مديرية التربية لولاية تيزي وزو — السنة الدراسية:2019/2018

ثانوية بوجيمع — القسم 3 ت ر

فرض محروس رقم 1 للفصل الثاني

التمرين الأول:

1. لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب : $u_0=\frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1}=1+\sqrt{u_n-1}$

أ. برهن بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n فان : $1\langle u_n \langle 2$

ب .أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة واستنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة نحو نهاية يطلب تعيينها.

2. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n=\ln(u_n-1)$

أ. اثبت ان المتتالية (v_n) هندسية اساسها q و حدها الاول v_0 .

ب. اكتب v_n بدلالة n و استنتج عبارة u_n بدلالة n . ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ من جديد

ج. أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=v_0+v_1+.....+v_n$

د. استنتج حساب الجداء P_n حيث: $P_n=(u_0-1)(u_1-1)......(u_n-1)$

التمرين الثاني:

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $5x-6y=3........(E)$

1) أ) بين أن إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : x مضاعف ل 3.

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

جـ) استنتج حلول الجملة (S) : $\begin{cases} x\equiv -1[6] \\ x\equiv -4[5] \end{cases}$.

2) a و b عددان طبيعيان حيث : $a=\overline{1\alpha0\alpha00}$ في النظام ذي الأساس 3 و $b=\overline{\alpha\beta0\alpha}$ في النظام ذي الأساس 5.

- عين α و β حتى تكون الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (E).

انتهى — بالتوفيق للجميع

الحل : **1) لتكن المتتالية العددية** (u_n) **المعرفة على** $\mathbb{N}$ **ب :** $u_0=\frac{3}{2}$ **و من أجل كل عدد طبيعي** n $u_{n+1}=1+\sqrt{u_n-1}$

أ. برهان بالتراجع أن : من اجل كل عدد طبيعي n **:** $1<u_n<2$ **نسمي** $P(n)$ الخاصية : **من اجل كل عدد طبيعي** n: $1<u_n<2$

*) **نتأكد من صحة** $P(0)$: لدينا: $u_0=\frac{3}{2}$ منه: $1<u_0<2$ أي: $P(0)$ صحيحة

) نفرض صحة $P(n)$ أي أن: $1<u_n<2$ *) **نبرهن صحة** $P(n+1)$ أي أن: $1<u_{n+1}<2$

لدينا: $1<u_n<2$ **منه :** $1-1<u_n-1<2-1$ أي: $0<u_n-1<1$ منه: $\sqrt{0}<\sqrt{u_n-1}<\sqrt{1}$ اذن: $0+1<\sqrt{u_n-1}+1<1+1$

منه : $1<u_{n+1}<2$ أي: $P(n+1)$ صحيحة إذن: **من اجل كل عدد طبيعي** n **:** $1<u_n<2$

ب .إثبات أن المتتالية (u_n) **متزايدة**

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n-1}+1-u_n=\sqrt{u_n-1}-(u_n-1)=\frac{\left(\sqrt{u_n-1}\right)^2-(1-u_n)^2}{\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)}=\frac{-u_n^2+3u_n-2}{\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)}$

لدينا: $\sqrt{u_n-1}>0$ و $u_n-1>0$ منه: $\sqrt{u_n-1}+u_n-1>0$ منه : اشارة $u_{n+1}-u_n$ هي نفس اشارة $-u_n^2+3u_n-2$

ـ دراسة اشارة $-x^2+3x-2$ *) **حساب المميز:** $\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times(-1)(-2)=1$

$\Delta>0$ منه لكثير الحدود جذران هما: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3-1}{-2}=2$ و $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3+1}{-2}=1$

جدول اشارة $-x^2+3x-2$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$-x^2+3x-2$		-	0	+	0	-	

بما أن: $1<u_n<2$

فإن: $u_{n+1}-u_n>0$ منه : **المتتالية** (u_n) **متزايدة**

* **) استنتاج ان المتتالية** (u_n) **متقاربة نحو نهاية يطلب تعيينها.**

بما أن: المتتالية (u_n) **متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 2 فإنها متقاربة و** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$

2) لتكن المتتالية (v_n) **المعرفة على** $\mathbb{N}$ **ب:** $v_n=\ln(u_n-1)$

أ) اثبات ان المتتالية (v_n) **هندسية اساسها** q **و حدها الاول** v_0 **.**

لدينا: $v_{n+1}=\ln(u_{n+1}-1)=\ln\left(\sqrt{u_n-1}+1-1\right)=\ln\left(\sqrt{u_n-1}\right)=\frac{1}{2}\ln(u_n-1)=\frac{1}{2}v_n$

منه: (v_n) **متتالية هندسية اساسها** $q=\frac{1}{2}$ و حدها الأول: $v_0=\ln(u_0-1)=\ln\left(\frac{3}{2}-1\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2$

ب)كتابة v_n **بدلالة** n **: لدينا:** (v_n) **متتالية هندسية حدها الأول** v_0 **منه:** $v_n=v_0q^n=-\ln 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

) **استنتاج عبارة u_n **بدلالة** n **: لدينا :** $v_n=\ln(u_n-1)$ **منه:** $e^{v_n}=u_n-1$ اذن: $u_n=e^{v_n}+1=e^{-\ln 2\left(\frac{1}{2}\right)^n}+1$

***)**حساب** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ **من جديد : لدينا :** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^{-\ln 2\left(\frac{1}{2}\right)^n}+1\right)=1+1=2$

لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^{-\ln 2\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right)=e^0=1$ و $q=\frac{1}{2}<1$

ج. حساب المجموع S_n **حيث:** $S_n=v_0+v_1+.....+v_n$

$$S_n=v_0+v_1+....v_n=v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=-\ln 2\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=-2\ln 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

د. استنتاج حساب الجداء P_n حيث: $P_n=(u_0-1)(u_1-1)......(u_n-1)$

لدينا: $P_n=(u_0-1)(u_1-1)........(u_n-1)=\left(e^{v_0}+1-1\right)\left(e^{v_1}+1-1\right).....\left(e^{v_n}+1-1\right)$

منه: $P_n=\left(e^{v_0}\right)\left(e^{v_1}\right).....\left(e^{v_n}\right)=e^{v_0+v_1+....+v_n}=e^{S_n}$

التمرين الثاني:نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $5x-6y=3........(E)$

1) أ) بيان أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن: x مضاعف ل 3.

لدينا: $5x-6y=3$ تكافئ $5x=6y+3$ تكافئ $5x=3(2y+1)$

لدينا: 3 يقسم $5x$ و 3 و 5 أوليان فيما بينهما منه: 3 يقسم x (حسب مبرهنة قوص) و بالتالي: x مضاعف 3

ب) استنتاج حلا خاصا للمعادلة (E): بفرض $x=3$ نجد: $y=\frac{5\times3-3}{6}=2$ اذن: $(3;2)$ حلا خاصا للمعادلة (E)

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E). لدينا: $\begin{cases}5x-6y=3\\5\times3-6\times2=3\end{cases}$ بالطرح طرف لطرف نجد: $5(x-3)=6(y-2)$ (*)

و لدينا: 6 يقسم $5(x-3)$ و 6 و 5 أوليان فيما بينهما منه حسب قوص 6 يقسم $x-3$ اذن: $x-3=6k; k\in\mathbb{Z}$ ومنه: $x=6k+3$

بالتعويض في (*) نجد: $5\times6k=6(y-2)$ اذن: $y=5k+2$ و بالتالي: $S=\{(6k+3;5k+2);k\in\mathbb{Z}\}$

جـ) استنتاج حلول الجملة (S): $\begin{cases}x\equiv-1[6]\\x\equiv-4[5]\end{cases}$.

$\begin{cases}x\equiv-1[6]\\x\equiv-4[5]\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x=6m-1\\x=5n-4\end{cases}$ أي: $\begin{cases}x\equiv-1[6]\\x\equiv-4[5]\end{cases}$ اذن: $6m-1=5n-4$ و بالتالي: $5n-6m=3$ ومنه: $n=6k+3$

ينتج: $n=6k+3$ ومنه: $x=5(6k+3)-4=30k+11; k\in\mathbb{Z}$

2) a و b عددان طبيعيان حيث: $a=\overline{1\alpha0\alpha00}$ في النظام ذي الأساس 3 و $b=\overline{\alpha\beta0\alpha}$ في النظام ذي الأساس 5.

- تعيين α و β حتى تكون الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (E).

لدينا: $a=\overline{1\alpha0\alpha00}^3=1\times3^5+\alpha\times3^4+\alpha\times3^2=243+81\alpha+9\alpha=90\alpha+243$

و لدينا: $b=\overline{\alpha\beta0\alpha}^5=\alpha\times5^3+\beta\times5^2+\alpha\times5^0=125\alpha+25\beta+\alpha=126\alpha+25\beta$ مع: $\alpha\leq2$ و $\beta\leq4$

بما أن: الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (E) منه: $5a-6b=3$ و بالتالي: $5(90\alpha+243)-6(126\alpha+25\beta)=3$ ينتج:

$1215+450\alpha-756\alpha-150\beta=3$ اذن: $-306\alpha-150\beta=-1212$ بالتقسيم على -3 نجد: $102\alpha+50\beta=404$

و بالتالي: $(\alpha;\beta)=(2;4)$ حل للمعادلة.