**الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية**

**وزارة التربية الوطنية** **مديرية التربية لولاية ورقلة**

**امتحان تجريبي شهادة بكالوريا التعليم الثانوي** **ثانويات تقرت**

**الشعبة : علوم تجريبية** **دورة ماي 2016**

---

**اختبار في مادة : الرياضيات** **المدة : 03 ساعات ونصف**

---

## على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

## الموضوع الأول

**التمرين الأول : ( 04 نقاط )**

الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

لتكن النقطة $A(-1;2;3)$ والمستقيم $(\Delta)$ الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x = 9+4t \\ y = 6+t ; t \in \mathbb{R} \\ z = 2+2t \end{cases}$.

1 ـ أ)ـ أوجد معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$ العمودي على $(\Delta)$ والمار من $A$ .

ب) ـ تحقق من أن النقطة $B(-3;3;-4)$ تنتمي إلى $(\Delta)$ .

جـ)ـ أحسب المسافة $d_B$ بعد النقطة $B$ عن المستوي $(P)$ .

2ـ عبر عن المسافة $d$ بين $A$ والمستقيم $(\Delta)$ بدلالة $d_B$ والمسافة $AB$ ثم استنتج قيمة $d$ .

3ـ لتكن $M$ نقطة من المستقيم $(\Delta)$ . عبر عن $AM^2$ بدلالة $t$ ثم أوجد قيمة $d$ بطريقة ثانية.

**التمرين الثاني : ( 04 نقاط )**

$(u_n)$ متتالية عددية معرفة على $N$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n} \end{cases}$

1- احسب $u_2 , u_1$

2- ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$فإن : $0 \prec u_n \prec 4$

ب) بين أن $(u_n)$ متزايدة , مادا تستنتج ؟

3.نعتبر المتتالية $(v_n)$المعرفة على $N$ كما يلي : $v_n = \ln(u_n) - \ln 4$

أ) بين أن $(v_n)$ متتالية هندسية

ب) أكتب $v_n$و $u_n$ بدلالة $n$ ثم أحسب $\lim\limits_{\to} u_n$

4- احسب بدلالة $n$ كلا من :و $S_n = v_0 + v_1 + ........v_n$ و $P_n = u_0 \times u_1 \times .........u_n$ . (2)

**التمرين الثالث : ( 05 نقاط )**

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة C كثير الحدود P(z) ذو المتغير المركب $z$ حيث :

$$P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8$$

1) أحسب $P(2)$ ثم أوجد تحليلا لـ P(z) .

2) حل في C المعادلة $P(z)=0$، نسمي $z_1$ و $z_2$ الحلين المختلفين عن 2 حيث $z_1$ جزؤه التخيلي موجب

3) أ/ تحقق أن : $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$ ثم أكتب كل من $z_1$ و $z_2$ على الشكل الأسي .

4) في المستوي المركب المباشر المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ (الوحدة $2cm$ )
نعتبر النقط : $A$ ، $B$ ، $C$ ذات اللواحق على الترتيب : 2 ، $z_1$ و $z_2$ ولتكن $I$ منتصف $[AB]$

أ)ـ علم النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $I$ .

ب)ـ ما طبيعة المثلث $OAB$ واستنتج قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{OI})$ .

جـ)ـ احسب $z_I$ لاحقة $I$ ثم اكتب $z_I$ على الشكل الأسي .

د)ـ باستعمال النتائج السابقة أوجد القيم المضبوطة لكل من $\cos\frac{3\pi}{8}$ و $\sin\frac{3\pi}{8}$ .

**التمرين الرابع : ( 07نقط)**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $IR$ بـ : $f(x)=\ln(e^{x}+2e^{-x})$ و $(c)$ تمثيلها في معلم متعامد ومتجانس

1. ا/ أثبث أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$, $f(x)=x+\ln(1+2e^{-2x})$

ب/ أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و بين أن المستقيم $(D)$ الذي معادلته $y=x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C)$

ج/ أدرس الوضعية النسبية للمنحنى $(C)$ والمستقيم $(D)$

2. أ/ بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ , $f(x)=-x+\ln(2+e^{2x})$

ب/ احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ وبين أن المستقيم $(D')$ الذي معادلته $y=-x+\ln 2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C)$

ج/ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى $(C)$ و المستقيم $(D')$

3. ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ و شكل جدول تغيراتها

4. ارسم $(D)$ و $(D')$ و $(C)$

5. نضع : $I=\int_2^3[f(x)-x]\,dx$

1- فسر هندسيا العدد I

2- بين أنه من اجل كل $x$من $[0,+\infty[$ , $\ln(1+x)\le x$

3- أستنتج أن $0\le I\le\int_2^3 2e^{-2x}dx$ واعط حصرا للعدد I سعته 0.02

## الموضوع الثاني

**التمرين الأول : ( 04 نقاط )**

$f$ دالة عددية معرفة على المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ: $f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$

1) بين أنه إذا كان $x\succ 1$ فإن $f(x)\succ 1$ .

2) نعرف المتتالية $(u_n)$ بـ : $u_0=2$ ومن أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ : $u_{n+1}=f(u_n)$ .

أ/ برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن : $u_n\succ 1$ .

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ .

جـ/ استنتج أن $(u_n)$ متقاربة واستنتج نهايتها $l$ .

3) لتكن المتتالية $(v_n)$ المعرفة على N بـ : $v_n=\ln(\frac{u_n-1}{u_n})$ حيث $\ln$ يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري.

أ/ أثبت أن $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب/ أكتب $v_n$ بدلالة $n$ واستنتج أن : $u_n=\frac{1}{1-(\frac{1}{2})^{2^n}}$ .

4) أحسب بدلالة $n$ المجموع : $S_n=v_0+v_1+v_2+.........+v_n$ .

**التمرين الثاني : ( 05 نقاط )**

I) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E)$ ........ $z^3+2z^2-16=0$ .

1) أثبت أن العدد $2$ حل للمعادلة $(E)$ ،ثم بين أنه يمكن كتابة $(E)$ على الشكل $(z-2)(az^2+bz+c)=0$ حيث $a$ ، $b$ و $c$ أعداد حقيقية يطلب حسابها .

2) استنتج حلول المعادلة $(E)$ ثم اكتبها على الشكل الأسي .

II) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث الوحدة $1cm$ .

1) انشئ النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-2-2i$ ، $z_B=2$ و $z_C=-2+2i$ .

2) احسب $z_D$ لاحقة النقطة $D$ حتى يكون الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع .أنشئ النقطة $D$.

3) لتكن $E$ صورة $D$ بالدوران الذي مركزه $B$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ولتكن $F$ صورة $D$ بالدوران الذي مركزه $C$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ .

أ/ أحسب $z_E$ و $z_F$ لاحقتي $E$ و $F$ .

ب/ أنشئ النقطتين $E$ و $F$ .

جـ/ تحقق من أن : $\frac{z_F-z_A}{z_E-z_A}=i$ ثم استنتج طبيعة المثلث $AEF$ .

**التمرين الثالث : ( 04 نقاط )**

الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط: $A(0;4;1)$ ، $B(1;3;0)$ ، $C(2;-1;-2)$ و $D(7;-1;4)$ .

1) أثبت أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية .

2) ليكن المستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $D$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(2;-1;3)$ .

أ/ بين أن $(\Delta)$ عمودي على المستوي $(ABC)$ .

ب/ استنتج معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$ .

جـ/ عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ .

د/ أوجد إحداثيات النقطة $H$ نقطة تقاطع $(\Delta)$ و $(ABC)$ .

3) نعتبر $(S)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق : $x^2+y^2+z^2-2x-4y+10z+14=0$ .

أ/ أثبت أن $(S)$ كرة مركزها $\Omega(1;2;-5)$ ونصف قطرها $R=4$.

ب/ تحقق أن $\Omega$ تنتمي إلى $(\Delta)$.

جـ/ برهن أن المستوي $(ABC)$ يقطع سطح الكرة $(S)$ وفق دائرة $(c)$ يطلب إيجاد إحداثيات مركزها $\omega$ ونصف قطرها $r$ .

**التمرين الرابع : ( 07 نقاط )**

I) لتكن الدالة $g$ المعرفة على R بـ : $g(x)=e^x+2-x$ .

1• أحسب نهايات الدالة $g$ عند حدود مجال التعريف .

2• ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ وشكل جدول تغيراتها .

3• استنتج إشارة $g(x)$ .

II) نعتبر الدالة $f$ المعرفة على R بـ : $f(x)=x+(x-1)e^{-x}$ ، $(C)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

1• بين أنه من أجل كل $x$ من R فإن : $f'(x)=e^{-x}g(x)$ واستنتج اتجاه تغير $f$ .

2• احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

3•شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

4• بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في R حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $0\prec\alpha\prec\frac{1}{2}$ .

5• أ/ أثبت أن المستقيم $(D)$ ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ $(C)$ بجوار $+\infty$ .

ب/ أدرس الوضع النسبي لـ$(C)$ و $(D)$ .

6• احسب $f(-\frac{1}{2})$ و $f(-1)$ ثم أنشئ $(C)$ و $(D)$ .

III) لتكن الدالة $F$ المعرفة على R بـ : $\mathrm{F}(x)=\frac{1}{2}x^2-xe^{-x}$ .

1• أثبت أن الدالة $F$ هي دالة أصلية للدالة $f$ على R.

2• نرمز بـ $A(\alpha)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى $(C)$ ومحور الفواصل والمستقيمين : $x=\alpha$ و $x=1$

احسب $A(\alpha)$ .

مقاطعة تقرت | تصحيـــــح باك تجريبي رياضيات | 3ع ت 2016 إعداد الأستاذ: بريغت- ف

# الموضوع الأول

## التمرين الأول( 4 نقاط)

$A(-1,2,3)$ و $(\Delta):\begin{cases} x=9+4t \\ y=6+t .....t\in\Re \\ z=2+2t \end{cases}$

**1)أ) إيجاد معادلة المستوى** $(P)$ : لدينا $(\Delta)\perp(P)$ ومنه

$\vec{u}_\Delta(4;1;2)$ شعاع توجيه $(\Delta)$ ناظمي للمستوى $(P)$

1

**معادلته:** $4x+y+2z+d=0$

$A(-1,2,3)\in(P)$ أي: $-4+2+6+d=0$ أي: $d=-4$

$$\boxed{(P):4x+y+2z-4=0}$$

**ب) التحقق أن** $B(-3,3,-4)$ **تنتمي إلى** $(\Delta)$ :

0.5

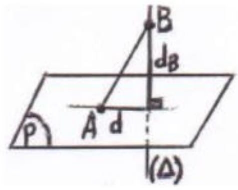
$(\Delta):\begin{cases} -3=9+4t \\ 3=6+t \\ -4=2+2t \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} t=-3 \\ t=-3 \\ t=-3 \end{cases}$ $t$ وحيدة ، $B\in(\Delta)$

**ج)حساب المسافة** $d_B$ **بين** $B$ و $(P)$ :

0.5

**لدينا:** $d_B=\dfrac{|-12+3-8-4|}{\sqrt{4^2+1^2+2^2}}=\dfrac{21}{\sqrt{21}}=\dfrac{21\sqrt{21}}{21}=\sqrt{21}$

**2)حساب المسافة** $d$ **بين** $A$ و $(\Delta)$ :




$$AB^2=d^2+d_B^2$$

$$d^2=AB^2-d_B^2$$

$$\boxed{d=\sqrt{AB^2-d_B^2}}$$

0.5

$$AB=\sqrt{(-3+1)^2+(3-2)^2+(-4-3)^2}=\sqrt{54}$$

$d=\sqrt{54-21}$ نجد $\boxed{d=\sqrt{33}}$

0.5

**3)التعبير عن** $AM^2$ **بدلالة** $t$ :

$M\in(\Delta)$ ومنه $M(9+4t;6+t;2+2t)$

$$AM=\sqrt{(9+4t+1)^2+(6+t-2)^2+(2+2t-3)^2}$$

$$AM=\sqrt{(4t+10)^2+(t+4)^2+(2t-1)^2}$$

$$AM=\sqrt{16t^2+80t+100+t^2+8t+16+4t^2-4t+1}$$

$$AM=\sqrt{21t^2+84t+117}$$

0.5

$$\boxed{AM^2=21t^2+84t+117}$$

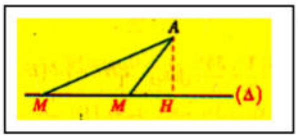
**نضع :** $f(t)=21t^2+84t+117$

**لندرس اتجاه تغير** $f$ : $f'(t)=42t+84$

$42t+84=0$ **نجد** $t=-2$

| $t$ | $-\infty$ | **-2** | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(t)$ | $+\infty \searrow$ | **33** | $\nearrow +\infty$ |

**من أجل** $t=-2$ **الطول** $AM$ **أصغر ما يمكن**




0.5

$$AM^2=f(-2)=33$$

$AM=\sqrt{33}$ **ومنه :** $d=\sqrt{33}$

## التمرين الثاني (4 نقاط)

$$\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=\sqrt{4U_n} \end{cases}$$

**1)حساب** $u_2,u_1$ :

0.5

$$U_1=\sqrt{4U_0}=\sqrt{4}=2$$

$$U_2=\sqrt{4U_1}=\sqrt{8}$$

**2) أ) البرهان أنه من أجل كل** $n\in\mathbb{N}$ : $0\prec U_n\prec 4$

*** من أجل** $n=0$ : $0\prec U_0=1\prec 4$ ( $P(0)$ **محققة** )

***نفرض أن** $0\prec U_n\prec 4$ **صحيحة و نبين أن:** $0\prec U_{n+1}\prec 4$

**لدينا :** $0\prec U_n\prec 4$ **ومنه:** $0\prec 4U_n\prec 16$

0.5

**إذن:** $\sqrt{0}\prec\sqrt{4U_n}\prec\sqrt{16}$

**وبالتالي:** $0\prec U_{n+1}\prec 4$

**إذن** $p(n+1)$ **صحيحة**

***الاستنتاج : من أجل كل** $n\in\mathbb{N}$ : $0\prec U_n\prec 4$

**ب) إتجاه تغير المتتالية** $(U_n)$

$$U_{n+1}-U_n=\sqrt{4U_n}-U_n$$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{(\sqrt{4U_n}-U_n)(\sqrt{4U_n}+U_n)}{\sqrt{4U_n}+U_n}$$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{4U_n-U_n^2}{\sqrt{4U_n}+U_n}=\frac{U_n(4-U_n)}{\sqrt{4U_n}+U_n}$$

0.5

**لدينا :** $U_n\prec 4$ **ومنه:** $4-U_n\succ 0$

**و لدينا :** $U_n\succ 0$ **ومنه:** $\sqrt{4U_n}+U_n\succ 0$

0.25

**ومنه:** $U_{n+1}-U_n\succ 0$ **إذن :** $(U_n)$ **متزايدة**

**الاستنتاج:** $(U_n)$ **متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة**

**3) أ) إثبات أن** $(V_n)$ **متتالية هندسية:** $V_n=\ln(U_n)-\ln 4$

**لدينا :**

$$V_{n+1}=\ln(U_{n+1})-\ln 4$$

$$V_{n+1}=\ln(\sqrt{4U_n})-\ln 4$$

$\boxed{\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a \quad a\succ 0}$

$$V_{n+1}=\frac{1}{2}\ln(4U_n)-\ln 4$$

$\boxed{\ln ab=\ln a+\ln b \quad a\succ 0, b\succ 0}$

$$V_{n+1}=\frac{1}{2}\ln 4+\frac{1}{2}\ln(U_n)-\ln 4$$

$$V_{n+1}=\frac{1}{2}\ln(U_n)-\frac{1}{2}\ln 4$$

$$V_{n+1}=\frac{1}{2}[\ln(U_n)-\ln 4]$$

0.5

$\boxed{V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n}$ $(V_n)$ **هندسية أساسها** $q=\dfrac{1}{2}$

**و حدها الأول** $V_0=\ln(U_0)-\ln 4$ **نجد** $\boxed{V_0=-\ln 4}$

ب) عبارة $V_n$ : $V_n = V_0 \times q^n$

0.25 $\boxed{V_n = (-\ln 4)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

عبارة $U_n$ : $V_n = \ln(U_n) - \ln 4$

نجد $\ln(U_n) = V_n + \ln 4$ $\quad U_n = e^{(v_n+\ln 4)}$

$$U_n = e^{v_n}\times e^{\ln 4}$$

0.25 $U_n = 4e^{-(\ln 4)\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ 0.25

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = 4}$ (لأن : $-1 \prec \frac{1}{2} \prec 1$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$)

4) حساب: $S_n = V_0 + V_1 + .... + V_n$

$S_n = V_0\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]$ نجد $S_n = (-\ln 4)\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right]$

0.5 $S_n = (-2\ln 4)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

$$S_n = 4(\ln 2)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right]$$

حساب: $P_n = U_0 \times U_1 \times .......... \times U_n$

لدينا: $U_n = e^{(v_n+\ln 4)}$

$$P_n = e^{v_0+\ln 4}\times e^{v_1+\ln 4}\times ......\times e^{v_n+\ln 4}$$

$$P_n = e^{(v_0+v_1+.....v_n)+\underbrace{(\ln 4+\ln 4+...+\ln 4)}_{(n+1)\text{ حد}}}$$

0.5 $P_n = e^{(S_n)+(n+1)\ln 4}$

$$P_n = e^{4(\ln 2)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right]+(n+1)\ln 4}$$

## التمرين الثالث(5نقاط)

$$P(Z) = Z^3 + 2(\sqrt{2}-1)Z^2 + 4(1-\sqrt{2})Z - 8$$

1) $P(2) = 0$ 0.25

$$P(Z) = (Z-2)(aZ^2+bZ+c)$$

$$P(Z) = aZ^3 + bZ^2 + cZ - 2aZ^2 - 2bZ - 2c$$

$$P(Z) = aZ^3 + (b-2a)Z^2 + (c-2b)Z - 2c$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a = 1 \\ b-2a = 2\sqrt{2}-2 \\ c-2b = 4-4\sqrt{2} \\ -2c = -8 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2\sqrt{2} \\ c = 4 \end{cases}$

0.5 $\boxed{P(Z) = (Z-2)(Z^2+2\sqrt{2}Z+4)}$

2) $P(Z) = 0$

$Z = 2$ أو $Z^2 + 2\sqrt{2}Z + 4 = 0$

$$\Delta = -8 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = i(2\sqrt{2})$$

$Z = \frac{-2\sqrt{2}+i(2\sqrt{2})}{2} = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ أو $Z = -\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

0.5 $\boxed{Z_1 = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$ و $\boxed{Z_2 = -\sqrt{2}-\sqrt{2}i}$

3) 0.25 $Z_1 + Z_2 = -2\sqrt{2}$

الشكل الأسي: $Z_1 = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

$$|Z_1| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ و $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ إذن 0.5 $\boxed{Z_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}}$

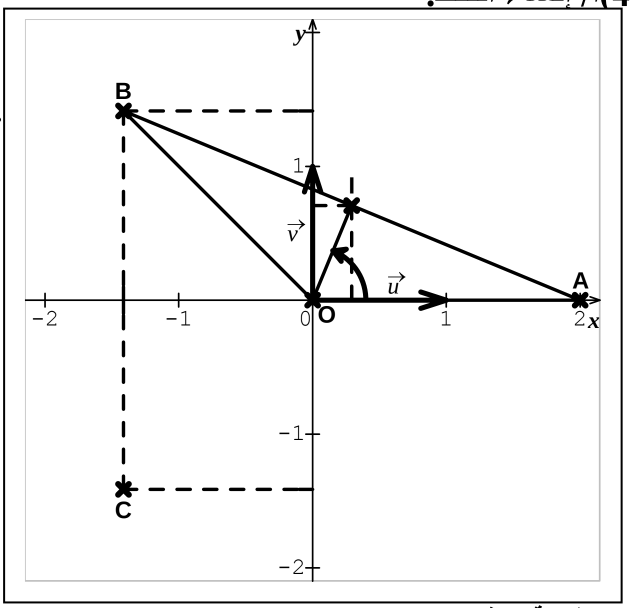
$$Z_2 = -\sqrt{2}-\sqrt{2}i$$

$$|Z_2| = \sqrt{4} = 2$$

$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ و $\alpha = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ إذن 0.5 $\boxed{Z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}}$

4) أ/ إنشاء النقط:

0.5




ب) طبيعة المثلث $OAB$ :

لدينا : $|Z_A| = |Z_B| = 2$ نجد $OB = OA = 2$ 0.25

$OAB$ متقايس الضلعين

قيس $(\vec{U};\vec{OI})$ : $\frac{Z_B}{Z_A} = \frac{2e^{\frac{3\pi}{4}i}}{2} = e^{\frac{3\pi}{4}i}$

$\arg\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right) = \frac{3\pi}{4}+2k\pi$ نجد $(\vec{OA};\vec{OB}) = \frac{3\pi}{4}$

0.5 $(\vec{U};\vec{OI}) = \frac{(\vec{OA};\vec{OB})}{2} = \frac{3\pi}{8}$

لأن $[OI)$ منصف الزاوية $(\vec{OA};\vec{OB})$

ج)حساب $Z_I$ لاحقة $I$ منتصف $[AB]$:

$$Z_I=\frac{Z_A+Z_B}{2}=\frac{2-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$$

0.5

$$Z_I=\frac{2-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

**كتابة $Z_I$ على الشكل الأسي:**

$$|Z_I|=\sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$|Z_I|=\sqrt{\frac{8-4\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\arg(Z_I)=(\vec{U};\vec{OI})=\frac{3\pi}{8}$$

0.5

$$Z_I=\sqrt{2-\sqrt{2}}\,e^{i\frac{3\pi}{8}}$$

**استنتاج القيمة المضبوطة** $\sin\frac{3\pi}{8}$ و $\cos\frac{3\pi}{8}$ :

$$Z_I=\frac{2-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$Z_I=\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$$

**بالمطابقة نجد:**

$$\begin{cases}\sqrt{2-\sqrt{2}}\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\\ \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\\ \sin\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(2+\sqrt{2})}{2}}\end{cases}$$

0.5

$$\begin{cases}\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\\ \sin\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\end{cases}$$

## التمرين الرابع:7نقاط

$D_f=\Re$ ، $f(x)=\ln(e^x+2e^{-x})$

1) أ) إثبات أن : $f(x)=x+\ln(1+2e^{-2x})$ 0.5

لدينا: $f(x)=\ln(e^x+2e^{-x})=\ln\left(e^x(1+2e^{-2x})\right)$

$$f(x)=\ln(e^x)+\ln(1+2e^{-2x})$$

$$f(x)=x+\ln(1+2e^{-2x})$$

ب) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ : 0.25

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+\ln(1+2e^{-2x}))=+\infty$$

إثبات أن $(D): y=x$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ 0.5

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}(\ln(1+2e^{-2x}))=0$$

ومنه $(\Delta)$مقارب مائل لـ $(C_f)$ عند $+\infty$

ج)دراسة الوضع النسبي $(C_f)$ و $(D)$:

0.25 ندرس إشارة الفرق $f(x)-x=\ln(1+2e^{-2x})$

$1+2e^{-2x}\succ1$ لأن $(2e^{-2x}\succ0)$ ومنه $\ln(1+2e^{-2x})\succ0$

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| إشارة الفرق | + |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ فوق $(D)$ |

2) أ) إثبات أن : $f(x)=-x+\ln(2+e^{2x})$

لدينا: $f(x)=\ln(e^x+2e^{-x})=\ln\left(e^{-x}(e^{2x}+2)\right)$

$$f(x)=\ln(e^{-x})+\ln(2+e^{2x})$$

0.5

$$f(x)=-x+\ln(2+e^{2x})$$

ب) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ : 0.25

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-x+\ln(2+e^{2x}))=+\infty$$

إثبات أن $(D'): y=-x+\ln 2$ مقارب مائل لـ $(C_f)$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+\ln 2)]=\lim_{x\to-\infty}(-x+\ln(2+e^{2x})+x-\ln 2)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(\ln(2+e^{2x})-\ln 2)=\ln 2-\ln 2=0$$ 0.5

ومنه $(D')$مقارب مائل لـ $(C_f)$ عند $-\infty$

ج)دراسة الوضع النسبي $(C_f)$ و $(D')$:

ندرس إشارة الفرق

$$f(x)-(-x+\ln 2)=\ln(2+e^{2x})-\ln 2$$

$$f(x)-(-x+\ln 2)=\ln\left(\frac{2+e^{2x}}{2}\right)$$

0.25

$$f(x)-(-x+\ln 2)=\ln\left(1+\frac{1}{2}e^{2x}\right)$$

$1+\frac{1}{2}e^{2x}\succ1$ لأن $(\frac{1}{2}e^{2x}\succ0)$ ومنه $\ln(1+\frac{1}{2}e^{2x})\succ0$

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| إشارة الفرق | + |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ فوق $(D')$ |

3)حساب المشتق:

0.5

$$f'(x)=\frac{e^x-2e^{-x}}{e^x+2e^{-x}}$$

ومنه

$$f'(x)=\frac{e^{-x}(e^{2x}-2)}{e^x+2e^{-x}}$$

**اشارة المشتق:**

إشارة $f'(x)$ من إشارة $e^{2x}-2$

لأن ( $e^{-x}\succ 0$ و $e^{x}+2e^{-x}\succ 0$ )

$e^{2x}-2\ge 0$ نجد $e^{2x}\ge 2$

$2x\ge \ln 2$ نجد $x\ge \frac{\ln 2}{2}$

وبنفس الطريقة: $e^{2x}-2\le 0$ نجد $x\le \frac{\ln 2}{2}$ 0.5

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{\ln 2}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$f$ متناقصة على $\left]-\infty;\frac{\ln 2}{2}\right]$ ومتزايدة على $\left[\frac{\ln 2}{2};+\infty\right[$

2) **جدول تغيرات** $f$ : 0.5

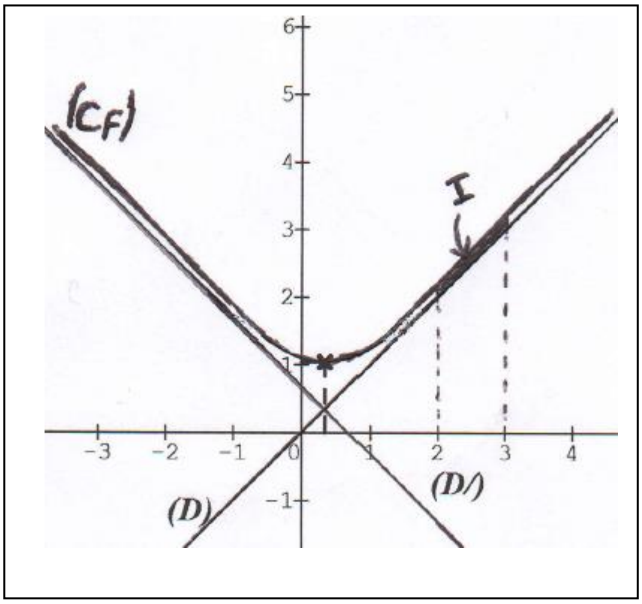
| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{\ln 2}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{3\ln 2}{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$f(x)=x+\ln(1+2e^{-2x})$

$f(\frac{\ln 2}{2})=\frac{\ln 2}{2}+\ln(1+2e^{-\ln 2})=\frac{\ln 2}{2}+\ln 2$

$f(\frac{\ln 2}{2})=\frac{3\ln 2}{2}$

4) **رسم** : $(C_f)$ ، $(D)$ ، $(D')$ 0.75




5) **نضع**: $I=\int_2^3 (f(x)-x)dx$ :

1) $I$ المساحة المحددة بالمنحني $(C_f)$ والمستقيمات 0.25

$(D): y=x$ و $x=3$ و $x=2$

2) **إثبات أنه من أجل** $x\in[0;+\infty[$ : $\ln(1+x)\le x$ :

نضع : $g(x)=\ln(1+x)-x$

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}$$

لدينا من أجل $x\ge 0$ : $g'(x)\le 0$

$g$ متناقصة على المجال $[0;+\infty[$ (فهي تعكس الترتيب)

من أجل $x\ge 0$ : $g(x)\le g(0)$ ولدينا $g(0)=0$

$\ln(1+x)-x\le 0$

$\ln(1+x)\le x$ 0.5

3) **إستنتاج أن**: $0\le I\le \int_2^3 2e^{-2x}dx$ :

لدينا: $I=\int_2^3 (f(x)-x)dx=\int_2^3 (x+\ln(1+2e^{-2x})-x)dx$

$I=\int_2^3 \ln(1+2e^{-2x})dx$

$1+2e^{-2x}\succ 1$ ومنه $\ln(1+2e^{-2x})\succ 0$

ومنه $\int_2^3 \ln(1+2e^{-2x})dx\ge 0$ إذن $(1).....I\ge 0$

لدينا $2e^{-2x}\succ 0$ حسب السؤال السابق $\ln(1+2e^{-2x})\le 2e^{-2x}$

ومنه $\int_2^3 \ln(1+2e^{-2x})dx\le \int_2^3 2e^{-2x}dx$

إذن $(2)....I\le \int_2^3 2e^{-2x}dx$

من (1) و (2) نجد $0\le I\le \int_2^3 2e^{-2x}dx$ 0.75

**إيجاد حصرا للعدد $I$ سعته 0,02** : $0\le I\le \int_2^3 2e^{-2x}dx$

لدينا: $\int_2^3 2e^{-2x}dx=\left[-e^{-2x}\right]_2^3=-e^{-6}+e^{-4}\approx 0.01583...$

ومنه: $0\le I\le (e^{-4}-e^{-6})$

$0\le I\le 0,02$ 0.25