فرض الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

تمرين 1 (10 ن)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$.

1) أ- أحسب u_1 ، u_2 و u_3 ، ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \succ 1$.

ب – بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

جـ- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم أحسب نهايتها .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n^2 - 1$.

أ- بين انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2v_{n+1} = v_n$.

ب- استنتج أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0.

جـ- أكتب بدلالة n ، كلا من v_n و u_n ، ثم أحسب من جديد $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

3) أحسب بدلالة n كلا من S_n و T_n حيث :

$$S_n = u_0^2 + u_1^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n^2$$
$$T_n = v_0 + 2v_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2^n v_n$$

تمرين 2 (10 ن) :

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلتين $(E): 2019x - 1440y = 282$ و $(E'): 673x - 480y = 94$.

1) بين أن العدد 673 أولي .

2) بين أن للمعادلتين (E) و (E') نفس الحلول في مجموعة الحلول $\mathbb{Z}^2$.

3) عين الثنائية $(x_0; y_0)$ من $\mathbb{Z}^2$ الحل الخاص للمعادلة (E') حيث : $x_0 - y_0 = 1$ ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E').

4) علما أن الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E') ، عين القيم الممكنة لـ $PGCD(x; y)$.

5) عين الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (E') ، بحيث $PGCD(x; y) = 47$.

6) n عدد طبيعي باقي قسمته على 480 هو 152 وباقي قسمته على 673 هو 58 .

- عين قيم n ، ثم استنتج أصغر قيمة ممكنة له .

بالتوفيق .

الاجابة النموذجية :

تمرين 1 :

1) لنا : $u_0=3$ ، $u_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1+u_n^2}{2}}$

أ- حساب الحدود :

$$u_3=\sqrt{\frac{1+u_2^2}{2}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}^2}{2}}=\sqrt{2} \text{ و } u_2=\sqrt{\frac{1+u_1^2}{2}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}^2}{2}}=\sqrt{3} \text{ و } u_1=\sqrt{\frac{1+u_0^2}{2}}=\sqrt{\frac{1+3^2}{2}}=\sqrt{5}$$

☜ البرهان بالتراجع :

من اجل $n=0$: $u_0=3\succ 1$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من اجل n ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$

لنا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\succ 1$ تكافئ : $u_n^2\succ 1$ تكافئ : $\dfrac{1+u_n^2}{2}\succ\dfrac{2}{2}$ تكافئ : $\sqrt{\dfrac{1+u_n^2}{2}}\succ 1$ تكافئ : $u_{n+1}\succ 1$.

بما ان الخاصية صحيحة من اجل $n+1$ فهي صحيحة من أجل n وذلك حسب البرهان بالتراجع .

ب- بيان أن المتتالية (u_n)متناقصة تماما على $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}-u_n=\frac{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}-u_n\right)\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}+u_n\right)}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}+u_n\right)}=\frac{\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}^2-u_n^2}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}+u_n\right)}=\frac{\frac{1+u_n^2}{2}-u_n^2}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}+u_n\right)}=$$

$$\frac{\frac{1+u_n^2-2u_n^2}{2}}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}+u_n\right)}=\frac{\frac{1-u_n^2}{2}}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}+u_n\right)}=\frac{1-u_n^2}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}+u_n\right)}$$

لنا $u_n\succ 1$ تكافئ : $u_n^2\succ 1$ تكافئ : $-u_n^2\prec -1$ تكافئ : $1-u_n^2\prec 0$

ولنا : $2\left(\sqrt{\dfrac{1+u_n^2}{2}}+u_n\right)$ ومنه : $u_{n+1}-u_n\prec 0$ ومنه المتتالية (u_n)متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

جـ- استنتاج ان (u_n) متقاربة : المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد **1** فهي متقاربة .

☜ حساب النهاية :

بما أن المتتالية (u_n) متقاربة فان : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$

ومنه : $\sqrt{\dfrac{1+l^2}{2}}=l$ تكافئ : $\dfrac{1+l^2}{2}=l^2$ مع $l\geq 0$ تكافئ : $1+l^2=2l^2$ تكافئ : $l^2=1$

تكافئ : $l=1$ (مقبول) أو $l=-1$(مرفوض). ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=u_n^2-1$.

أ- بيان انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2v_{n+1}=v_n$.

☜ من اجل $n=0$: لدينا : $v_0=u_0^2-1=3^2-1=8$ ولنا : $v_1=u_1^2-1=\sqrt{5}^2-1=4$ ومنه : $2v_1=v_0$.

☜ نفرض أن الخاصية صحيحة من اجل n ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي نبرهن أنه : $2v_{n+2}=v_{n+1}$)

لنا من أجل كل عدد طبيعي n : $2v_{n+1}=2\left(u_{n+1}^2-1\right)=2\left(\sqrt{\dfrac{1+u_n^2}{2}}^2-1\right)=2\left(\dfrac{1+u_n^2-2}{2}\right)=u_n^2-1=v_{n+1}$

بما ان الخاصية صحيحة من اجل $n+1$ فهي صحيحة من أجل n وذلك حسب البرهان بالتراجع .

ب- استنتاج أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0:

لنا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $2v_{n+1}=v_n$ تكافئ : $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$.

حساب v_0 : $v_0=u_0^2-1=3^2-1=8$

جـ- كتابة v_n بدلالة n : $v_n=v_0\times q^n=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

و كتابة u_n بدلالة n : لدينا $v_n=u_n^2-1$ تكافئ : $u_n^2=v_n+1$ تكافئ : $u_n=\sqrt{v_n+1}=\sqrt{8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}$.

☜ حساب النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}=\sqrt{0+1}=1$

3) حساب المجموع :

$$\begin{aligned}S_n&=u_0^2+u_1^2+\dots\dots\dots\dots+u_n^2\\&=v_0+1+v_1+1+\dots\dots+v_n+1\\&=v_0+v_1+\dots+v_n+1+1+\dots+1\\&=8\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{2}}+1\times(n-0+1)\\&=8\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}=16\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+n+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_n&=v_0+2v_1+\dots\dots\dots\dots+2^nv_n\\&=2^0v_0+2v_1+\dots\dots\dots\dots+2^nv_n\\&=2^0\times8+2\times8\times\frac{1}{2}+\dots..+2^n\times8\times\frac{1}{2^n}\\&=8+8+\dots.+8\\&=8\times(n-0+1)\\&=8n+8\end{aligned}$$

<u>تمرين 2 :</u>

1) بين أن العدد 673 أولي : $\sqrt{673}\approx25,94$.

العدد 673 يقبل القسمة على	2	3	5	7	11	13	17	19	23
	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا

ومنه العدد 673 أولي.

2) بيان أن للمعادلتين $(E):2019x-1140y=282$ و $(E'):673x-480y=94$ نفس الحلول في مجموعة الحلول $\mathbb{Z}^2$:

$$\begin{aligned}2019&=1440\times1+579\\1440&=579\times2+282\\579&=282\times2+15\\282&=15\times18+12\\15&=12\times1+3\\12&=3\times4+0\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ $PGCD(2019;1440)=3$

لنا : 3 يقسم العدد 2019 وبالتالي يقسم $2019x$ و 3 يقسم العدد 1440 وبالتالي يقسم $1440y$ ومنه 3 يقسم $2019x-1440y$

وبالتالي 3 يقسم 282 لذلك عند قسمة أطراف المعادلة على 3 تصبح المعادلة (E)مكافئة للمعادلة (E').

3) تعين الثنائية $(x_0;y_0)$ من $\mathbb{Z}^2$ الحل الخاص للمعادلة (E') حيث : $x_0-y_0=1$.

لنا $x_0-y_0=1$ تكافئ : $y_0=x_0-1$

بالتعويض نجد : $673x_0-480(x_0-1)=94$ تكافئ : $673x_0-480x_0+480=94$ تكافئ : $193x_0=-386$ ومنه

$x_0=-2$ أي : $y_0=-3$

☜ تعيين حلول المعادلة (E'):

$\begin{cases}673x-480y=94\\673(-2)-480(-3)=94\end{cases}$ تكافئ : $673(x+2)-480(y+3)=0$ تكافئ : $673(x+2)=480(y+3)$

لنا 673 يقسم $480(y+3)$ ولكن 673 اولي مع 480 أي حسب مبرهنة غوص 673 يقسم $y+3$ ومنه $y+3=673k$ مع

$k\in\mathbb{Z}$ ومنه : $y=673k-3$ مع $k\in\mathbb{Z}$. و بالتعويض: $673x-480(673k-3)=94$ ومنه : $x=480k-2$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

ومنه حلول المعادلة (E') في $\mathbb{Z}^2$ هي من الشكل : $(480k-2;673k-3)$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

- تعين القيم الممكنة لـ $PGCD(x;y)$ ، علما أن الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E') : نضع $PGCD(x;y)=d$

لنا : d يقسم العدد 673 وبالتالي يقسم $673x$ و d يقسم العدد 480 وبالتالي يقسم $480y$ ومنه d يقسم $673x-480y$

وبالتالي d يقسم 94 لذلك d من قواسم العدد 94 ولنا $94=2\times47$ ومنه القيم الممكنة له : $d\in\{1;2;47;94\}$

☜ تعين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (E') ، بحيث $PGCD(x;y)=47$:

$\begin{cases}x\equiv0[47]\\y\equiv0[47]\end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases}480k-2\equiv0[47]\\673k-3\equiv0[47]\end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases}480k\equiv2[47]\\673k\equiv3[47]\end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases}10k\equiv2[47]\\15k\equiv3[47]\end{cases}$

تكافئ : $25k\equiv5[47]$ (5 اولي مع 47) تكافئ : $5k\equiv1[47]$ تكافئ : $5k\equiv1+47\times2[47]$ تكافئ : $5k\equiv95[47]$ تكافئ :

$k\equiv19[47]$ ومنه $k=47q+19$ مع $q\in\mathbb{Z}$ ومنه : $\begin{cases}x=480(47q+19)-2\\y=673(47q+19)-3\end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases}x=22560q+9118\\y=31631q+12784\end{cases}$

ومنه الثنائيات $(x;y)$ التي نبحث عنها من الشكل : $(22560q+9118;31631q+12784)$ مع $q\in\mathbb{Z}$

4) <u>طريقة 1</u> : لنا : $\begin{cases}n=480q'+152\\n=673q''+58\end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases}n-152=480q'\\n-52=673q''\end{cases}$ بالفرق نجد : $94=673q''-480q'$

معناه : $\begin{cases}q''=x=480k-2\\q'=y=673k-3\end{cases}$ بالتعويض نجد : $n=323040k-1288$ مع $k\in\mathbb{N}^*$

<u>طريقة 2</u> : لنا : $\begin{cases}n\equiv152[480]\\n\equiv58[673]\end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases}673n\equiv102296[323040]\\480n\equiv27840[323040]\end{cases}$ تكافئ : $193n\equiv74840[323040]$ تكافئ :

$193n\equiv176144-323040[323040]$ تكافئ : $n\equiv1288[323040]$ تكافئ : $n=323040k-1288$ مع $k\in\mathbb{N}^*$

☜ تعيين اصغر قيمة له كي يكون n عدد طبيعيا :

$n\geq0$ تكافئ : $323040k-1288\geq0$ تكافئ : $k\geq\frac{1288}{323040}\approx0.003$ أي بأخذ $k=1$ نجد : $n=321752$