الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية
مؤسسة التربية و التعليم الخاصة
أوبينياتر
ابتدائي متوسط ثانوي اقامة

المستوى: السنة الثالثة تسيير و اقتصاد فيفري 2021
اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات المدة: ساعتين

التمرين الأول

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{3u_n+4}{9}$.

1) أ- أحسب u_1 و $_2$ و $_3$ ثم بين أن (u_n) ليست حسابية ولا هندسية.

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن $_n > \frac{2}{3}$.

ج- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية، يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\right]$.

جـ) ما هي نهاية المتتالية (u_n)؟

3) احسب، بدلالة n، المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

التمرين الثاني

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x) = x^3 - 3x - 3$

1) ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

2) بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 < \alpha < 3$.

3) استنتج إشارة $g(x)$.

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ بالعبارة: $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة تعريفها.

2) بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ فان: $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) بين ان $f(\alpha) = 3\alpha + 1$ ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$.

5) ا) بين ان المستقيم (d) الذي معادلته $y = 2x + 1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .

6) اوجد فواصل النقط من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) .

7) ارسم المستقيمات المقاربة والمنحني (C_f) .

التصحيح النموذجي

التمرين 1:

1) حساب الحدود :

$u_1 = \frac{7}{9}$ و $u_2 = \frac{57}{81}$ و $u_3 = \frac{55}{81}$

تبيان أن (u_n) ليست حسابية ولا هندسية

$u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$ ومنه (u_n) ليست حسابية.

$\frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_2}{u_1}$ ومنه (u_n) ليست هندسية.

ب) البرهان بالتراجع :

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$

لدينا: $u_0 = 1 > \frac{2}{3}$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

- نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n > \frac{2}{3}$ (فرضية التراجع)
- ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $\boxed{u_{n+1} > \frac{2}{3}}$.

البرهان: حسب فرضية التراجع، لدينا: $u_n > \frac{2}{3}$

ومنه: $\frac{3}{9}u_n > \frac{2}{9}$

وعليه: $\frac{3}{9}u_n + \frac{4}{9} > \frac{2}{9} + \frac{4}{9}$

أي: $\boxed{u_{n+1} > \frac{2}{3}}$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n > \frac{2}{3}$.

بـتبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة:

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

- لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{9}u_n + \frac{4}{9} - u_n = \left(\frac{3}{9} - 1\right)u_n + \frac{4}{9} = -\frac{6}{9}u_n + \frac{4}{9}$
- ولدينا من جهة أخرى: $u_n > \frac{2}{3}$

ومنه: $-\frac{6}{9}u_n < -\frac{4}{9}$

وعليه: $-\frac{6}{9}u_n + \frac{4}{9} < -\frac{4}{9} + \frac{4}{9}$

أي: $\boxed{u_{n+1} - u_n < 0}$، إذن: (u_n) متناقصة تماما.

2) لدينا: (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

لتبيان أن (v_n) متتالية هندسية، يطلب تحديد أساسها وحدها الأول:

نكتب v_{n+1} بدلالة v_n.

لدينا: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$، ومنه:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{3}{9}u_n + \frac{4}{9} - \frac{2}{3} = \frac{3}{9}u_n - \frac{2}{9} = \frac{3}{9}u_n - \frac{3\times 2}{9\times 3} = \frac{3}{9}\left(u_n - \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{9}v_n$$

أي: $\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n}$،

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = \frac{1}{3}}$ وحدها الأول $\boxed{v_0 = u_0 - \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}}$.

بـكتابة عبارة v_n بدلالة n:

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{v_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n}$.

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\right]$:

لدينا: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ ومنه: $u_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{3}$، إذن: $\boxed{u_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\right]}$

جـ) حساب نهاية المتتالية (u_n):

لدينا: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ (لأن $-1 < \frac{1}{3} < 1$)، إذن: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}\times 2 = \frac{2}{3}}$.

3) حساب، بدلالة n، المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$:

لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \left(v_0 + \frac{2}{3}\right) + \left(v_1 + \frac{2}{3}\right) + \left(v_2 + \frac{2}{3}\right) + \cdots + \left(v_2 + \frac{2}{3}\right)$

ومنه: $S_n = (v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_2) + \frac{2}{3}(n - 0 + 1) = v_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{3}}\right) + \frac{2}{3}(n+1)$

وعليه: $S_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}\right) + \frac{2}{3}(n+1) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{2}{3}(n+1)$.

التمرين 2

I) $g(x) = x^3 - 3x - 3$

1) دراسة تغيرات الدالة g :

* النهايات: $D_g =]-\infty;+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

* اتجاه التغير:

$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1)$ ومنه $g'(x) = 0$ معناه $x = 1$ أو $1-$ و $x = -1$

$g(x) \succ 0$ معناه $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ وأيضا $g'(x) \prec 0$ معناه $x \in]-1;1[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

2) اثبات ان للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α حيث $2 \prec \alpha \prec 3$:

الدالة g مستمرة على المجال $]2;3[$ و $g(2)=-1$ و $g(3)=15$ أي $g(2)\times g(3) \prec 0$ اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة نستنتج ان للمعادلة $g(x)=0$ على الأقل حل في المجال $]2;3[$ ومن خلال جدول التغيرات ينتج ان الدالة g متزايدة تماما على المجال $]2;3[$ اذن فللمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا في المجال $]2;3[$.

3) استنتاج إشارة $g(x)$: من خلال جدول التغيرات نلاحظ ان المنحني يقع تحت محور

الفواصل لما $x\in]-\infty;\alpha[$ ومنه نستنتج ان $g(x)\prec 0$ معناه $x\in]-\infty;\alpha[$ و كذلك المنحني يقع فوق محور الفواصل لما $x\in]\alpha;+\infty[$ أي $g(x)\succ 0$ معناه $x\in]\alpha;+\infty[$.

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـــ : $f(x)=\dfrac{2x^3+x^2+2}{x^2-1}$.

1) حساب النهايات: $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+x^2+2}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty \quad , \quad \lim_{\substack{x\to-1\\ \prec}} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ \succ}} f(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty \quad , \quad \lim_{\substack{x\to1\\ \prec}} f(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty \quad , \quad \lim_{\substack{x\to1\\ \succ}} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty \ ,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+x^2+2}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty \ .$$

2) اثبات انه من اجل كل $x\in D_f$ فان : $f'(x)=\dfrac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$:

$$f'(x)=\left(\frac{2x^3+x^2+2}{x^2-1}\right)'=\frac{(2x^3+x^2+2)'(x^2-1)-(2x^3+x^2+2)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{(6x^2+2x)(x^2-1)-(2x^3+x^2+2)\times 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{6x^4-6x^2+2x^3-2x-4x^4-2x^3-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{2x^4-6x^2-6x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x(x^3-3x-3)}{(x^2-1)^2}=\frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$$

3) دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

لنا $f'(x)=\dfrac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$ أي ان إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $xg(x)$:

جدول الإشارة:

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
x		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	$\Vert$	$-$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f'(x)=xg(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

من خلال هذا الجدول نستنتج ان الدالة f متزايدة تماما على المجموعة $]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup]\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجموعة $]0;1[\cup]1;\alpha[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4) اثبات ان $f(\alpha)=3\alpha+1$ وتعيين حصر لـ $f(\alpha)$:

$$f(\alpha)-3\alpha-1=\frac{2\alpha^3+\alpha^2+2}{\alpha^2-1}-3\alpha-1$$
$$=\frac{2\alpha^3+\alpha^2+2-3\alpha^3+3\alpha-\alpha^2+1}{\alpha^2-1}=\frac{-\alpha^3+3\alpha+3}{\alpha^2-1}$$
$$=-\frac{\alpha^3-3\alpha-3}{\alpha^2-1}=-\frac{g(\alpha)}{\alpha^2-1}=0$$

لان $g(\alpha)=0$

اذن نجد $f(\alpha)-3\alpha-1=0$ ومنه $f(\alpha)=3\alpha+1$.

تعيين الحصر: لنا $2\prec\alpha\prec3$ ومنه $6\prec3\alpha\prec9$ ومنه $7\prec3\alpha+1\prec10$ أي $7\prec f(\alpha)\prec10$.

الرسم