الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية الـــوادي — المؤسستان: - متقن ميلودي العروســي
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي — - ثانوية السعيد عبد الحــي
الشعبة: تقني رياضي — (دورة: ماي2016)

اختبار في مادة الرياضيات — **المـدة: 03 ساعات ونصف**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضــوع الأول

التمرين الأول :(04 نقط)

I) ليكن k عددا صحيحا

1- اثبت أن العددين $A = 4k + 1$ و $B = 5k + 1$ أوليان فيما بينهما

2- نعتبر المعادلة : (E) ………… $5x - 4y = 1$ حيث x و y عددان صحيحان

أ- عين حلا خاصا $(x_0\ ,\ y_0)$ للمعادلة (E) يحقق: $x_0 = y_0$ ، ثم حل المعادلة (E)

ب- تحقق أن الثنائية $(A\ ,\ B)$ حل للمعادلة (E)

II) نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$: المستويين (P) و (R) اللذين معادلتاهما على الترتيب : $(P): 2x - y - z + 1 = 0$ ، $(R): x - 2y + 2z - 3 = 0$

1- بين أن المستويين (P) و (R) يتقطعان وفق مستقيم (d).

2- بين أن إحداثيات نقط المستقيم (R) تحقق المعادلة (E) .

ثم استنتج (γ) مجموعة نقط المستقيم (d) ، التي إحداثياتها أعداد صحيحة .

التمرين الثاني :(4,5 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{U},\vec{V}\right)$ ، L العدد المركب المعرف بـ : $L = \frac{\alpha+\beta i}{3+5i}$

حيث α و β عددان حقيقيان

1 عين α و β بحيث يكون: $|L| = 1$ و $\arg(\mathrm{L}) = \frac{\pi}{4}$

2) نضع : $\alpha = -\sqrt{2}$ و $\beta = 4\sqrt{2}$

أ/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون L^n عددا حقيقيا موجبا

ب/ بين أن: $L^{2016} = 1$ ثم احسب $\left(-\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i\right)^{2016} - (3 + 5i)^{2016}$

3) النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب :

$$Z_A = -\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i \quad ، \quad Z_B = 3 + 5i$$

أ/ عين زاوية الدوران الذي مركزه O ويحول B إلى A

ب/ استنتج طبيعة المثلث OBA

جـ/ بين أن: $\mathrm{AB} = \sqrt{34\left(2 - \sqrt{2}\right)}$

4) لتكن النقطة G منتصف $[AB]$ و M نقطة كيفية من المستوي المركب

أ- بين أن : $MA^2 + MB^2 = 2MG^2 + 17\left(2 - \sqrt{2}\right)$

ب- عين مجموعة النقط M من المستوي حيث : $MA^2 + MB^2 = 42 - 17\sqrt{2}$

التمرين الثالث:(4,5 نقاط)

(U_n)متتالية عددية معرفة كمايلي: $U_1 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)} U_n$

1 **أ/** احسب U_2 و U_3

ب/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_n > 0$

ج/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج أنها متتالية متقاربة و احسب نهايتها

2 نعتبر المتتالية العددية (V_n)المعرفة كمايلي :

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $V_n = n2^n U_n$

أ/ بين أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول V_1

ب/ أكتب كلا من V_n و U_n بدلالة n ، ثم اثبت صحة تقارب المتتالية (U_n)

3 **أ/** احسب بدلالة المجموع S_n حيث : $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots\cdots + V_n$

ب/ احسب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = U_1 \times (2U_2) \times (3U_3) \times \cdots\cdots \times (nU_n)$

التمرين الرابع(07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = xe^x + e^x - 1$

1 بين أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$ وفسر النتيجة بيانيا ، **ثم احسب** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2 ادرس اتجاه تغير الدالة ثم شكل جدول تغيراتها

3 **أحسب** $g(0)$ **ثم استنتج** حسب قيم العدد الحقيقي x **إشارة** $g(x)$

II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = xe^x - x$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول هي $1cm$)

1. احسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$
2. أ بين انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$

ب استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

3. 1 بين ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

2 ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

4. **ا/** بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف w يطلب تعيين احداثياها

ب/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له

ج/ احسب $f(1)$ و $f(2)$ ثم انشئ (Δ) و المماس (T)و المنحنى (C_f)

د/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $xe^x = m$

5. a/ بين أن : $x \mapsto (x-1)e^x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$

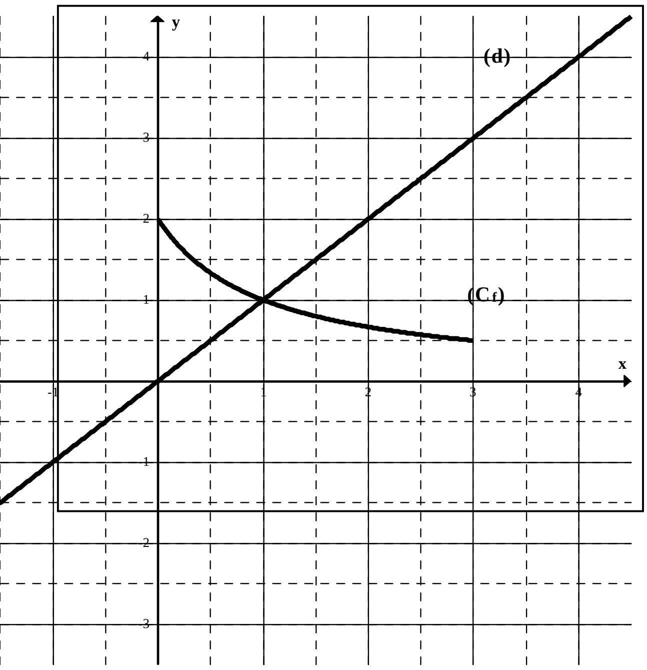
b/ احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما :

$x = 0$ و $x = -1$

الموضـــوع الثاني

التمرين الأول : (4,5 نقط)

في الشكل المقابل (C_f) هو التمثيل البياني للدالة المعرفة على المجال $[0\ ,\ 3]$ بـ:



$f(x) = \frac{2}{x+1}$ و (d) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

1 (U_n) متتالية عددية **معرفة** بحدها الأول : $U_0 = 3$

ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} = f(U_n)$

أ/ مثل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2، U_3، U_4، U_5 **و** U_6 **على حامل محور الفواصل** دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل (**وذلك** في الوثيقة المرفقة)

ب/ ضع تخمينا حول رتابة المتتالية (U_n) وتقاربها

جـ/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_{2n}) و المتتالية (U_{2n+1})

2 برهن **بالتراجع** أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le U_n \le 3$

(V_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$

أ بين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $\left(-\frac{1}{2}\right)$ وعين حدّها الأول

ب أكتب V_n بدلالة n ، ثم استنتج U_n بدلالة n

جـ احسب $\lim_{n \to +\infty} U_n$ وماذا تستنتج ؟

التمرين الثاني:(4,5 نقط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z الآتية : $(Z - 4 - 2i)(Z^2 - 2Z + 2) = 0$

2) في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{U}, \vec{V})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها :

$Z_A = 1 + i$ ، $Z_B = 4 + 2i$ و $Z_C = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}i$ على الترتيب

1. بين أن : $\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}}$

2. استنتج طبيعة المثلث BAC ثم احسب مساحته

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه B ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

أ/ عين الكتابة المركبة للتشابه S

ب/ عين Z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالتشابه S

جـ/ بين أن صورة المثلث BAC بالتشابه S هو المثلث BCD، ثم استنتج مساحة المثلث BCD

4) لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MD} = 0$

أ/ عين طبيعة المجموعة (E) وحدد عناصرها المميزة

ب/ تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المجموعة (E) ثم استنتج طبيعة المثلث ACD

التمرين الثالث :(04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط : $A(-3,3,2)$ ، $B(-2,1,0)$ $E(0,0,2)$ و $F(0,3,-1)$ و (p) المستوي الذي $2x+2y-z+2=0$ ، معادلة ديكارتية له

و (Q) المستوي المعرف بالتمثيل الوسيطي : $(Q)\;\begin{cases} x=\alpha+\beta \\ y=4\alpha-2\beta+1 \\ z=\alpha-2\beta-2 \end{cases}$ حيث α و β عددان حقيقيان

1 أ/ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

ب/ أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q)

ج/ تحقق أن المستويين (p) و (Q) متعامدان ويتقاطعان وفق المستقيم (AB)

2 أ عين المركز C ونصف القطر r لسطح الكرة (S) الذي يمس كل من المستويين (p) و (Q) في النقطتين E و F على الترتيب

ب استنتج بعد النقطة C عن كل من المستويين (p) و (Q)

3 a/ تحقق أن المثلث ABC قائم في النقطة B ثم احسب مساحته

b/ بين أن $\overrightarrow{EF}$ عمودي على المستوي (ABC)

c/ احسب حجمي رباعيي الوجوه ABCE و ABCF

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x-\frac{1}{x}-2lnx$

1 احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة

2 ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها على المجال $]0,+\infty[$

3 احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x+\frac{1}{x}-2-(lnx)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. أ/ اثبت ان : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(lnx)^2}{x}=0$ (مساعدة : نضع $t=\sqrt{x}$)

ب/ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2. 1 تحقق ان : $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$ ثم احسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}}f(x)$

2 اعط تفسيرا بيانيا للنتائج

3. بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,+\infty[$: $f'(x)=g(x)\times\frac{1}{x}$

4. استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

5. ارسم المنحنى (C_f)

6. أ/ اثبت أن: $x\mapsto xlnx-x$ ، هي دالة أصلية للدالة : $x\mapsto lnx$ على المجال $]0,+\infty[$

ب/ باستعمال المكاملة بالتجزئة تحقق أن : $\int_1^e(lnx)^2\,dx=e-2$

ج/ احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما :

$x=e$ و $x=1$

الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية الـــــوادي
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي
الشعبة : تقني رياضي

المؤسستان:- مدرسةسبل النجاح الخاصة
- ثانوية السعيد عبد الحـــــي
(دورة : ماي 2016**)**

الاجابة النموذجية لامتحان الباكلوريا التجريبية

الموضــوع الأول

التمرين الأول: (04 نقط)

(I 1 اثبت أن العددين $A = 4k + 1$ و $B = 5k + 1$ أوليان فيما بينهما :

A **و** B أوليان فيما بينهما يكافئ أن : $5A - 4B = 1$ **أي :**

$$5(4k + 1) - 4(5k + 1) = 20k + 5 - 20k + 4 = 1$$

2 أ/ عين حلا خاصا $(x_0\,,\ y_0)$ للمعادلة (E) يحقق: $x_0 = y_0$ ، ثم حل المعادلة (E)

أي $5x - 4y = 1$

إذن: $5(x - 1) - 4(y - 1) = 0$

ومنه حسب غوص : $y = 5k + 1$ وبالتعويض في المعادلة (E) نجد : $x = 4k + 1$

ب/ تحقق أن الثنائية $(A\,,\ B)$ حل للمعادلة (E): $5(4k + 1) - 4(5k + 1) = 1$ محققة

(II 2 بين أن المستويين (P) و (R) يتقطعان وفق مستقيم (d):

لدينا: $\vec{n}_p\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ و $\vec{n}_R\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ إذن $\vec{n}_R$ ؟ $\vec{n}_p$ ومنه المستويين (P) و (R) يتقطعان وفق مستقيم

3 بين أن إحداثيات نقط المستقيم (d) تحقق المعادلة (E) ، ثم استنتج (γ) مجموعة نقط المستقيم (d) ، التي إحداثياتها أعداد صحيحة

: $\begin{cases}2x - y - z + 1 = 0\\ x - 2y + 2z - 3 = 0\end{cases}$ أي $\begin{cases}4x - 2y - 2z + 1 = 0\\ x - 2y + 2z - 3 = 0\end{cases}$ وبالجمع نجد:

$5x - 4y - 1 = 0$ هي المعادلة (E)

بتعويض قيمة $x = 4k + 1$ و $y = 5k + 1$ في المعادلة الديكارتية للمستوي (P) أو (R) نجد : $z = 3k + 2$

ومنه المجموعة (γ) هي :

$$(d):\ \begin{cases}x = 4k + 1\\ y = 5k + 1\\ z = 3k + 2\end{cases} \qquad (k ؟ \mathbb{Z})$$

التمرين الثاني:(4.5 نقط)

1 عين α و β بحيث يكون: $|L| = 1$ و $\arg(L) = \frac{\pi}{4}$:

لدينا : $L = \frac{\alpha+\beta i}{3+5i} = \frac{(\alpha+\beta i)\times(3-5i)}{(3+5i)\times(3-5i)} = \frac{(3\alpha+5\beta)}{34} + i\,\frac{(3\beta-5\alpha)}{34} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن: $\begin{cases} \frac{(3\alpha+5\beta)}{34} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{(3\beta-5\alpha)}{34} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ أي : $\begin{cases} 3\alpha + 5\beta = 17\sqrt{2} \\ 3\beta - 5\alpha = 17\sqrt{2} \end{cases}$ وبحل جملة المعادلتين نجد : $\alpha = -\sqrt{2}$ و $\beta = 4\sqrt{2}$

2) أ/ عين قيم العدد الطبيعي حتى يكون L^n عددا حقيقيا موجبا:

لدينا: $L = e^{i\frac{\pi}{4}}$ إذن : $L^n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$ ومنه : يكون L^n عددا حقيقيا موجبا إذا كان: $\arg(L) = 2k\pi$

أي : $\frac{n\pi}{4} = 2k\pi$ وبالتالي : $k \in \mathbb{Z}$; $n = 8k$

ب/ بين أن: $L^{2016} = 1$ ، ثم احسب $(-\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^{2016} - (3 + 5i)^{2016}$:

$L^{2016} = e^{i\frac{2016\pi}{4}} = e^{i8(252)\pi} = 1$

لدينا: $L^{2016} = 1$ أي $\left(\frac{-\sqrt{2}+4\sqrt{2}i}{3+5i}\right)^{2016} = 1$ إذن: $\frac{(-\sqrt{2}+4\sqrt{2}i)^{2016}}{(3+5i)^{2016}} = 1$

ومنه نستلزم : $(-\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^{2016} = (3 + 5i)^{2016}$ أي : $(-\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^{2016} - (3 + 5i)^{2016} = 0$

أ/ عين زاوية الدوران الذي مركزه O ويحول B إلى A

$(z_A - z_O) = a(z_B - z_O)$ إذن: $a = \frac{z_A}{z_B} = \frac{-\sqrt{2}+4\sqrt{2}i}{3+5i} = L = e^{i\frac{\pi}{4}}$

ومنه الدوران الذي مركزه O ويحول B إلى A زاويته $\frac{\pi}{4}$

ب/ استنتج طبيعة المثلث OBA: المثلث OBA مثلث متقايس الساقين

جـ/ بين أن: $AB = \sqrt{34(2-\sqrt{2})}$:

$AB = \sqrt{(3+\sqrt{2})^2 + (5-4\sqrt{2})^2} = \sqrt{34(2-\sqrt{2})}$

4) أ بين أن : $MA^2 + MB^2 = 2MG^2 + 17(2-\sqrt{2})$:

$= 2\overrightarrow{MG}^2 + 2\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right)^2 = 2\overrightarrow{MG}^2 + \frac{\overrightarrow{AB}^2}{2} = 2MG^2 + \frac{(AB)^2}{2} = 2MG^2 + 17(2-\sqrt{2})$

ب عين مجموعة النقط M من المستوي حيث : $MA^2 + MB^2 = 42 - 17\sqrt{2}$

$MA^2 + MB^2 = 42 - 17\sqrt{2}$ أي : $2MG^2 + 17(2-\sqrt{2}) = 42 - 17\sqrt{2}$ ومنه : $2MG^2 = 8$

أي $MG = 2$ ومنه مجموعة النقط M هي دائرة مركزها G ونصف قطرها 2

التمرين الثالث (4,5 نقط) نعتبر المتتالية U_n المعرفة بـ: $\begin{cases} U_1 = \frac{1}{4} \\ U_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)}U_n \end{cases}$

متتالية عددية معرفة كمايلي: $U_1 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $U_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)}U_n$

1 أ/ احسب U_2 و U_3 : $U_2 = \frac{1}{4(1+1)}U_1 = \frac{1}{32}$ **و** $U_3 = \frac{2}{4(2+1)}U_2 = \frac{1}{384}$

ب/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_n > 0$

- من اجل $n = 1$: $U_1 > 0$ أي $\frac{1}{4} > 0$ القضية صحيحة
- فرض أن $U_n > 0$ ونثبت صحة القضية $U_{n+1} > 0$
- لدينا : $U_n > 0$ و $n > 0$ فإن : $\frac{n}{4(n+1)} > 0$ إذن : $\frac{n}{4(n+1)}U_n$ أي $U_{n+1} > 0$

إذن من اجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_n > 0$

ج/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج أنها متتالية متقاربة و احسب نهايتها

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n}{4(n+1)}U_n - U_n = \frac{-3n-4}{4(n+1)}U_n < 0$$

ومنه المتتالية (U_n) متناقصة ولكونها محدودة من الأسفل كذلك فهي متتالية متقاربة و نهايتها هي l حيث:

$$\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{x\to+\infty} f(l) = l$$

ومنه $f(l) = l$ تكافئ $\frac{n}{4(n+1)}l = l$ أي $l = 0$ $\frac{-3n-4}{4(n+1)}$

و بمان $\frac{-3n-4}{4(n+1)} \neq 0$ فإن $l = 0$ وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

2 أ/ بين أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول V_1 حيث: $V_n = n2^nU_n$:

لدينا: $V_n = n2^nU_n$

ا ي : $V_{n+1} = (n+1)2^{n+1}U_{n+1}$

$$= (n+1)2^n \times 2\frac{n}{4(n+1)}U_n$$

$$= \frac{1}{2}n2^nU_n$$

ومنه : $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\left(q = \frac{1}{2}\right)$ وحدها الاول: $V_1 = 1 \times 2 \times U_1 = \frac{1}{2}$

ب/ أكتب كلا من V_n و U_n بدلالة n ، ثم اثبت صحة تقارب المتتالية (U_n):

$V_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ و لدينا: $V_n = n2^nU_n$

نستلزم أن : $U_n = \frac{1}{n2^{2n}}$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n2^{2n}} = 0$ $\lim_{n\to+\infty} U_n =$ وبالتالي متتالية متقاربة نحو 0

3 1/ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots\cdots + V_n$

$$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$$

2/ احسب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = U_1 \times (2U_2) \times (3U_3) \times \cdots\cdots \times (nU_n)$

لدينا : $V_n = n2^n U_n$ أي $U_n = \frac{1}{n2^n} V_n$ وبالتعويض في P_n نجد:

$$P_n = \left(\frac{1}{2}V_1\right) \times \left(2 \times \frac{1}{2\times 2^2} V_2\right) \times \left(3 \times \frac{1}{3\times 2^3} V_3\right) \times \cdots\cdots \times \left(n \times \frac{1}{n\times 2^n} V_n\right)$$

أي: $P_n = \left(\frac{V_1}{2}\right) \times \left(\frac{V_2}{2^2}\right) \times \left(\frac{V_3}{2^3}\right) \times \cdots\cdots \times \left(\frac{V_n}{2^n}\right)$

ومنه : $P_n = \frac{V_1 \times V_2 \times V_3 \times \cdots\cdots \times V_n}{2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \cdots\cdots \times 2^n}$ ولدينا: $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

إذن: $P_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \cdots\cdots \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}{2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \cdots\cdots \times 2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)n}}{2^{\left(\frac{n+1}{2}\right)n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)n}$

التمرين الرابع (07نقاط): I نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = xe^x + e^x - 1$

1 بين أن: $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1$ وفسر النتيجة بيانيا ، ثم احسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^x + e^x - 1 = -1$ ومنه $y = -1$ معادلة لمستقيم مقارب افقي بجوار $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

2 ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها :

نحسب الدالة المشتقة وندرس إشارتها: $g'(x) = e^x(x+2)$

ومنه من اجل كل عدد حقيقي: $g'(x) = 0$

إذا كان : $(x+2) = 0$ أي $x = -2$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g'(x)$		-	**0**	+	
$g(x)$	-1	↘	$g(-2)$	↗	$+\infty$

3 أحسب $g(0)$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$:

$g(0) = 0$

x	$-\infty$		**0**		$+\infty$
$g(x)$		-	**0**	+	

(II لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = xe^x - x$

1 احسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

2 أ/ بين انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$

$$f'(x) = xe^{x} + e^{x} - 1 = g(x)$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(0)$	↗	$+\infty$

3 أ/ بين ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (-x)) =$ ومنه المستقيم (Δ) ذوالمعادلة $y = -x$

هو مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$

ب/ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ):

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) + x$	-	0	+
الوضع النسبي	(C_f)تحت (Δ)	(C_f)يقطع (Δ) في $(0,0)$	(C_f) فوق (Δ)

4 أ/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف w يطلب تعيين احداثييها:

$f'(x) = g(x)$ اذن : $f''(x) = g'(x)$

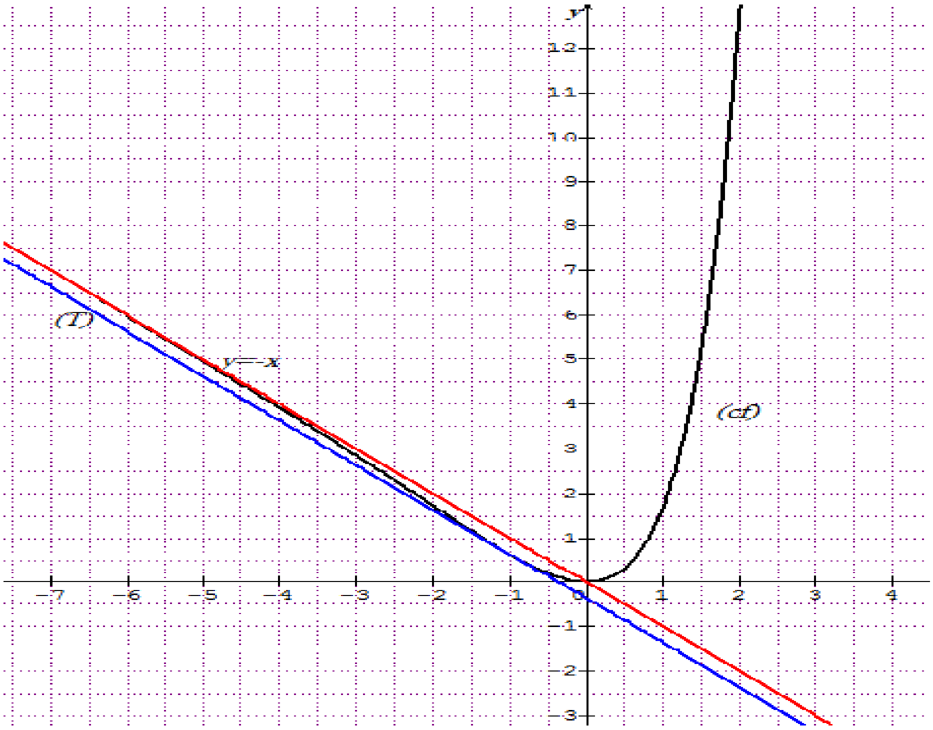
ومنه (C_f) يقبل نقطة انعطاف عند : $x = -2$ وهي: $w(-2 , -2e^{-2} + 2)$

ب/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له :

(C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يعني أن : $f'(x) = -1$ أي: $x = -1$

<u>معادلة (T)</u> : $(T): y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$ إذن: $y_T = -x + 2 - e^{-1}$

ج/ احسب $f(1)$ و $f(2)$ ثم انشئ (Δ) و المماس (T) و المنحنى (C_f)



د/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $xe^x = m$

$xe^x = m$ فمن اجل كل عدد حقيقي x $xe^x - x = m - x$ أي : $f(x) = -x + m$

m	$-\infty$	e^{-1}		0	$+\infty$
$f(x) = -x + m$	المعادلة لا تقبل حل	المعادلة تقبل حل مضاعف $x = -2$	المعادلة تقبل حلين سالبين	المعادلة تقبل حل معدوم	المعادلة تقبل حل موجب

5 a/ بين أن : $x \mapsto (x-1)e^x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$:

$$\left((x-1)e^x\right)' = xe^x$$

b/ احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = -1$ و $x = 0$

مساحة الحيز هي :

$$\int_{-1}^{0}[-x - f(x)]dx = \int_{-1}^{0}[-xe^x]dx = -\int_{-1}^{0}[xe^x]dx = -[(x-1)e^x]_{-1}^{0} = 1 - 2e^{-1}$$

ومنه مساحة الحيز هي 0.624 وحدة مساحة

الموضـوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

1 أ/ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB):

ومنه: $(AB): \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$ ، $(t \in \mathcal{R})$

$$(AB): \begin{cases} x = t - 3 \\ y = -2t + 3 \\ z = -2t + 2 \end{cases}$$

ب/ أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q):

لدينا: $\begin{cases} x = \alpha + \beta \quad \cdots\cdots (1) \\ y = 4\alpha - 2\beta + 1 \cdots\cdots (2) \\ z = \alpha - 2\beta - 2 \cdots\cdots (3) \end{cases}$: من $((1)-(3))$ نجد $\beta = \frac{x-z-2}{3}$

ومن (1) نجد: $\alpha = x - \beta = \frac{2x+z+2}{3}$ وبالتعويض في (2) نجد: $(Q) : 2x - y + 2z + 5 = 0$

ج/ تحقق أن المستويين (p) و (Q) متعامدان ويتقاطعان وفق المستقيم (AB):

$\vec{n}_p.\vec{n}_Q = 0$ اذن : $\vec{n}_p \perp \vec{n}_Q$ ومنه المستويين (p) و (Q) متعامدان

$(AB) \subset (p) \Leftrightarrow 2(t-3) + 2(-2t+3) - (-2t+2) + 2 = 0$ أي $0 = 0$

$(\Delta) \subset (Q) \Leftrightarrow 2(t-3) - (-2t+3) + 2(-2t+2) + 5 = 0$ أي $0 = 0$

2 أ/ عين المركز C ونصف القطر r لسطح الكرة (S) الذي يمس كل من المستويين (p) و (Q) في النقطتين E و F على الترتيب

المركز C هو نقطة تقاطع المستقيمين (CE) و (CF) ومنه: $\begin{cases} (CE): \overrightarrow{EM} = t\vec{n}_p \\ (CF): \overrightarrow{FM} = \lambda\vec{n}_Q \end{cases}$

إذن: $(CE): \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases}$ ، $(t \in \mathcal{R})$

و $(CF): \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda + 3 \\ z = 2\lambda - 1 \end{cases}$ ، $(\lambda \in \mathcal{R})$

$(CE) \cap (CF)$ يعني أن: $\begin{cases} 2t = 2\lambda \\ 2t = -\lambda + 3 \\ -t + 2 = 2\lambda - 1 \end{cases}$

ومنه $t = \lambda = 1$ أي: $C(2, 2, 1)$ ونصف القطر $r = CE = \sqrt{(0-2)^2 + (0-2)^2 + (2-1)^2} = 3$

ب/ استنتج بعد النقطة C عن كل من المستويين (p) و (Q):

المسافة بين C والمستويين (p) و (Q) هي: $CE = CF = r = 3$

3 a/ تحقق أن المثلث ABC قائم في النقطة B ثم احسب مساحته

لديا: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0$ أي $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ ومنه المثلث ABC قائم في النقطة B

إذن: $S_{ABC} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{3 \times 3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ (و. م)^2

b/ بين أن $\overrightarrow{EF}$ عمودي على المستوي (ABC): $\begin{cases}\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$ أي: $\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ و $\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$

c/ احسب حجمي رباعيي الوجوه ABCE و ABCF:

$V_{ABCE}=\frac{1}{3}S_{ABC}\times EI$.

و $V_{ABCF}=\frac{1}{3}S_{ABC}\times FI$ حيث I منتصف [EF]

إذن : $V_{ABCE}=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{9}{2}\,(U.V)$

و $V_{ABCF}=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{9}{2}\,(U.V)$

ملاحظة: يمكن حساب حجمي رباعيي الوجوه ABCE و ABCF باعتبار ان : الارتفاع هو CE و CF والقاعدة هي المثلث ABE و ABF على الترتيب

التمرين الثاني:(4,5 نقط):

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z الآتية : $(Z-4-2i)(Z^2-2Z+2)=0$

$\begin{cases}Z-4-2i=0\\ Z^2-2Z+2=0\end{cases}$ أي: $\begin{cases}Z=4+2i\\ Z^2-2Z+2=0\end{cases}$

$Z^2-2Z+2=0$ نحسب المميز Δ نجد : $\Delta=-4=4i^2$ ومنه $Z_1=1+i$ و $Z_2=1-i$

ومنه مجموعة حلول المعادلة : $S=\{4+2i\,,\ 1+i\,,1-i\ \}$

2) أ/ بين أن : $\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$: $\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}=\frac{1}{2}i=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

ب/ استنتج طبيعة المثلث BAC ثم احسب مساحته

المثلث BAC قائم في B ومساحته : $S_{BAC}=\frac{AB\times BC}{2}=\frac{\sqrt{10}\times\sqrt{\frac{10}{4}}}{2}=\frac{10}{4}\,(\text{و.م})^2$

3) **أ/** عين الكتابة المركبة للتشابه S :

لدينا: $\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}=\frac{1}{2}i$ أي : $(z_C-z_B)=\frac{1}{2}i(z_A-z_B)$ وبعد التبسيط نجد : $Z_C=\frac{1}{2}i\,Z_A+5$

إذن العبارة المركبة للتشابه S هي : $Z'=\frac{1}{2}i\,Z+5$

ب/ عين Z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالتشابه S

$Z_D=\frac{1}{2}i\,Z_C+5=\frac{19}{4}+i\frac{9}{4}$

جـ/ بين أن صورة المثلث BAC بالتشابه S هو المثلث BCD ثم استنتج مساحة المثلث BCD

S تشابه مركزه B ونسبته $\frac{1}{2}$ ويحول A إلى C ويحول C إلى D ومنه صورة المثلث BAC بالتشابه S هو المثلث BCD

$S_{BCD}=\frac{CB\times BD}{2}=\frac{\frac{1}{2}AB\times\frac{1}{2}BC}{2}=\frac{\frac{1}{4}AB\times BC}{2}=\frac{S_{BAC}}{4}=\frac{10}{16}\,(\text{و.م})^2$

4) أ/عين طبيعة المجموعة (E) وحدد عناصرها المميزة:

(E) هي دائرة قطرها AD أي : $(E): (x-x_A)(x-x_D)+(y-y_A)(y-y_D)=0$

ومنه : $(E): x^2+y^2-\frac{23}{4}x-\frac{13}{4}y+7=0$ وبالتالي هي دائرة مركزها $G\left(\frac{23}{8};\frac{13}{4}\right)$ ونصف قطرها $\sqrt{7}$

ب/تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المجموعة (E) ثم استنتج طبيعة المثلث ACD

$C \in (E) \Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{23}{4}\left(\frac{9}{2}\right)-\frac{13}{4}\left(\frac{1}{2}\right)+7=0$ اي $0=0$

ومنه المثلث ACD قائم في النقطة C

التمرين الثالث:(4,5 نقط):

نعتبر المتتالية (u_n):
$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) = \frac{2}{U_n+1} \end{cases}$$

1 أ/ تمثيل الحدود U_0 . U_1 ، U_2، U_3، U_4، U_5 **و** U_6 على حامل محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل

ب/ ضع تخمينا حول رتابة المتتالية (U_n) وتقاربها

(U_n) متتالية غير رتيبة وهي متقاربة نحو العدد 1

جـ/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_{2n}) و المتتالية (U_{2n+1})

من التمثيل نستنتج **أن** المتتالية (U_{2n}) متتالية متناقصة والمتتالية (U_{2n+1}) متتالية متزايدة

2 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le U_n \le 3$

من اجل $n=0$: $0 \le U_0 \le 3$ أي $0 \le 3 \le 3$ القضية صحيحة

نفرض أن $0 \le U_n \le 3$ ونثبت صحة القضية $0 \le U_{n+1} \le 3$

لدينا : $0 \le U_n \le 3$ ، وبإضافة العدد 1 إلى الطرفين نجد: $1 \le U_n+1 \le 4$ وبقلب طرفي المتباينة وضرب الطرفين

في (2) نجد : $\frac{2}{4} \le \frac{2}{U_n+1} \le 1$ أي $\frac{1}{2} \le U_{n+1} \le 1$ ومنه : $0 \le U_{n+1} \le 3$

إذن من اجل كل عدد طبيعي n فإن : $0 \le U_n \le 3$

3 أ- بين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $\left(-\frac{1}{2}\right)$ يطلب تعيين حدّها الأول

لدينا $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+2}$ ومنه $V_{n+1} = \frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+2}$

أي $V_{n+1} = \frac{\frac{2}{U_n+1}-1}{\frac{2}{U_n+1}+2}$ إذن : $V_{n+1} = \frac{-U_n+1}{2U_n+4}$

وبأخذ $\left(\frac{-1}{2}\right)$ عامل مشترك نجد : $V_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{U_n-1}{U_n+2}\right)$ أي $V_{n+1} = -\frac{1}{2}V_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\left(q=-\frac{1}{2}\right)$ وحدها الأول: $V_0 = \frac{U_0-1}{U_0+2} = \frac{2}{5}$

ب - أكتب V_n بدلالة n ، ثم استنتج U_n بدلالة n

$V_n = \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ومن العبارة $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$ نجد: $U_n = \frac{2V_n - 1}{V_n - 1}$

إذن : $U_n = \frac{\frac{4}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}$

ج- احسب $\lim_{n\to+\infty} U_n$ وماذا تستنتج ؟: $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{4}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1} = \frac{-1}{-1} = 1$

ومنه نستنتج أن : (U_n) متتالية متقاربة نحو العدد 1

التمرين الرابع :(07 نقاط):

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$

1. احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \left|x\left(1 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{\ln x}{x}\right)\right| = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} g(x) = \frac{x^2 - 1 - 2x\ln x}{x} = -\infty$$

2. ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها على المجال $]0, +\infty[$:

$g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$ إذن $g'(x) = 0$ أي : $x = 1$

لدينا من اجل كل $x \epsilon\,]0\ ,+\infty[$ فإن $g'(x) > 0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $]0\ ,+\infty[$

- جدول تغيرات الدالة g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↗			$-\infty$

3. احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

$g(1) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

(II لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2 - (\ln x)^2$

1. **أ/** اثبت أن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$: ، (مساعدة : نضع $t = \sqrt{x}$)

نضع : $t = \sqrt{x}$ **اي** : $t^2 = x$ ومنه لما $x \to +\infty$ فإن : $t \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{(\ln t^2)^2}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{2\ln t}{t}\right)^2 = 0$$

ب/ استنتج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[x\left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - \frac{(\ln x)^2}{x}\right)\right] = +\infty$

2 1. تحقق ان : $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{x}} - 2 - \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 = f(x)$$

نضع : $t = \frac{1}{x}$ ومنه لما $x \xrightarrow{>} 0$ فإن : $t \to +\infty$ اذن:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$$

2. اعط تفسيرا بيانيا للنتائج : $x = 0$ معادلة لمستقيم مقارب عمودي

3 بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0, +\infty[$: $f'(x) = g(x) \times \frac{1}{x}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{\ln x}{x} = g(x) \times \frac{1}{x}$$

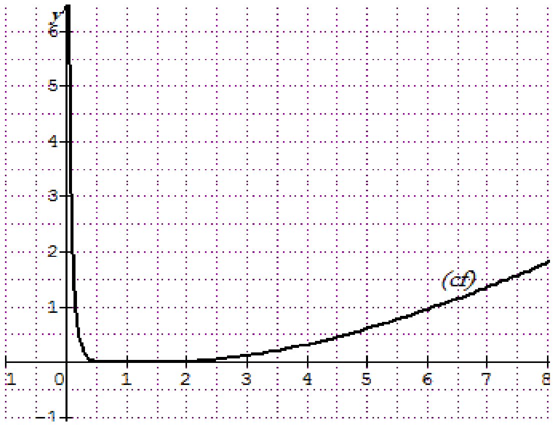
4 استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها:

ومنه من اجل كل $x \in]0, +\infty[$ فإن

اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	-	

5 ارسم المنحنى (C_f)



6 أ/ اثبت أن: $x \mapsto x\ln x - x$ ، هي دالة أصلية للدالة : $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0, +\infty[$:

$$(x\ln x - x)' = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$$

ب/ باستعمال المكاملة بالتجزئة تحقق أن : $\int_1^e (\ln x)^2\, dx = e - 2$:

نضع: $\begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ نجد : $\begin{cases} u'(x) = 2\frac{\ln x}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$ اذن:

$$\int_1^e (\ln x)^2\, dx = [x(\ln x)^2]_1^e - \int_1^e x2\frac{\ln x}{x}\, dx = [x(\ln x)^2]_1^e - 2[x\ln x - x]_1^e = e - 2$$

ج/ احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = e$

مساحة الحيز هي : $\int_1^e f(x)\, dx = \int_1^e \left[x + \frac{1}{x} - 2 - (\ln x)^2\right] dx = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x} - 2\right) dx - \int_1^e (\ln x)^2 dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 + \ln|x| - 2x\right]_1^e - (e - 2) = \frac{1}{2}e^2 - 3e + \frac{9}{2} = \frac{(e-3)^2}{2}$ و.م