على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول :(04.5 نقاط)

في الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس المباشر $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط $A(3;1;0)$, $B(1;2;0)$, $C(3;2;1)$ و $D(0;0;m)$ حيث m عدد حقيقي موجب

1) أ) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos A\hat{B}C$ و $\sin A\hat{B}C$.

ب) احسب مساحة المثلث ABC.

2) بين أن الشعاع $\vec{n}(1;2;-2)$ ناظمي للمستوي (ABC)ثم استنتج معادلة ديكارتية له.

3) بين أن $ABCD$ رباعي وجوه و أن حجمه : $v_{ABCD}=\dfrac{2m+5}{6}$.

4) لتكن (S_m) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء و التي تحقق : $x^2+y^2+z^2-2mz+m^2-9=0$.

بين أنه من أجل عدد حقيقي m فإن (S_m) سطح كرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

5) عين قيمة m حتى يكون المستوي (ABC)مماسا لسطح الكرة (S_m).

6) أكتب معادلة المستوي (P) الموازي تماما للمستوي (ABC) و يمس (S_m).

التمرين الثاني :(04.5 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z المركب التالية : $(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$

2) في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$, نعتبر النقط A, B , C و D لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_B=\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $Z_C=3+2i\sqrt{3}$ و $Z_D=\overline{Z_C}$.

بين أن النقط A, B , C و D تنتمي إلى نفس الدائرة (C)التي مركزها Ω ذات اللاحقة $Z_\Omega=3$ يطلب تعيين نصف قطرها .

3) لتكن النقطة E نضيرة النقطة D بالنسبة للمبدأ O.

أ) بين أن : $\dfrac{Z_C-Z_B}{Z_E-Z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ثم استنتج طبيعة المثلث BEC .

ب) بين أنه يوجد دوران R مركزه النقطة B ويحول النقطة E إلى النقطة C يطلب تعيين زاويته .

4) نعتبر التحويل النقطي Sالذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M'ذات اللاحقة Z'حيث :

$Z'+i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}(Z+i\sqrt{3})$.

أ) عين طبيعة S و عناصره المميزة.

ب) عين طبيعة (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق : $Z=3+2\sqrt{3}e^{i\theta}$ حيث θعدد حقيقي .

ت) عين طبيعة المجموعة (E') صورة (E) بالتحويل S و عناصرها الهندسية.

التمرين الثالث :(04 نقاط)

يحتوي كيس على أربع كرات بيضاء تحمل الارقام 0، 2،1،1 واربع كرات حمراء تحمل الارقام 2،2،1،1
نسحب عشوائيا وفي ان واحد ثلاث كرات من الكيس

1) أحسب احتمال الحصول على :
أ ثلاث كرات من نفس اللون
ب ثلاث كرات تحمل نفس الرقم
ج ثلاث كرات أرقامها مختلفة مثنى مثنى .

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات المسحوبة التي تحمل الرقم 1.
أ) عين قانون احتمال المتغير العشوائي
ب)أحسب الامل الرياضياتي $E(X)$ و الانحراف المعياري $\sigma(X)$

التمرين ارابع :(04 نقاط)

الجزء الأول : g دالة عددية معرفة على المجال $D=]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+1-\ln(x)$.

1) أوجد نهايتي الدالة g على يمين 0 و عند $+\infty$.
2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
3) استنتج إشارة الدالة g .

الجزء الثاني : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $D=]0;+\infty[$ كالتالي : $f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{\ln(x)}{x}$.

(C) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=2cm$.

1) أ- أوجد نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و على يمين 0. فسر هندسيا النتيجة الثانية .
ب- بين أن المستقيم (Δ)ذا المعادلة : $y=x+\frac{1}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C) .
جـ - ادرس الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى (Δ).

2) أ- تحقق أنه من أجل كل x ينتمي إلى D: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.
ب – استنتج اتجاه تغير الدالة f على مجموعة تعريفها ، ثم شكل جدول تغيراتها .
جـ- اكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (T) الذي يمس المنحني (C) عند النقطة $A(1;\frac{3}{2})$.

3) أثبت أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا αفي المجال $\left]\frac{1}{2};1\right[$.

4) ارسم المنحني (C) و المستقيمين (Δ) و (T).

الجزء الثالث: نضع من أجل x ينتمي إلى D: $h(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

1) احسب $h'(x)$. ما ذا تستنتج ؟
2) أوجد بالسنتيمترات المربعة S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C)وبالمستقيمات التي معادلاتها:
$x=1\ ;\ x=e\ ;y=0$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(04 نقاط)

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 10.

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $33^{16n+2}-2\times 109^{8n+1}-11\equiv 0[10]$

3) عين الأعداد الطبيعية n حيث: $7\times 3^{n+1}-1\equiv 0[10]$ و $10\prec n\leq 25$.

4) ليكن العدد A الذي يكتب على الشكل $\overline{xx02102}^{3}$ في نظام التعداد ذي الأساس 3 و يكتب في النظام ذي الأساس 9 بالشكل $\overline{y67y}^{9}$

أ) عين x و y.

ب) أحسب A في النظام العشري .

ث) أكتب A في النظام ذي الأساس 7.

التمرين الثاني :(04 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم و المتجانس المباشر $(O,\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و I التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-2$ ، $z_B=-1+i$ و $z_I=i$.

من أجل كل عدد مركب z حيث $z\neq -2$ نضع : $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}$. حيث M صورة العدد المركب z و M' صورة العدد المركب z' .

1- أ) تحقق أن $z'=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$.

ب)بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فان النقطة M' تنتمي إلى دائرة (C) يطلب تعيين عناصرها المميزة .

ج) عين طبيعة (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي بحيث يكون z' تخيليا صرفا .

2- أ) تحقق أن : $z'-i=\dfrac{1-i}{z+2}$

ب)استنتج أن : $IM'\times AM=\sqrt{2}$ و أن $(\vec{u},\overrightarrow{IM'})+(\vec{u},\overrightarrow{AM})\equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

ج) بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A و نصف القطر 1 فان النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها .

3- لتكن النقطة F ذات اللاحقة $z_F=-\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

أ)بين أن النقطة F تنتمي إلى (Γ) ثم بين أن $(\vec{u},\overrightarrow{AF})\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

ب) باستعمال نتائج السؤال 2) أنشئ النقطة F' المرفقة بالنقطة F .

التمرين الثالث :(04 نقاط)

$(u_n)_{n\in N}$ المتتالية المعرفة بحدها الاول $u_0=\frac{1}{5}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\langle u_n\langle\frac{1}{2}$

2) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ب) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{5^n u_n}{2u_n-1}$

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 10 ويطلب حساب حدها الاول v_0

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم بين أن : $u_n=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}$. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+...+\frac{1}{u_n}$

التمرين الرابع :(08نقاط)

I . نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-(x^2+1)e^{-x+1}$.

نسمي (C_f) النحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$.

1- أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب)بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

2- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

3-بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $1.8\prec\alpha\prec1.9$

4- أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

5- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

6- أحسب $f(0)$ ، $f(3)$ ثم أرسم (Δ) ، (T) و (C_f) .

7- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : $f(x)=x+m$.

II . نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$.

1) أ) بين أن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x+1}$.

ب)أحسب I_1 .

2- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

ب)أحسب I_2 .

3- أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما : $x=0$ و $x=1$.

الموضوع الاول

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

1- (أ) $\vec{AB}(2,-1,0)$ $\quad \vec{BC}(2,0,1)$

3x 0,25 $\quad \vec{BA}\cdot\vec{BC} = 4$

$\vec{BA}\cdot\vec{BC} = BA\cdot BC\cos\widehat{ABC}$

$\cos\widehat{ABC} = 4/5$

2x 0,25 $\quad \cos^2 ABC + \sin^2 ABC = 1$ ومنه

$\sin ABC = 3/5$

ب/ مساحة المثلث ABC

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB\cdot BC \sin ABC$

0,5 $\quad S_{ABC} = 3/2$ (و م)

2/ $\vec{n}\cdot\vec{AB} = 0$ و $\vec{n}\cdot\vec{BC} = 0$

3x 0,25 $\quad (ABC) : x+2y-2z-5=0$

0,25 $\quad$ 3/ ABCD رباعي الوجوه $D \notin (ABC)$

0,25 $\quad V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC}\, d(D,(ABC))$

0,25 $\quad V_{ABCD} = \frac{2m+5}{6}$ (ح م)

4/ $(S_m) : (x-0)^2+(y-0)^2+(z-m)^2 = 9$

2x 0,25 $\quad (S_m)$ سطح كرة مركزها D وطول نصف قطرها $R = 3$

5/ (ABC) مماسا لـ (S_m)

$d(D,(ABC)) = R$

$\frac{2m+5}{3} = 3$ أي $m=2$

0,5 $\quad$ قيمة m هي 2

6/ معادلة لـ (P) الموازي لـ (ABC) ويمس (S_m)

$(P) : x+2y-2z+d=0$

(ABC) يمس (S_2) الذي مركزها $D(0,0,2)$

(P) مماسا لـ (S_2) يعني $\frac{|-4+d|}{3} = 3$

يعني $|-4+d| = 9$ $(d=13)$ أو $(d=-5)$ مرفوض

0,5 $\quad$ معادلة لـ (P) هي

$x+2y-2z+13=0$

التمرين الثاني (04.5 نقاط)

01 $\quad$ 1- $S = \{\sqrt{3}i, -\sqrt{3}i, 3+2i\sqrt{3}, 3-2i\sqrt{3}\}$

2/ A, B, C, D تنتمي إلى نفس الدائرة (C) ذات المركز Ω $(z_\Omega = 3)$

0,5 $\quad \Omega A = |z_A - z_\Omega| = |i\sqrt{3}-3| = 2\sqrt{3}$

$\Omega B = \Omega C = \Omega D = 2\sqrt{3}$

$\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = 2\sqrt{3}$

(C) دائرة مركزها $\Omega(3)$ وطول نصف قطرها $R = 2\sqrt{3}$

0,5 $\quad$ 3/ (أ) بين أن $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\pi/3}$

$z_D = 3-2i\sqrt{3}$ ومنه $z_E = -3+2i\sqrt{3}$

2x 0,25 $\quad \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

طبيعة المثلث BEC

0,25 $\quad$ لدينا: $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ يعني $BC = BE$ و $(\vec{BE},\vec{BC}) = -\frac{\pi}{3}$

0,5 $\quad$ المثلث AEC متقايس الأضلاع

ب/ $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\pi/3}$ يعني $z_C - z_B = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_E - z_B)$

0,5 $\quad$ يوجد دوران R مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ يحول النقطة E إلى C

4/ أ - طبيعة s وعناصره:
(S) تشابه مباشر مركزه w.
حيث $z_w = -i\sqrt{3}$ وزاويته $-\frac{\pi}{3}$
ونسبته 2.
ب/ $z = 3 + 2\sqrt{3}e^{i\theta}$ نعني $z - 3 = 2\sqrt{3}e^{i\theta}$
$|z-3| = 2\sqrt{3}$ أي $\Omega M = 2\sqrt{3}$
مجموعة النقط (E) هي
دائرة مركزها Ω وطول
نصف قطرها $R = 2\sqrt{3}$
ت/ طبيعة (E') صورة (E) بـ s
وعناصرها.
صورة الدائرة (C) بالتشابه
s هي دائرة (C') مركزها Ω'
صورة Ω بـ s وطول نصف
قطرها $R' = 2R = 2.2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
$z_{\Omega'} = 6 - 3i\sqrt{3}$

التمرين الثالث (04 نقاط)
عدد الحالات الممكنة:
$C_8^3 = 56$
1) أ) $P_1 = \frac{C_4^3 + C_4^3}{56} =$
ب) $P_2 = \frac{C_4^3 + C_3^3}{56} =$
ج/ $P_3 = \frac{C_1^1 \times C_4^1 \times C_3^1}{56} =$
2/ قيم المتغير العشوائي X هي:
$\{0, 1, 2, 3\}$
3) قانون احتمال المتغير العشوائي X

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{4}{56}$

ب/ الأمل الرياضياتي:
$E(x) = \frac{84}{56} = 1,5$
التباين:
$V(x) = \frac{15}{28}$
الانحراف المعياري:
$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = 0,73$

التمرين الرابع (07 نقاط)
الجزء الأول
1. $\lim_{x \to 0^>} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
2. من أجل كل x من $]0, +\infty[$;
$g'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x}$
الدالة g متناقصة تماما على $]0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$
ومتزايدة تماما على $[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$

x	0		$\sqrt{2}/2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(\frac{\sqrt{2}}{2})$	↗	$+\infty$

$g(\sqrt{2}/2) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 \simeq 1,85$
3. إشارة $g(x)$
الدالة g موجبة تماما على $]0, +\infty[$
الجزء الثاني
1) أ/ $\lim_{x \to 0^>} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
حامل محور التراتيب هو مستقيم مقارب لـ (C)
ب/ $\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = 0$

4/ الوضع النسبي لـ (C) و (D)

$$f(x)-y=\frac{\ln(x)}{x}$$

لما $0<x<1$ يكون (C) تحت (Δ)

0,5 لما $x>1$ يكون (C) فوق (Δ)

لما $x=1$ فإن $(C)\cap(\Delta)=\{(1,\frac{3}{2})\}$

2/ أ- لما $x\in]0,+\infty[$:

0,5 $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

ب- f متزايدة تماما على $]0,+\infty[$ 0,25

0,5

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

د- معادلة للمستقيم (T) مماسا لـ (C) عند A

0,5 $(T): y=2x-\frac{1}{2}$

3/ $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]\frac{1}{2},1[$

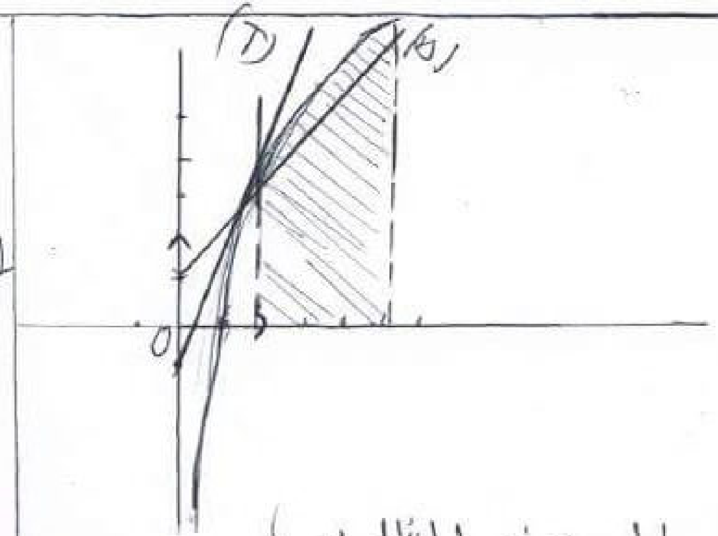
$f(\frac{1}{2})=1-2\ln 2 \simeq -0,39$ و $f(1)=3/2$

0,5 الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على $[\frac{1}{2},1]$ و $f(\frac{1}{2})\times f(1)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من $]\frac{1}{2},1[$ يحقق: $f(\alpha)=0$

/4

01



- الجزء الثالث -

$$h(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(\ln x)^2 \ ; \ x>0$$

0,25 1- حساب $h'(x)$ ماذا تستنتج؟

h دالة قابلة للإشتقاق على D ومن أجل كل x من D :

$$h'(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{x}\ln x$$

$$h'(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{\ln x}{x}$$

الإستنتاج $h'(x)=f(x),\ x>0$

h دالة أصلية لـ f على D.

-2

$$S=\int_1^e f(x)\,dx\times 4\ cm^2$$

0,5 $S=4\left[h(x)\right]_1^e\ cm^2$

$S=(2e^2+2e-2)\ cm^2$

$S\simeq 18,21\ cm^2$

- انتهى -

التمرين الأول (04 نقط)

1- دراسة بواقي قسمة 3^n على 10 حسب قيم العدد الطبيعي n.

0,25 $3^0 \equiv 1[10]$ ، $3^1 \equiv 3[10]$

$3^2 \equiv 9[10]$ ، $3^3 \equiv 7[10]$

$3^4 \equiv 1[10]$

$3^{4k} \equiv 1[10]$ ، $3^{4k+1} \equiv 3[10]$

0,5 $3^{4k+2} \equiv 9[10]$ ، $3^{4k+3} \equiv 7[10]$

$(k \in \mathbb{N})$

2- $33 \equiv 3[10]$ ومنه $33^{16n+2} \equiv 3^{16n+2}[10]$

$109 \equiv 9[10]$ ومنه $109^{8n+1} \equiv 9^{8n+1}[10]$

01 $33^{16n+2} \equiv 9[10]$ و $109^{8n+1} \equiv 9[10]$

و $11 \equiv 1[10]$ و $2\times 109^{8n+1} \equiv 8[10]$

$33^{16n+2} - 2\times 109^{8n+1} - 11 \equiv (9-8-1)[10]$

$33^{16n+2} - 2\times 109^{8n+1} - 11 \equiv 0[10]$

3- ايجاد الأعداد الطبيعية n حيث $7\times 3^{n+1} - 1 \equiv 0[10]$ و $10 \le n \le 25$

$n \equiv$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$7\times3^{n+1}-1 \equiv$	0	2	8	6	$[10]$

قيم n هي $n = 4k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

01 $10 \le n \le 25$ ومنه $\frac{10}{4} \le k \le \frac{25}{4}$

أي $k \in \{3,4,5,6\}$ وعليه قيم n هي: $\{12, 16, 20, 24\}$

4- أ) عيّنا x و y

$0 < x < 3$ و $0 < y < 9$

$$\begin{cases} A = 2 + 1\times 3^2 + 2\times 3^3 + x\times 3^5 + x\cdot 3^6 \\ A = y + 7\times 9 + 6\times 9^2 + y\times 9^3 \end{cases}$$

0,5 أي

$$\begin{cases} A = 65 + 972x \\ A = 549 + 730y \end{cases}$$

$972x - 730y = 484$

اذا كان $x=1$ فإن $y \notin \mathbb{N}$

اذا كان $x=2$ فإن $y = 2$

$(x;y) = (2;2)$

0,25 ب- $A = 2009$

0,25 ج- $A = \overline{5600}^{7}$

التمرين الثاني (04 نقط)

1- أ) نتحقق أن:

$$z' = \frac{i(z+1-i)}{z+2}$$

0,25 $$z' = \frac{iz + i + 1}{z+2} = \frac{i\left(z+1+\frac{1}{i}\right)}{z+2}$$

$$z' = \frac{i(z+1-i)}{z+2}$$

ب- M نقطة تنتمي إلى محور $[AB]$ معناه $AM = BM$

$$|z'| = \left|\frac{i(z+1-i)}{z+2}\right|$$

$$|z'| = \frac{|i||z+1-i|}{|z+2|}$$

0,5 ومنه $$|z'| = \frac{|z-(-1+i)|}{|z-(-2)|}$$

أي $OM' = \frac{BM}{AM} = 1$

M' تنتمي الى دائرة (C) مركزها O و $R = 1$

ج - طبيعة (E)

z' تخيليا صرفا معناه $arg(z')=\frac{\pi}{2}+\pi k$

ومنه $arg\left(\frac{i(z+1-i)}{z+2}\right)=\frac{\pi}{2}+\pi k$

$arg(i)+arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right)=\frac{\pi}{2}+\pi k$

0,5 $arg\left[\frac{z-(-1+i)}{z-(-2)}\right]=\pi k$

وعليه $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM})=\pi k$

$(E)=(AB)-\{A,B\}$

2) أ- نتحقق أن $z'-i=\frac{1-i}{z+2}$

$z'-i=\frac{i(z+1-i)}{z+2}-i$

0,25 $z'-i=\frac{1-i}{z+2}$

ب - الاستنتاج

* $|z'-i|=\left|\frac{1-i}{z+2}\right|$ ومنه $IM'=\frac{\sqrt{2}}{AM}$

0,25 أي $IM'\times AM=\sqrt{2}$

* $arg(z'-i)=arg\left(\frac{1-i}{z+2}\right)$

أي $(\vec{u},\overrightarrow{IM'})=-\frac{\pi}{4}-(\vec{u},\overrightarrow{AM})$

0,5 $(\vec{u},\overrightarrow{IM'})+(\vec{u},\overrightarrow{AM})=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

ج -

M نقطة من دائرة (Γ) ذات

0,5 المركز A وطول نصف القطر 1 معناه

$AM=1$

M' تنتمي الى مجموعة يطلب تعيينها :

نعلم $IM'\times AM=\sqrt{2}$ $IM'=\sqrt{2}$

وعليه M' تنتمي الى دائرة مركزها I و $R=\sqrt{2}$

أ- يبيان أن F تنتمي إلى (Γ) و

$(\vec{u},\overrightarrow{AF})=\frac{\pi}{3}[2\pi]$ نبين أن

0,25 • F نقطة من (Γ) يعني $AF=1$

$AF=|z_F-z_A|=1$

ومنه $F\in(\Gamma)$

• $(\vec{u},\overrightarrow{AF})=arg(z_F-z_A)$

$=arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$

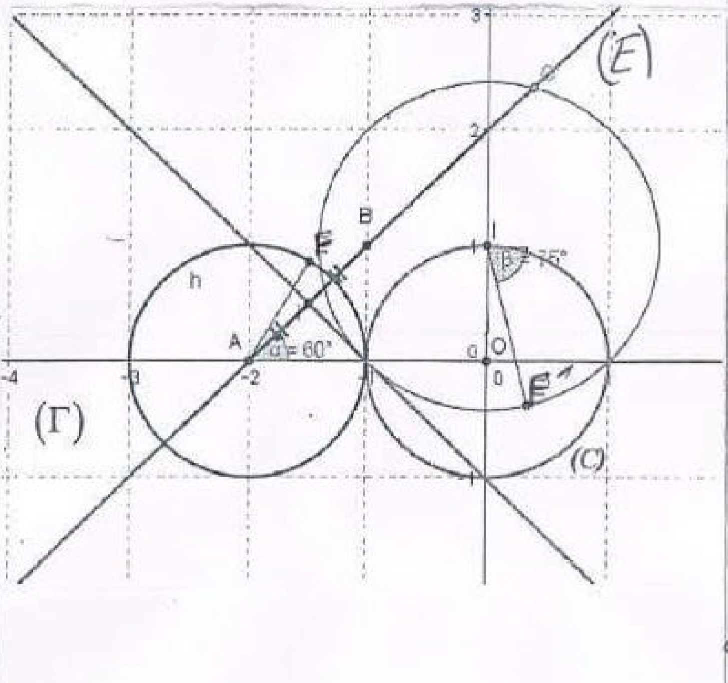
ب- انشاء النقطة F' حيث

0,5 $z_{F'}-i=\frac{1-i}{z_F+2}$

لدينا من السؤال ②:

$FF'=\sqrt{2}$ و $(\vec{u},\overrightarrow{IF'})=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

أي $(\vec{u},\overrightarrow{IF'})=-\frac{7\pi}{12}[2\pi]$

0,5 

الصفحة 2 من الموضوع 2

التمرين الثالث (04 نقاط)

1- $P(n) : 0 < u_n < 1/2$ ، $n \in \mathbb{N}$

. $P(0)$: $0 < u_0 < 1/2$ محققة

. نفرض $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ونبين صحة $P(n+1)$

لدينا : $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n < 1/2$

نضرب في 2 :

$0 < 2u_n < 1$

ومنه

0,5 $1 < 2u_n + 1 < 2$

$\frac{1}{2} < \frac{1}{2u_n+1} < 1$

ومنه $0 < 1 - \frac{1}{2u_n+1} < \frac{1}{2}$

أي

$0 < u_{n+1} < 1$

$P(n+1)$ صحيحة وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

2- أ) $u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{2u_n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - 2u_n^2}{2u_n+1}$

0,25 $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$

اتجاه تغير (u_n) :

لدينا مما سبق من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$0 < u_n < \frac{1}{2}$ يعني $u_n > 0$ و $2u_n + 1 > 0$

و $0 < 1 - 2u_n < 1$

وعليه 0,25 $u_{n+1} - u_n > 0$

(u_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

ب/ بما أن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأعلى بالعدد $1/2$ فهي متقاربة. 0,5

نهايتها (u_n).

$\lim u_{n+1} = \lim u_n = l$ / $l \in \mathbb{R}$

$l = 1 - \frac{1}{2l+1}$

$2l^2 - l = 0$

$l = 1/2$ أو $l = 0$

0,5 بما أن (u_n) متزايدة تماما فإن $l = \frac{1}{2}$

3/ أ- $v_{n+1} = 10 v_n$

(v_n) متتالية هندسية أساسها 10

0,5 وحدها الأول $v_0 = -\frac{1}{3}$.

0,25 ب- $v_n = v_0 \times q^n = \left(-\frac{1}{3}\right)10^n$

لدينا : $v_n = \frac{5^n u_n}{2u_n - 1}$ ومنه

$u_n = \frac{v_n}{2v_n - 5^n} = \frac{\left(-1/3\right)10^n}{2\left(-\frac{1}{3}\right)10^n - 5^n}$

0,5 أي $u_n = \frac{10^n}{2 \times 10^n + 3 \cdot 5^n} = \frac{2^n}{2^{n+1} + 3}$

0,25 $\lim u_n = \lim \frac{2^n}{2^n\left[2 + \frac{3}{2^n}\right]} = \frac{1}{2}$

حساب S_n بدلالة n :

$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$

$\frac{1}{u_n} = \frac{2^{n+1} + 3}{2^n} = 2 + \frac{3}{2^n}$

0,5 $S_n = \left(2 + \frac{3}{2^0}\right) + \left(2 + \frac{3}{2^1}\right) + \dots + \left(2 + \frac{3}{2^n}\right)$

$S_n = 2(n+1) + 3\left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$

$S_n = 2(n+1) + 3\left[\frac{(1/2)^{n+1} - 1}{1/2 - 1}\right]$

$\boxed{S_n = 2(n+1) - 6\left[(1/2)^{n+1} - 1\right]}$

التمرين الرابع (08 نقاط)

1) أ) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ 0,25

بين أن: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x - \frac{x^2+1}{e^{-1}\times e^x}\right]$

$= \lim_{x \to +\infty} \left[x - \frac{x^2}{e^{-1}e^x} - \frac{1}{e^{-1}e^x}\right]$ → 0 → 0

0,25 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

ب- f قابلة للاشتقاق على IR ومن أجل كل x من IR:

0,5 $f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$

ج- من أجل كل x من IR: 0,25 $f'(x) > 0$

وعليه f متزايدة تماما على IR

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
0,5 $f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

2- $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} -(x^2+1)e^{-x+1} = 0$

(Δ) مستقيم مقارب لـ (Cf) عند (+∞)

• الوضع النسبي لـ (Cf) و (Δ)

$f(x) - y = -(x^2+1)e^{-x+1} < 0$

(Cf) يقع تحت (Δ) من أجل $x \in IR$

3 - $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من $]1,8;1,9[$

0,5 $f(1,9) \simeq 0,03$ / $f(1,8) \simeq -0,11$

f مستمرة ورتيبة تماما على $[1,8;1,9]$

و $f(1,8) \times f(1,9) < 0$ حسب مبرهنة

القيم المتوسطة $f(x)=0$ تقبل حلا

وحيدا α من $]1,8;1,9[$.

4. 0,5 $(T): y = x - 2$

5- f' دالة قابلة للاشتقاق

على IR ومن أجل كل x من IR

$f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$

$f''(x) = 0$ تعني $(x=1)$ أو $(x=3)$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0 $+$	0 $-$	

01 $f''(x)$ تنعدم عند كل $x=1$ و $x=3$

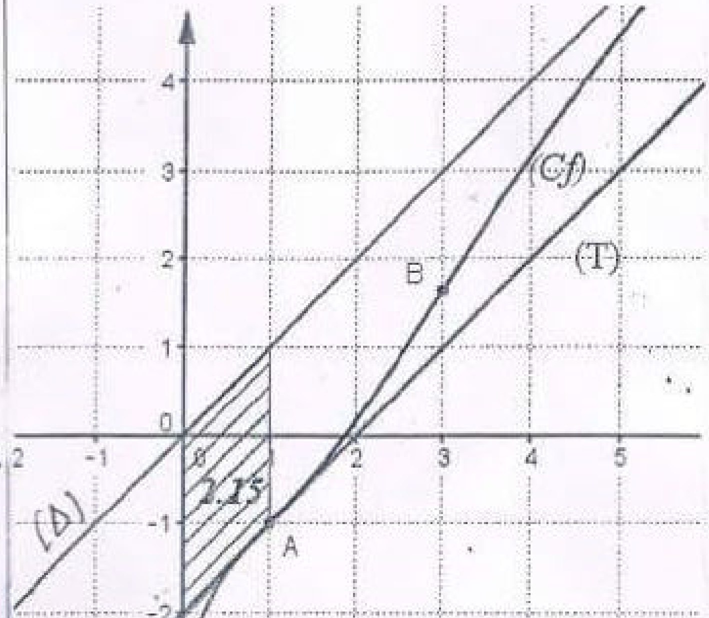
مغيرة إشارتها ما

$A(1,-1)$ و $B(3, 3-10e^{-2})$

نقطتا انعطاف لـ (Cf).

6- $f(0) = -e$ ، $f(3) = 3 - 10e^{-2}$

01



7- المناقشة البيانية:

$(E) \ldots f(x) = x + m$

حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم معادلته $y = x + m$ الموازي لكل من (T) و (Δ) 0,5

• إذا كان $m \in]-\infty, -e[$ المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا سالبا.

• إذا كان $m = -e$ المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا معدوما.

• إذا كان: $m \in]-e, 0[$ المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا موجبا

• إذا كان $m \in [0, +\infty[$ المعادلة (E) ليس لها حل.

- الجزء II -

1) أ) الدالة G قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

0,5 $G'(x) = x e^{-x+1}$

وعليه G دالة أصلية للدالة $x \mapsto x e^{-x+1}$ على $\mathbb{R}$.

ب) $I_1 = \int_0^1 x e^{-x+1} dx$

0,25 $I_1 = [G(x)]_0^1$

$I_1 = -2 + e$

2) أ) $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x+1} dx$

0,5 نضع $U(x) = x^{n+1}$ ومنه $U'(x) = (n+1)x^n$

$V'(x) = e^{-x+1}$ ومنه $V(x) = -e^{-x+1}$

$I_{n+1} = \left[-x^{n+1} e^{-x+1}\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{-x+1} dx$

$I_{n+1} = -1 + (n+1) I_n$

ب) حساب I_2

$I_2 = -1 + 2 I_1$

$I_2 = -1 + 2(e-2)$

0,25 $I_2 = 2e - 5$

3- $S = \int_0^1 [y - f(x)] dx$

$S = \int_0^1 (x^2+1) e^{-x+1} dx$

0,5 $S = \int_0^1 x^2 e^{-x+1} dx + \int_0^1 e^{-x+1} dx$

$S = I_2 + \left[-e^{-x+1}\right]_0^1$

$S = I_2 + (-1 + e)$

$S = 2e - 5 - 1 + e = (3e - 6) cm^2$

$S = (3e-6) cm^2 = 2,15 cm^2$ 0,5

- انتهى -