

إمتحان البكالوريا التجريبي
الشعبة : علوم تجريبية

المدة: 3 ساعات ونصف

إختبار في مادة الرياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول (04 نقاط):

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
لنعتبر النقط $A(1,2,2)$ ، $B(1,0,1)$ ، $C(3,2,1)$ من الفضاء والمستوي (P) الذي معادلته $z = 1$ والنقطة D هي
المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) ، و (Δ) هو المستقيم المعرف بتمثيله الوسيط:
$$(t \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -4 - t \\ z = 1 \end{cases}$$

و (S) هو السطح الكروي المعرف بالمعادلة: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$.
من بين الأجوبة المقترحة ، اختر الجواب الصحيح مع التبرير:

()	()	()	()	
$(k \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2k \\ z = 3 \end{cases}$	$(k \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = 2k \\ z = 1 \end{cases}$	$(k \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = -1 + k \\ y = 2 + k \\ z = -3k \end{cases}$	$(k \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2k \\ z = 1 \end{cases}$	1) تمثيل وسيطي لـ (BC) هو:
ليسا من نفس المستوي	متقاطعان	منطبقان	متوازيان تمامًا	2) المستقيمان (Δ) و (BC)
عمودي على المستوي (P)	لا يوازي المستوي (P)	يقطع المستوي (P)	محتوى في المستوي (P)	3) المستقيم (BC)
$(1, 2, 0)$	$(1, 2, 1)$	$(1, 1, 2)$	$(1, 2, -1)$	4) إحداثيات النقطة D هي:
مركزه ينتمي إلى المستوي (P)	لا يقطعه المستوي (P)	يقطعه المستوي (P)	يشمل النقطة A	5) السطح الكروي (S)

التمرين الثاني (05 نقاط):

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} كثير الحدود P الذي متغيره z حيث: $P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$.
أ) بين أن المعادلة $P(z) = 0$ لا تقبل حلاً تخيلياً صرفاً.

ب) عين العددين الحقيقيين a ، b ، بحيث: $P(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$.

ج) حل في \mathbb{C} المعادلة: $P(z) = 0$.

2) في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد متجانس (O, \vec{u}, \vec{v}) ، الوحدة $\|\vec{u}\| = 2cm$.
نعتبر النقط $A; B; C$ التي لواحقها على الترتيب: $z_A = 2$ ، $z_B = 1 - i$ ، $z_C = 1 + i$.

أ) أكتب $\frac{\mathcal{J}_C - \mathcal{J}_A}{\mathcal{J}_B - \mathcal{J}_A}$ على الشكل الجبري ، استنتج طبيعة المثلث . ABC .

ب) أكتب \mathcal{J}_B و \mathcal{J}_C على الشكل الآسي .

ج) تحقق أن : $\left(\frac{\mathcal{J}_B}{\sqrt{2}}\right)^{1437} + \sqrt{2}\left(\frac{\mathcal{J}_C}{\sqrt{2}}\right)^{2016} = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathcal{J}_C$

3) ليكن R الدوران الذي مركزه A ويحول B إلى C .

أ) عيّن θ زاوية الدوران R .

ب) أكتب العبارة المركبة للدوران R ، ثم عين لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R .

4) لتكن (ϕ) الدائرة التي قطرها $[BC]$ ومركزها النقطة I و (ϕ') صورتها بالدوران R .

أنشئ بعناية كلا من الدائرتين (ϕ) و (ϕ') .

التمرين الثالث (04 نقاط) :

(u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} بـ $u_0 = 6$ ، $3u_{n+1} = u_n + 1$: $(n \in \mathbb{N})$

1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{2}$.

ب) بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً ، ثم استنتج أنها متقاربة .

ج) عيّن نهاية المتتالية (u_n) .

2) لنعبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ : $v_n = \ln(u_n - \frac{1}{2})$.

أ) بيّن أن (v_n) متتالية حسابية ، يطلب تحديد أساسها r وحدها الأول .

ب) عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج) عيّن ثانية نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الرابع (07 نقاط) :

الجزء الأول: g دالة عددية معرفة على \mathbb{R} بـ : $g(x) = (2x+1)e^{-x} + 1$.

1) أدرس تغيرات الدالة g .

2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α بحيث : $\alpha \in]-0,74, -0,73[$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من \mathbb{R} .

الجزء الثاني: f دالة عددية معرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = (-2x-3)e^{-x} + x$ ، وليكن (c_f) تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) (وحدة الطول 1 cm)

1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2) بيّن أن المستقيم (d) الذي معادلته: $y = x$ هو مقارب مائل للمنحنى (c_f) عند $(+\infty)$.

أ) أثبت أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير f وشكل جدول تغيراتها .

ب) بيّن أن $f(a) = a + 1 + \frac{2}{2a+1}$ ، ثم استنتج حصراً للعدد $f(a)$ (تدور النتيجة إلى 10^{-2}) .

ج) بيّن أن المنحنى (c_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثيها ، ثم أكتب معادلة المماس (T) لـ (c_f) عند I .

4) أرسم المستقيم (d) والمنحنى (c_f) .

5) أ- عيّن العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة $H: x \mapsto (ax+b)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h: x \mapsto (-2x-3)e^{-x}$ على \mathbb{R} .

ب) أحسب بـ : cm^2 المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (c_f) والمستقيمتين المعرفة بالمعادلات : $y = x$

و $x = \alpha$ و $x = 2$ (α هو العدد الحقيقي المعرف في الجزء الأول)

التمرين الأول (04 نقاط) :

التنقيط	التعليق	الجواب	السؤال
0.75	الجملة: $\begin{cases} x=1+2k \\ y=2k \\ z=1 \end{cases}$ هي تمثيل وسيطي للمستقيم (BC) لأن إحداثيات B تحقق الجملة أي $t=0$: وإحداثيات C تحقق أيضا الجملة أي $t=1$.	()	(1)
1	المستقيمان (Δ) و (BC) متقاطعان لأن شعاعي التوجيه غير مرتبطين خطيا و $\begin{cases} -3+t=1+2k \\ -4-t=2k \\ 1=1 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} t=0 \\ k=-2 \end{cases}$ و $M(-3;-4;1) \in (\Delta) \cap (BC)$	()	(2)
0.75	المستقيم (BC) محتوي في (P) لأن: $B \in (P)$ ، $1=1$ ، و $C \in (P)$ ، $1=1$.	()	(3)
0.75	إحداثيات النقطة D هي $(1,2,1)$ لأنها تحقق معادلة (P) أي $1=1$.	()	(4)
0.75	(P) يقطع السطح الكروي (S) لأن $\omega(1,2,2)$ هي مركز (S) ونصف قطرها $R=3$ و $d(\omega;P)=1$ و $1 < R$.	()	(5)

التمرين الثاني (05 نقاط) :

1) لنفرض أن $P(z) = 0$ تقبل حلا تخيليا صرفا هو ai حيث $a \in \mathbb{R}$.

وبالتالي نجد: $-ia^3 + 4a^2 - 6ai - 4 = 0$ يكافئ: $\begin{cases} 4a^2 - 4 = 0 \\ -a^3 - 6a = 0 \end{cases}$ وهذا مستحيل.

إذن: $P(z) = 0$ لا تقبل حلا تخيليا صرفا..... 0.5

..... 0.5 $P(z) = (z-2)(z^2 - 2z + 2)$.

..... 0.25 $P(z) = 0$ يكافئ $z = 2$ أو $(I) z^2 - 2z + 2 = 0$.

..... 0.5 لنحل: $(I) \Delta = (2i)^2$ وبالتالي المعادلة (I) تقبل حلين مركبين مترافقين هما: $1+i, 1-i$.

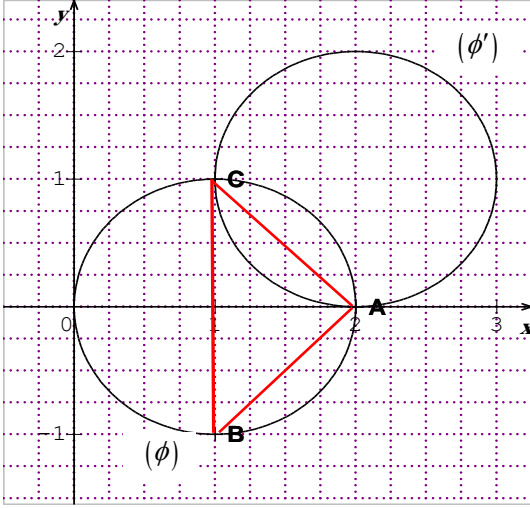
..... 0.25 المعادلة $P(z) = 0$ حلولها هي: $2, 1+i, 1-i$.

..... 0.5 $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$ (2) ومنه $(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ والمثلث ABC قائم في A .

..... 0.5 $z_B = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $z_C = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

..... $\left(\frac{z_B}{\sqrt{2}}\right)^{1437} + \sqrt{2}\left(\frac{z_C}{\sqrt{2}}\right)^{2016} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2} z_C$ (3)

..... 0.5



(3) تعيين زاوية الدوران R .

لدينا: $a = -i$ ومنه $z_C - z_A = a(z_B - z_A)$.

0.5..... إذن $\theta = \arg(a) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

0.25..... (ب) العبارة المركبة للدوران R هي: $z' = -iz + 2 + 2i$.

0.25..... $z_D = 3 + i$.

(4) الدائرة (ϕ) مركزها $I(1;0)$ ونصف قطرها 1

والدائرة (ϕ') مركزها $I'(2;1)$ صورة I بالدوران R ونصف

0.5..... قطرها 1 لأن الدوران تقييس.

التمرين الثالث (04 نقاط):

(1) لنعتبر الخاصية $P(n)$ هي $u_n > 0$.

0.25..... $P(0)$ صحيحة لأن $u_0 = 6 > \frac{1}{2}$.

0.25..... نفرض $P(n)$ صحيحة مع $n \geq 0$ أي: نفرض $u_n > \frac{1}{2}$.

• نبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: نبرهن أن: $u_{n+1} > \frac{1}{2}$.

أي: نبرهن أن $\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3} > \frac{1}{2}$.

لدينا: $u_n > \frac{1}{2}$ فرضا يكافئ $\frac{1}{3}u_n > \frac{1}{6}$ وبالتالي نجد: $\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3} > \frac{1}{2}$ أي $u_{n+1} > \frac{1}{2}$.

0.25..... ومنه $P(n+1)$ صحيحة.

(ب) نبين أن (u_n) متناقصة تماما مهما كان: $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}(u_n - \frac{1}{2})$.

0.5..... لكن: $\frac{2}{3}(u_n - \frac{1}{2}) < 0$ وبالتالي نستنتج أن (u_n) متناقصة.

• بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد $\frac{1}{2}$ فإنها

0.5..... متقاربة.

0.5..... $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{2}$ (ج)

(2) لدينا: $V_n = \ln(u_n - \frac{1}{2})$.

0.75..... (ا) مهما كان: $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} - v_n = -\ln 3$ ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -\ln 3$ وحدها الأول $v_0 = \ln \frac{11}{2}$.

0.25..... (ب) $v_n = -n \ln 3 + \ln \frac{11}{2}$.

0.25..... لدينا: $e^{v_n} = u_n - \frac{1}{2}$ ومنه: $u_n = e^{-n \ln 3 + \ln \frac{11}{2}} + \frac{1}{2}$.

0.5..... $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n \ln 3 + \ln \frac{11}{2}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (وهي النهاية في السؤال 1-ج)

التمرين الرابع (07 نقاط):

لدينا: $g(x) = (2x+1)e^{-x} + 1$.

(1) دراسة تغيرات g .

0.5..... $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

• اتجاه التغير:

0.25..... $g'(x) = (-2x+1)e^{-x}$

0.25..... جدول إشارة $g'(x)$

x	$-\infty$	0.5	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 —

0.5..... من جدول إشارة $g'(x)$ نستنتج أن: g متزايدة تماما على $]-\infty; \frac{1}{2}[$ ومتناقصة تماما على $]\frac{1}{2}; +\infty[$
 0.25..... جدول تغيرات g

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 —
$g(x)$			$\frac{2}{\sqrt{e}} + 1$
	$-\infty$		1

(2) بما أن الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $]-0.74; -0.73[$ و $g(-0.74) \times g(-0.73) < 0$ فإنه وحسب

مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]-0.74; -0.73[$
 0.25..... جدول إشارة $g(x)$ على \square

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		—	0 +

الجزء الثاني:

لدينا: $f(x) = (-2x - 3)e^{-x} + x$

0.5..... $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[\left(\frac{-2x-3}{x} \right) e^{-x} + 1 \right] = +\infty$

(2) بما أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$ فإن المستقيم (d) الذي معادلته $y = x$ هو مقارب مائل لـ: (C_f) عند $+\infty$

(3) لدينا: $f'(x) = (2x + 1)e^{-x} + 1 = g(x)$

0.25..... إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ كما هو مبين في جدول الإشارة التالي:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		—	0 +

0.5..... من جدول إشارة $f'(x)$ نستنتج أن: f متناقصة تماما على $]-\infty; \alpha[$ و متزايدة تماما على $]\alpha; +\infty[$

0.25..... جدول تغيرات f

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		—	0 +
$f(x)$		$+\infty$	$f(\alpha)$
			$+\infty$

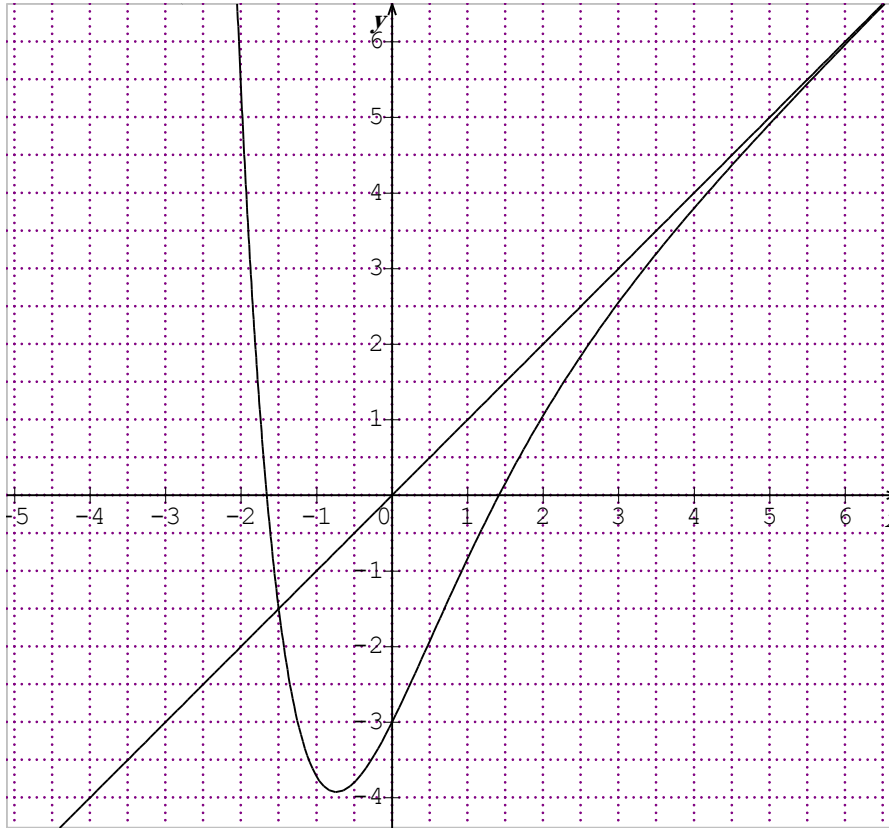
(ب) نعلم أن: $g(\alpha) = 0$ يكافئ: $e^\alpha = -(2\alpha + 1)$

لدينا كذلك $f(\alpha) = \frac{-(2\alpha+3)}{e^\alpha} + \alpha$ ، وبعد التعويض نجد: $f(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{2}{2\alpha+1}$

- 0.25.....استنتاج حصر للعدد : $f(\alpha)$ بتطبيق قواعد الحصر نجد : $-4,08 < f(\alpha) < -3,89$
- 0.25.....لدينا : $f''(x) = g'(x)$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة $g'(x)$ حسب الجدول التالي.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	—

- 0.25.....بما أن $f''(x) = 0$ من أجل $x = \frac{1}{2}$ ويغير إشارته فإن (C_f) تقبل نقطة انعطاف $I(\frac{1}{2}, \frac{-4}{\sqrt{e}} + \frac{1}{2})$
- 0.25.....معادلة المماس (T) عند النقطة I هي : $y = (\frac{2}{\sqrt{e}} + 1)x - \frac{5}{\sqrt{e}}$
- 0.75.....رسم (d) و (C_f)



- 5) لدينا : $H(x) = (ax+b)e^{-x}$ و $h(x) = (-2x-3)e^{-x}$
- (ا) تعيين a و b بحيث : H دالة أصلية لـ h : لدينا : $H'(x) = h(x)$ يكافئ : $(-ax-b+a)e^{-x} = (-2x-3)e^{-x}$
- 0.25.....ومنه : $a = 2$ و $b = 5$ وعليه فإن $H(x) = (2x+5)e^{-x}$
- 0.25..... $A(\alpha) = \int_{\alpha}^2 (x - f(x))dx = \frac{9e^{\alpha} - e^2(2\alpha + 5)}{e^{\alpha+2}} \text{ cm}^2$

إمتحان البكالوريا التجريبي
الشعبة : علوم تجريبية

المدة: 3 ساعات ونصف

إختبار في مادة الرياضيات

على المترشح ان يختار موضوعا واحدا من بين الموضوعين المقترحين

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04.5 نقاط) نعتبر (U_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = 1$ و $u_1 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي

غير معدوم n : $u_{n+1} = 2\alpha u_n + 3\alpha^2 u_{n-1}$ حيث α عدد حقيقي من المجموعة $\{0\}[-1;1]$

نضع ومن أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{n+1} - 3\alpha u_n$

(1) أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول بدلالة α .

(2) هل المتتالية (V_n) متقاربة؟

(3) أحسب بدلالة α و n المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

(4) عين قيمة العدد الحقيقي α علما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{4}$

-استنتج عندئذ U_n بدلالة n ثم بين أن (U_n) متقاربة.

(5) في كل مايلي نضع $\alpha = -\frac{1}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $\pi_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

أ/ بين أن: $\pi_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$

ب/ عين أصغر عدد طبيعي n حتى يكون $\pi_n \leq 3^{-44}$

التمرين الثاني (05 نقاط): المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$

(1) أوجد العددين Z_1 و Z_2 الجذران التربيعيان للعدد المركب $L = 2 - 2i\sqrt{3}$ ثم أكتبهما على الشكل الاسي.

(2) نعتبر النقط A, B, C ذات اللواحق: $Z_A = 2i$, $Z_B = \sqrt{3} + i$ و $Z_C = \sqrt{3} - i$

أ - بين ان $\overline{AB} = \overline{OC}$ و عين قيسا للزاوية الموجهة $(\overline{OB}; \overline{AC})$.

ب- استنتج طبيعة الرباعي $OABC$

ج - عين لاحقة Ω مركز الرباعي $OABC$

(3) أ- أكتب العبارة المركبة للتشابه S الذي يحول A إلى O و يحول C إلى B محددنا عناصره المميزة.

ب- تحقق أن $S \circ S$ تشابه مباشر نسبته $\frac{1}{3}$ و أحد أقياس زاويته π .

ج- نضع f التحويل النقطي المعرف بـ: $f = \underbrace{S \circ S \circ \dots \circ S}_n$

عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون f تحاكيا نسبته سالبة.

4) عدد حقيقي, k مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z بحيث: $OM^2 + AM^2 + BM^2 + CM^2 = k$

أ - أثبت أن مجموعة النقط M من (E) تحقق العلاقة $\Omega M^2 = \frac{k - 8O\Omega^2}{4}$

ب ناقش حسب قيم العدد الحقيقي k طبيعة المجموعة (E) .

التمرين الثالث (04.5 نقط): الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

نعتبر النقط: $A(3; 2; 1)$, $B(3; 5; 4)$ و $C(0; 5; 1)$

1- بين أن المثلث ABC متقايس الاضلاع

2- تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1; 1; -1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة له.

3- أ- عين احداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC

ب- عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يمر بالنقطة G ويعامد المستوي (ABC)

ج- نعتبر النقطة $E(2+t; 4+t; 2-t)$ حيث t عدد حقيقي. عين العدد t حتى يكون $AE^2 = AB^2$

د - عين طبيعة رباعي الوجوه $FABC$ حيث $F(4; 6; 0)$ ثم أحسب حجمه V

4 - بين أن المستقيمين (AF) و (BC) متعامدين.

5- أ- عين المجموعة (S) للنقط M من الفضاء التي تحقق: $\|\overline{MG} + \overline{MF}\| = 6$

ب - عين الوضع النسبي للمجموعة (S) و المستوي (ABC)

التمرين الرابع (06 نقط):

لتكن f الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ ب: $f(0) = 1$ ومن أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (الوحدة $2cm$)

الجزء الأول

1 (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا , ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2 (أ) أدرس قابلية الاشتقاق لـ f عند 0 , ب) أثبت أن f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ثم أحسب $f'(x)$

على المجال $]0; +\infty[$, استنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها

3) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$, تحقق أن: $4,6 < \alpha < 4,7$

4) أكتب معادلة للمستقيم (D) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1

5) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

أ- أحسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة g' , استنتج إشارة $g'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة g , استنتج وضعية (C_f) بالنسبة الى (D)

ج- أحسب $f(6)$ ثم أنشئ (C_f) و (D)

الجزء الثاني

1) عدد طبيعي غير معدوم باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \ln x dx$ بدلالة n

2) استنتج بدلالة n المساحة $A(n)$ ب: cm^2 للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المماس (D) و

المستقيمين ذا المعادلتين $x = 1$ و $x = \frac{1}{n}$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n)$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

السنة الدراسية: 2016/2015
دورة ماي 2016
الشعبة: علوم تجريبية

وزارة الدفاع الوطني
أركان الجيش الوطني الشعبي
دائرة الإستعمال و التحضير
مديرية مدارس أشبال الأمة

الإجابة النموذجية للموضوع الثاني لإمتحان البكالوريا التجريبي

المدة: 3 ساعات ونصف

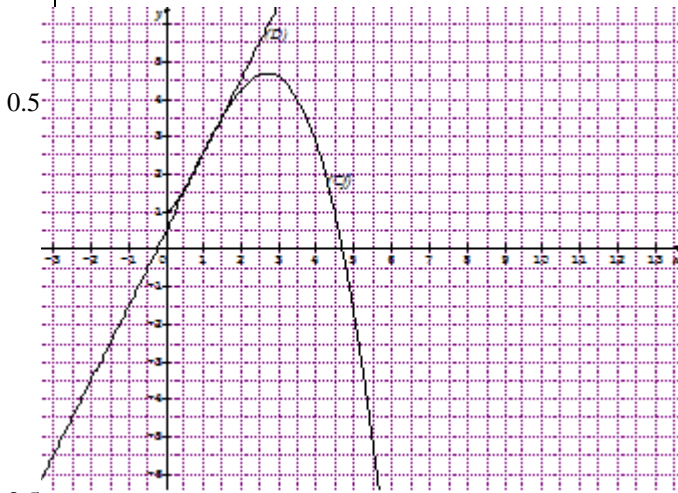
مادة الرياضيات

0.25	$\arg(\overline{OB}; \overline{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_O}\right) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}-3i}{\sqrt{3}+i}\right) = \arg(-\sqrt{3}i)$ $= -\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$	<p>التمرين الأول: (04.5 نقاط) 1- من أجل كل عدد طبيعي n</p> $v_{n+1} = 2\alpha u_{n+1} + 3\alpha^2 u_n - 3\alpha u_{n+1}$ $= -\alpha(u_{n+1} - 3\alpha u_n) = -\alpha v_n$ <p>ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $-\alpha$ وحدها الأول $v_0 = 2 - 3\alpha$</p>	+0.5 0.25
0.25	ب- بما أن $OB \neq AC$ فإن $OABC$ معين	2- من أجل كل عدد طبيعي n	0.25
0.25	ج- $z_\Omega = \frac{z_B + z_O}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$	و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ لأن $-1 < \alpha < 1$ و $\alpha \neq 0$ ومنه (v_n) متقاربة	0.25 0.25
0.5	نجد $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}i$ و $\beta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	3- $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = \frac{2-3\alpha}{1+\alpha}(1 - (-\alpha)^{n+1})$	0.25
0.25	ومنه S هو التشابه المباشر الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة Z الى	4- $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{4}$ معناه $\alpha = \frac{1}{3}$ أي $\frac{2-3\alpha}{1+\alpha} = \frac{3}{4}$	0.25
0.25	النقطة M' ذات اللاحقة Z' بحيث $Z' = \frac{\sqrt{3}}{3}iZ + \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_{n+1} - u_n)$	0.25
0.75	نسبته $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و أحد أقياس زوايته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه النقطة Ω	$= u_{n+1} - u_0 = \frac{3}{4} \left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right]$	0.25
0.5	ب- SOS تشابه مباشر نسبته $\frac{1}{3}$ و $\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}$ و أحد أقياس زوايته	معناه $u_{n+1} = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$	+0.25 0.25
	$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$	أي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{7}{4}$ إذن $u_n = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$	+0.25
0.25	ج- يكون f تحاكيا نسبته سالبة إذا كانت زوايته $\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$	ومن أجل كل عدد طبيعي n $\alpha = -\frac{1}{3}$	0.25
0.25	أي أن $n = 2\alpha / \alpha \in \mathbb{Z}^*$	$= 3 \times 3 \left(\frac{1}{3}\right) \times \dots \times 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n$	0.25
0.5	4- $OM^2 + AM^2 + BM^2 + CM^2 = k$ تكافئ	$= 3^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-(n+1)} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$	0.25
	$4\Omega M^2 + 2O\Omega^2 + 2(3O\Omega^2) = k$ ومنه $\Omega M^2 = \frac{k - 8O\Omega^2}{4}$	ب/ $\pi_n \leq 3^{-44}$ معناه $3^{\frac{n^2-n-2}{2}} \leq 3^{-44}$ معناه	0.25
	ب- لدينا $O\Omega^2 = 1$ ومنه إذا كان $k < 8$ فإن $(E) = \emptyset$	$(n-10)(n+9) \geq 0$ نجد $n \geq 10$ ومنه أصغر عدد	0.5
0.75	إذا كان $k = 8$ فإن $(E) = \{\Omega\}$	طبيعي هو $n = 10$	0.5
	إذا كان $k > 8$ هي الدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها $\frac{\sqrt{k-8}}{2}$	التمرين الثاني: (05 نقاط)	
	التمرين الثالث: (04.5 نقاط)	1- نضع $z = x + iy$ جذر تربيعي ل L معناه L	0.25
0.75	1- لدينا $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ و $\overline{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $\overline{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ أي:	$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \\ xy = -\sqrt{3} \end{cases}$	0.25
0.25	ومنه المثلث ABC متقايس الاضلاع $AB = AC = BC = 3\sqrt{2}$	نجد: $Z_1 = \sqrt{3} - i$ و $Z_2 = -\sqrt{3} + i$	0.25
0.25	2- $\vec{n} \cdot \overline{AB} = 0$ و $\vec{n} \cdot \overline{AC} = 0$ ومنه شعاع ناظمي ل (ABC)	$z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ و $z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$	0.25
0.25	3- معادلة المستوي (ABC) $x + y - z - 4 = 0$	2- $\overline{AB} = \overline{OC}$ إذن $z_B - z_A = \sqrt{3} - i = z_C - z_O$	0.25
0.25	إذن $G\left(\frac{3+3+0}{3}, \frac{2+5+5}{3}, \frac{1+4+1}{3}\right) = G(2, 4, 2)$		0.5
0.5	ب- تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) : $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 4 \\ z = -t + 2 \end{cases}; t \in \mathbb{R}$		
	4- معادلة للمستقيم (D) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 هي:		

0.25 (D): $y = 2x + \frac{1}{2}$
 0.25 معرفة g وقابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدنيا:
 0.25 $g'(x) = f'(x) - 2$
 0.25 معرفة g وقابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدنيا:
 0.25 $g''(x) = f''(x) = -\ln x$ ومنه g' تقبل قيمة حدية عظمى
 0.25 هي 0 عند $x = 1$ اذن من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $g'(x) \leq 0$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	0	

0.25 المنحنى يقع فوق المستقيم (D) في المجال $]0; 1[$ وتحت في المجال
 0.25 $]1; +\infty[$ ويتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 1 اذن (C_f) يقبل نقطة
 0.25 انعطاف هي $I(1; \frac{5}{2})$. $f(6) \square -9.5$
 0.25 رسم المنحنى



0.5 1- نضع $U(x) = \ln x$ ومنه $U'(x) = \frac{1}{x}$
 $V(x) = \frac{x^3}{3}$ ومنه $V'(x) = x^2$
 $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \ln(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln(x) \right]_{\frac{1}{n}}^1 - \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 dx$
 $I_n = \frac{1}{3n^3} \ln(n) - \frac{1}{9} + \frac{1}{9n^3}$

0.25 $(2+t-3)^2 + (4+t-2)^2 + (2-t-1)^2 = 12$ معناه $AE^2 = AB^2$ -
 0.25 ومنه نجد $t = -2$ أو $t = 2$
 0.25 دمن أجل $t = 2$ نجد E منطبقة على F أي $AF = AB = AC = BC$ و
 $AB \cdot AF \neq 0$ اذن $FABC$ رباعي وجوه منتظم.

0.5 مساحة المثلث ABC : $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AA' = \frac{9\sqrt{6}}{4} u \cdot a$
 0.25 حيث A' منتصف القطعة $[BC]$ ومنه $V_{FABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot FG$
 لأن G هي المسقط العمودي لـ F على المستوى (ABC) اذن

0.25 $V_{FABC} = \frac{9\sqrt{2}}{2} u \cdot v$
 0.25 $AF \cdot BC = 0$ أي $BC \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ و $AF \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ -4

0.25 $(AF) \perp (BC)$
 0.25 $MI = 3$ معناه $\|MG + MF\| = 6$ ا-5
 0.25 $I(3; 5; 1)$ ومنه (S) هي سطح الكرة التي مركزها
 0.25 ونصف قطرها 3

0.25 $\sqrt{3} < 3$ و $d(I, (ABC)) = \frac{|3+5-1-4|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ اذ
 0.25 فان (S) و المستوي (ABC) يتقاطعان وفق دائرة.
 0.25 التمرين الرابع (06 نقاط)

0.25 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1^{1-1}$ ومنه f مستمرة عند 0 و (C_f) يقبل
 0.25 نقطة توقف
 0.25 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ب-
 0.25 اذن f قابلة للاشتقاق $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$ ا-2
 0.25 عند 0

0.25 وبما أن f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ (كونها جداء و مجموع دوال قابلة
 0.25 للاشتقاق على $]0; +\infty[$) فان f تقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$
 0.5 من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = 2x(1 - \ln x)$ و $f'(0) = 0$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		0	-
$f(x)$	1	$\frac{e^2}{2} + 1$	$-\infty$

0.25 تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $]0; +\infty[$ ثم على المجال
 $[4, 6; 4, 7]$ و $(f(4, 6) = 0, 44; f(4, 7) = -0, 05)$

0.25 2-
 $A(n) = 4 \left[\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) - (2x + \frac{1}{2}) dx \right] = 4 \left[\frac{1}{2n^3} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n} - I_n \right] cm^2$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n) = \frac{1}{9}$