مدرسة "الرّجاء والتفوّق" الخاصّة
Ecole Erradja wa Tafaouk
ÉCOLE PRIVÉE

المادّة: الرياضيات
المستوى: 3 ت إ
التّاريخ: 2021/11/29
المدّة: 02 ســا و30د

اختبار الفصل الأوّل

تمرين 1:

(u_n) متتالية عددية معرّفة بحدّها الأوّل $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$

I. عيّن قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

II. في كل ما يلي: $\alpha = 3$

1) أحسب الحدود u_1 , u_2 , u_3 .

2) أ- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}$ فإنّ: $u_n > 1$

ب- جدّ اتجاه تغير المتتالية (u_n) .ماذا تستنتج؟

3) لتكن (v_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 1$

أ) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول v_0 و أساسها q.

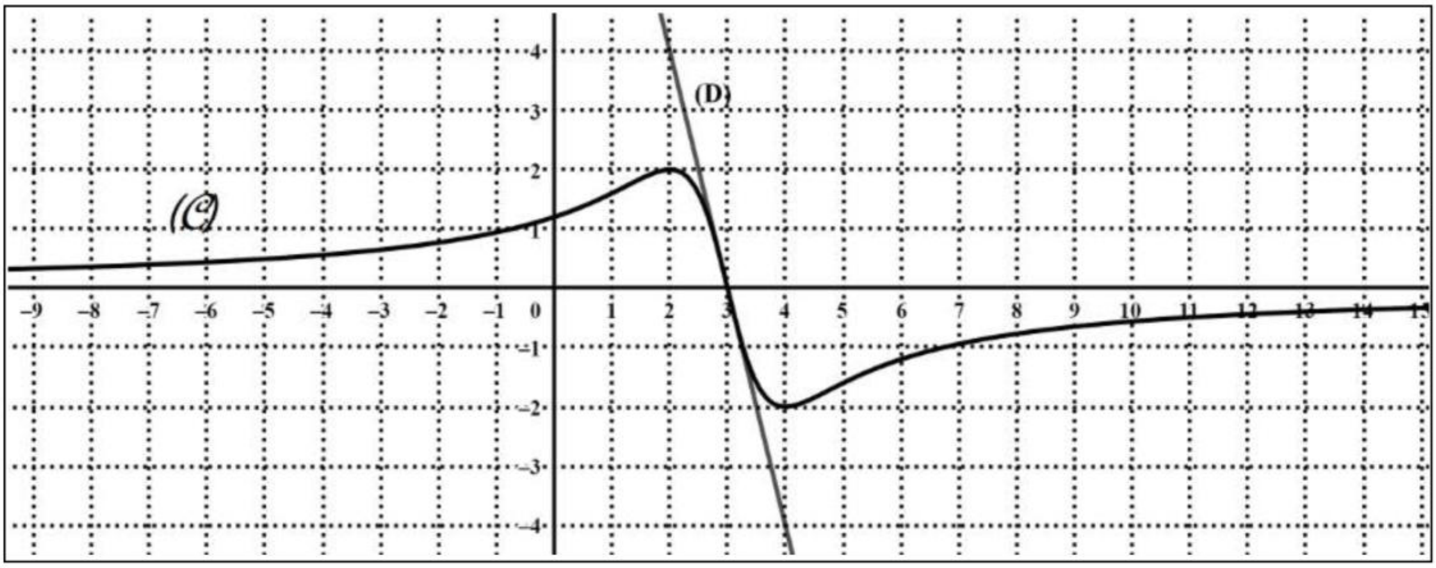
ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$.

ج) ماهي نهاية المتتالية (u_n)؟

4) أحسب بدلالة n المجموعين S_n و S'_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

تمرين 2:

في الشكل المرفق التمثيل البياني $(\mathcal{C})$ للدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$، (Δ) مماس لـ $(\mathcal{C})$ عند النّقطة $A(3;0)$



1) عيّن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)}$

2) عيّن معادلة المستقيم المقارب الأفقي.

3)أدرس وضعية (C) بالنسبة لمحور الفواصل ثم استنتج اشارة f.

4)عيّن $f'(2)$ وشكل جدول تغيرات الدّالة f.

5)عيّن $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ ثم أكتب معادلة (Δ).

6)ناقش بيانيًا حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة: $f(x)=m$

تمرين 3:

نعتبر الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^2+5x+10}{x+2}$

ليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

ب- أحسب $\lim_{\substack{x\to -2\\ >}} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to -2\\ <}} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيًا.

2) أ- عيّن الأعداد الحقيقة a ، b ، c حيث من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2\}$: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$

ب- بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C).

جـ- أدرس وضعية المنحني (C) بالنسبة للمستقيم (Δ).

3) أ- بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2\}$ فإنّ: $f'(x)=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$

ب- أدرس اتجاه تغير الدّالة f على مجالي مجموعة تعريفها ،ثم شكّل جدول تغيراتها.

4) أكتب معادلة المماس (T)لمنحني (C) عند النّقطة ذات الفاصلة 2.

5) بيّن أنّ النقطة $\Omega(-2;1)$ هي مركز تناظر للمنحني (C).

6) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحني (C).

7) نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=\frac{x^2+5|x|+10}{|x|+2}$ و (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ- بيّن أنّ g دالة زوجية.

ب-اشرح كيفية انشاء المنحني (C_g) اعتمادا على المنحني (C) ثم أنشئه.

بالتّوفيق الأستاذ: بوشاشية وليد

تصحيح امتحان الفصل I   ت3 د

ت1:

1) قيمة α:

$\frac{1}{5}\alpha + \frac{4}{5} = \alpha$

$\alpha + 4 = 5\alpha$

$4\alpha = 4$ ومنه $\boxed{\alpha = 1}$

2) حساب الحدود:

$U_1 = \frac{1}{2}(3) + \frac{4}{5} = \frac{3}{2} + \frac{4}{5} = \frac{15+8}{10} = \frac{23}{10}$

$U_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{23}{10}\right) + \frac{4}{5} = \frac{23}{20} + \frac{16}{20} = \frac{39}{20}$

3) البرهان بالتراجع: $U_n > 1$

• التحقق من صحة $P(0)$

محققة $U_0 > 1 \to 3 > 1$

• نفرض صحة $P(n)$ ولنثبت صحة $P(n+1)$

لدينا $U_n > 1$

$\frac{1}{5}U_n > \frac{1}{5}$

$\frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5} > 1$

ومنه $\boxed{U_{n+1} > 1}$

اذن $P(n)$ محققة من أجل كل n طبيعي

• اتجاه تغير (U_n):

$U_{n+1} - U_n = \frac{\alpha+4}{5} - \frac{5U_n}{5}$

$= \frac{-4U_n + 4}{5}$

لدينا $U_n > 1$

$-4U_n < -4$

$-4U_n + 4 < 0$

وبالتالي (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

لدينا (U_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل اذن هي متقاربة.

$V_n = U_n - 1$

لدينا:

$V_{n+1} = U_{n+1} - 1$

$= \frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5} - \frac{5}{5}$

$= \frac{1}{5}U_n - \frac{1}{5}$

$= \frac{1}{5}(U_n - 1)$

$V_{n+1} = \frac{1}{5}V_n$

ومنه (V_n) هندسية

$V_0 = U_0 - 1 = 2$

كتابة الحد العام:

$V_n = V_p \cdot q^{n-p}$

$V_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$

استنتاج كتابة U_n:

$U_n = V_n + 1$

$U_n = 2\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$

نهاية (U_n):

$\lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1 = 1$

لأن: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

المجموع:

$S_n = V_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$

$= 2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\frac{4}{5}}\right)$

$= \frac{5}{2}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$

$S'_n = S_n + n + 1$

$= \frac{5}{2}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right) + n + 1$

ت2:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^-$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

$y=0$ م.م أفقي بجوار $\pm\infty$.

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

(C_f) فوق محور الفواصل $x \in]-\infty, 3[$

(C_f) تقطع محور الفواصل $x = 3$

(C_f) تحت محور الفواصل $x \in]3, +\infty[$

$-\infty$		3		$+\infty$
	$+$	0	$-$	

$f'(2) = 0$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3) = -2$

معادلة (D):

$y = f'(3)(x-3) + f(3)$

$\boxed{y = -2x + 6}$

المناقشة البيانية:

$m < -2$ لا توجد حلول.

$m = -2$ حل وحيد مضاعف

$-2 < m < 0$ حلان

$m = 0$ حل وحيد.

$0 < m < 2$ حلان

$m = 2$ حل وحيد مضاعف

$m > 2$ لا توجد حلول.

تمرين 03:

$f(x)=\frac{x^2+5x+10}{x+2}$

1) النهايات:

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

	−	−2	+

$\lim_{x\to-2^-}f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to-2^+}f(x)=+\infty$

$x=-2$ م.م. عمودي

2) الأعداد a، b، c:

$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$

$f(x)=\frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2}$

بالمطابقة:

$a=1$

$2a+b=5$

$2+b=5$

$b=3$

$2b+c=10$

$c=4$

3) المستقيم المقارب المائل:

$\lim_{|x|\to+\infty}f(x)-y$

$\lim_{|x|\to+\infty}x+3+\frac{4}{x+2}-(x+3)$

$\lim_{|x|\to+\infty}\frac{4}{x+2}=0$

4) الوضعية:

$f(x)-y$

(C_f) تحت (Δ) $]-\infty,-2[$

(C_f) فوق (Δ) $]-2,+\infty[$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-2\}$ و

$f'(x)=\frac{(2x+5)(x+2)-1(x^2+5x+10)}{(x+2)^2}$

$=\frac{2x^2+4x+5x+10-x^2-5x-10}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$

لدينا: $(x+2)^2>0$ اذن اشارة f' من اشارة البسط

$x^2+4x=0 \Rightarrow x=0$ ، $x=-4$

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
		+	0	− −	0	+	

$]-\infty,-4]$ f متزايدة تماما ؛ $]-2,0]$ f متناقصة تماما

$[-4,-2[$ f متناقصة تماما ؛ $[0,+\infty[$ f متزايدة تماما

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	5	↗	$+\infty$

معادلة المماس:

$y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}+\frac{12}{2}$

$\boxed{y=\frac{3}{4}x+\frac{9}{2}}$

مركز تناظر: $\Omega(-2,1)$

$-4-x\in\mathbb{R}-\{-2\}$

$f(-4-x)+f(x)=2$

$=-4-x+3+\frac{4}{-4-x+2}+x+3+\frac{4}{x+2}$

$=2+\frac{4}{-x-2}+\frac{4}{x+2}=2$

7) g زوجية:

$D_g=\mathbb{R}$ متناظر بالنسبة لـ 0.

$g(-x)=\frac{(-x)^2+5|-x|+10}{|-x|+2}=\frac{x^2+5|x|+10}{x+2}=g(x)$

شرح كيفية انشاء (C_g):

$g(x)=\begin{cases}f(x) & x\geq 0\\ f(-x) & x\leq 0\end{cases}$

(C_g) منطبق على (C_f)

نناظر الجزء الموجب بالنسبة لمحور التراتيب

لأن g زوجية.