{2}$

حيث m وسيط حقيقي.

$y=mx-m\left(e+\frac{\ln2}{2}\right)+\frac{\ln2}{2}$ معناه

$m\left(x-e-\frac{\ln2}{2}\right)+\frac{\ln2}{2}-y=0$ معناه

$x-e-\frac{\ln2}{2}=0$ و $\frac{\ln2}{2}-y=0$ ومنه: جميع المستقيمات

(D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln2}{2}+e;\frac{\ln2}{2}\right)$

ب*/ مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f) :

المستقيم (D_m) يدور حول النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln2}{2}+e;\frac{\ln2}{2}\right)$

إذا كان $m=1$ فإن (D_m) هو (D) لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m=-1$ فإن (D_m) هو (D') لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m=0$ فإن (D_m) هو $(D_0):y=\ln\sqrt{2}$ لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m\in]-1;1[$ فإنه لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m\in]-\infty;-1[$ فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة

إذا كان $m\in]1;+\infty[$ فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة

5) أ*/ التفسير الهندسي للعدد I: هومساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم المقارب (D) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=\ln\sqrt{2}+e$ ، $x=\ln\sqrt{3}+e$

حساب العدد I_1: $I_1=\int_0^1\ln(1+X)dX$ بالمكاملة بالتجزئة

بوضع: $u(X)=\ln(1+X)$ ، $u'(X)=\frac{1}{1+X}$

$v'(X)=1$ ، $v(X)=X$

$$I_1=[X\ln(1+X)]_0^1-\int_0^1\frac{X+1-1}{X+1}dX$$

$$=[X\ln(1+X)]_0^1-\int_0^1 1dX+\int_0^1\frac{1}{X+1}dX$$

$$=[X\ln(1+X)-X+\ln(1+X)]_0^1=\ln4-1$$

ب*/ نبين أن $0\le I_n\le\ln2$: لدينا $I_n=\int_0^1\ln(1+X^n)dX$

$0\le X\le1$ معناه $1\le X^n+1\le2$ معناه $0\le\ln(X^n+1)\le\ln2$

ومنه: $0\le\int_0^1\ln(X^n+1)dX\le\int_0^1\ln2dX$ اذن $0\le I_n\le\ln2$

ج*/ تعيين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتاج أنها متقاربة:

$\begin{cases}0\le X\le1...(1)\\0\le X^n\le1\end{cases}$ بضرب أطراف المتباينة (1) في X^n نجد

$0 \le X^{n+1} \le X^n$ أي $0 \le X^{n+1}+1 \le X^n+1$

أي أن $n \in \mathbb{N}^*$ ، $0 \le \ln\left(X^{n+1}+1\right) \le \ln\left(X^n+1\right)$

نستنتج أن $0 \le \int_0^1 \ln\left(X^{n+1}+1\right)dX \le \int_0^1 \ln\left(X^n+1\right)dX$

ومنه: $0 \le I_{n+1} \le I_n$ المتتالية (I_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

بما ان (I_n) محدودة من الاسفل بالصفر $(0 \le I_n \le \ln 2)$

ومتناقصة تماما فإنها متقاربة نحو الصفر

ج*/تعيين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتاج أنها متقاربة:

$\begin{cases} 0 \le X \le 1 \ldots (1) \\ 0 \le X^n \le 1 \end{cases}$ بضرب أطراف المتباينة (1) في X^n نجد

$0 \le X^{n+1} \le X^n$ أي $0 \le X^{n+1}+1 \le X^n+1$

أي أن $n \in \mathbb{N}^*$ ، $0 \le \ln\left(X^{n+1}+1\right) \le \ln\left(X^n+1\right)$

نستنتج أن $0 \le \int_0^1 \ln\left(X^{n+1}+1\right)dX \le \int_0^1 \ln\left(X^n+1\right)dX$

ومنه: $0 \le I_{n+1} \le I_n$ المتتالية (I_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

بما ان (I_n) محدودة من الاسفل بالصفر $(0 \le I_n \le \ln 2)$

ومتناقصة تماما فإنها متقاربة نحو الصفر

6) باستعمال: $\ln(1+X) \le X$ ، من اجل كل $X \in]0;+\infty[$

أ*/ استنتاج أن: $0 \le I + I_1 \le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx - 1 + \ln 4$

$\ln(1+X) \le X$ ، من اجل كل $X \in]0;+\infty[$

لدينا: $1+2e^{-2(x-e)} \succ 0$ بوضع: $X = 1+2e^{-2(x-e)}$ نجد:

$0 \le \ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right) \le 2e^{-2(x-e)}$ وبالتالي

$$0 \le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} \ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)dx \le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx$$

ومنه: $0 \le -1+\ln 4 \le I + I_1 \le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx - 1 + \ln 4$

اذن: $0 \le I + I_1 \le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx - 1 + \ln 4$

ب*/ اعطاءحصرا للعدد $I + I_1$:

$$0 \le I + I_1 \le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx - 1 + \ln 4$$

$$\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx = -\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} -2e^{-2(x-e)}dx = -\left[e^{-2(x-e)}\right]_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} = \frac{1}{6}$$

$0 \le I + I_1 \le \frac{1}{6} - 1 + \ln 4$ ومنه: $0 \le I + I_1 \le \frac{-5}{6} + \ln 4$

3) رسم (Δ) ، (D) ، (D') و (C_f).