

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (06 نقاط)

(u_n) متتالية حسابية حدها الاول $u_0 = 2$ و $u_0 + 5u_1 + 5u_3 = 102$

(1) بين أن : $u_1 + u_3 = 20$ و استنتج u_2

(2) أحسب u_1 و استنتج أن أساس المتتالية (u_n) هو 4

(3) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(4) أ/ أكتب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

ب/ عين قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = 162$

التمرين الثاني: (06 نقاط)

(1) أ/ عين بواقي القسمة الاقليدية على 5 للعدد 2^n من أجل قيم n التالية : 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 .

ب/ استنتج بواقي القسمة الاقليدية على 5 للعدد 2^n من أجل كل عدد طبيعي n

(2) عين باقي قسمة 17 على 5 و استنتج باقي قسمة العدد 17^{4k} على 5 حيث k عدد طبيعي

(3) استنتج أن العدد $6 + 2^{4k+3} + 17^{4k}$ يقبل القسمة على 5 حيث k عدد طبيعي

(4) عين باقي القسمة الاقليدية على 5 للعدد : $2017^{2016} - 2^{49} + 61^{1954}$

التمرين الثالث: (08 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{2-x}{x-1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي مزود بمعلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بين أنه من أجل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن : $f(x) = -1 + \frac{a}{x-1}$ حيث a عدد حقيقي يطلب تعيينه

(2) أ/ عين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

ب/ استنتج المستقيمان المقاربان للمنحني (C_f)

(3) أحسب $f'(x)$ وشكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة $A(2;0)$.

(5) أحسب $f(0)$ ، أنشئ المماس (T) ، المستقيمين المقاربين ثم المنحني (C_f)

(6) أ/ أنشئ في نفس المعلم السابق المستقيم ذو المعادلة $y = x - 2$.

ب/ حل في \mathbb{R} ، بيانيا المتراجحة $f(x) \leq x - 2$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (06 نقاط)

a, b, c ثلاث أعداد صحيحة حيث $b \equiv 2[5]$ ، $a-b \equiv 2[5]$ ، $2a+c \equiv 4[5]$

(1) بين أن : $a \equiv 4[5]$ و $c \equiv -4[5]$

(2) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $a \times b - 3c$ على 5

(3) أ/ بين أن : $a \equiv -1[5]$ و $c \equiv 1[5]$

ب/ أثبت أن العدد $3 \times a^{2017} + 5 \times c^{1438} + 13$ مضاعف لـ 5

ج/ عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $a^2 + b^2 + c^2 + n \equiv 4[5]$ و $3 \leq n \leq 28$

التمرين الثاني: (06 نقاط)

$(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية ذات اساس سالب حيث : $v_0 = 2$ و $v_2 = 18$

(1) أحسب v_1 واستنتج اساس المتتالية (v_n)

(2) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $v_n = 2 \times (-3)^n$

(3) أ/ أحسب $(-3)^8$ و استنتج أن العدد 13122 حد من حدود المتتالية (v_n)

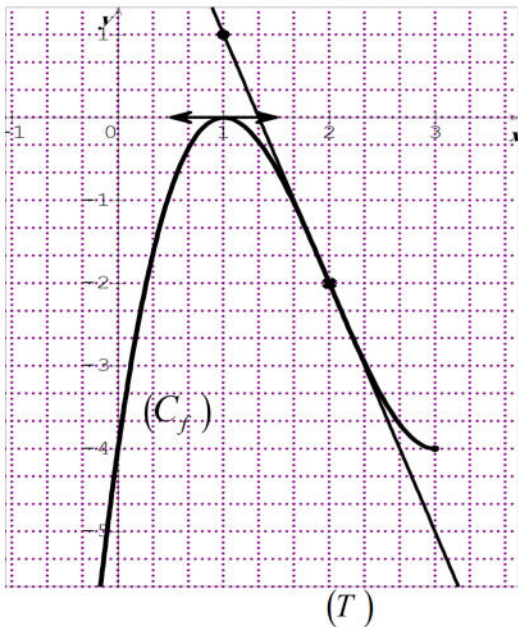
ب / أحسب قيمة المجموع : $2 + (-6) + 18 + \dots + 13122$

(4) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $-1 - (-3)^n$ مضاعف لـ 4

التمرين الثالث : (08 نقاط)

f دالة معرفة على \mathbb{R} و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي مزود بمعلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

الجزء 1 : المنحني المقابل هو جزء من المنحني (C_f) ، والمستقيم (T) هو مماس للمنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2



بإستعمال المنحني (C_f) :

(1) عين $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f'(1)$ و $f'(2)$

(2) أكتب معادلة للمماس (T)

(3) ماذا تمثل النقطة ذات الفاصلة 2 بالنسبة (C_f) ، مع التعليل

الجزء 2 : نفرض أن : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

بإستعمال العبارة $f(x)$:

(1) أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب / ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

(2) تحقق أن النقطة ذات الفاصلة 2 نقطة انعطاف للمنحني (C_f)

(3) أ/ أنشر العبارة : $(x-1)(x^2 - 5x + 4)$

(4) ب/ عين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل، ثم أكمل إنشاء المنحني (C_f)

| العلامة | | عناصر الإجابة |
|---------|--------|---|
| كاملة | مجزأة | |
| | | الموضوع الثاني |
| | | التمرين الأول: (06 نقاط) |
| 0.5 ن | 0.5+ ن | (1) نبين أن : $a \equiv 4[5]$ و $c \equiv -4[5]$ لدينا $b \equiv 2[5]$ و $a - b \equiv 2[5]$ ومنه خاصية الجمع نجد $a \equiv 4[5]$ لدينا $a \equiv 4[5]$ إذن $-2a \equiv -8[5]$ وبمأن $2a + c \equiv 4[5]$ فحسب خاصية الجمع نجد $c \equiv -4[5]$ |
| 0.5 ن | 0.5+ ن | (2) تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد $a \times b - 3c$ على 5 لدينا $a \times b \equiv 3[5]$ و $-3c \equiv 2[5]$ فحسب خاصية الجمع نجد $a \times b - 3c \equiv 0[5]$ ومنه باقي القسمة الاقليدية للعدد $a \times b - 3c$ على 5 هو 0 |
| 0.5 ن | 0.5+ ن | (3) أ/ نبين أن : $a \equiv -1[5]$ و $c \equiv 1[5]$ لدينا $a \equiv 4[5]$ ومنه $a \equiv 4 - 5[5]$ اي $a \equiv -1[5]$ لدينا $c \equiv -4[5]$ ومنه $c \equiv -4 + 5[5]$ اي $c \equiv 1[5]$ ب/ أثبات أن العدد $3 \times a^{2017} + 5 \times c^{1438} + 13$ مضاعف لـ 5 لدينا $a \equiv -1[5]$ وبالتالي $a^{2017} \equiv (-1)^{2017} [5]$ اي $a^{2017} \equiv -1[5]$ و لدينا $c \equiv 1[5]$ وبالتالي $c^{1438} \equiv 1[5]$ و عليه نجد $3 \times a^{2017} + 5 \times c^{1438} + 13 \equiv 3 \times (-1) + 5 \times 1 + 13 [5]$ أي $3 \times a^{2017} + 5 \times c^{1438} + 13 \equiv 15 [5]$ ومنه $3 \times a^{2017} + 5 \times c^{1438} + 13 \equiv 0 [5]$ لان $15 \equiv 0 [5]$ حسب خاصية التعدي |
| 06 ن | 1.5 ن | ج/ تعين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $a^2 + b^2 + c^2 + n \equiv 4 [5]$ و $3 \leq n \leq 28$ لدينا $a^2 \equiv 1 [5]$ و $b^2 \equiv 4 [5]$ و $c^2 \equiv 1 [5]$ ومنه $a^2 + b^2 + c^2 + n \equiv 4 [5]$ معناه $6 + n \equiv 4 [5]$ معناه $n \equiv -2 [5]$ معناه $n \equiv 3 [5]$ معناه $n \equiv 8 [5]$ معناه $n \equiv 13 [5]$ معناه $n \equiv 18 [5]$ معناه $n \equiv 23 [5]$ معناه $n \equiv 28 [5]$ وبمأن $3 \leq n \leq 28$ فإن قيم العدد الطبيعي هي 3 ، 8 ، 13 ، 18 ، 23 و 28 |
| | | التمرين الثاني: (06 نقاط) |
| | | (1) حساب v_1 واستنتاج q اساس المتتالية (v_n) — حسب الوسط الهندسي للحدين v_0 و v_2 لدينا $v_1^2 = v_0 \times v_2$ أي $v_1^2 = 36$ وبمأن اساس المتتالية سالب فإن $v_1 = -6$ |
| 01 ن | 0.5 ن | — لدينا $q = \frac{v_1}{v_0}$ وبمأن $v_0 = 2$ و $v_1 = 6$ فإن $q = -3$ |
| 06 ن | 0.5 ن | (2) نبين أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $v_n = 2 \times (-3)^n$ عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) تكتب : $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه $v_n = 2 \times (-3)^n$ لان $q = -3$ و $v_0 = 2$ |
| 0.5 ن | 01 ن | (3) أ/ حساب $(-3)^8$ واستنتاج أن العدد 13122 حد من حدود المتتالية (v_n) — $(-3)^8 = 6561$ |
| 01 ن | 01 ن | — $v_n = 13122$ يعني $v_n = 2 \times (-3)^n$ يعني $n = 8 \in \mathbb{N}$ |
| | | ب / حساب قيمة المجموع : $2 + (-6) + 18 + \dots + 13122$ لدينا $2 + (-6) + 18 + \dots + 13122 = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_8$ اي |

ن 1.5

$2+(-6)+18+\dots+13122=9642$ ومنه $2+(-6)+18+\dots+13122=\frac{v_0}{q-1}\left((-3)^9-1\right)$

(4) نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $-1-(-3)^n$ مضاعف لـ 4

من أجل $n=0$ لدينا $-1-(-3)^0=0$ أي 0 مضاعف لـ 4 محققة

نفرض أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $-1-(-3)^n$ مضاعف لـ 4 (فرضية التراجع)

ونبرهن أن $-1-(-3)^{n+1}$ مضاعف لـ 4

لدينا فرضاً $-1-(-3)^n$ مضاعف لـ 4 يعني $-1-(-3)^n=4k$ حيث $(k \in \mathbb{N})$

ومنه $-1-(-3)^{n+1}=-3(-3)^n-1=-3(-3)^n+3-3-1$ أي

$-1-(-3)^{n+1}=-3((-3)^n-1)-4=-3(4k)-4=4(-3k-1)$

وعليه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $-1-(-3)^n$ مضاعف لـ 4

التمرين الثالث : (08 نقاط)**الجزء 1 : بإستعمال المنحني (C_f)**

(1) $f(1)=0$ ، $f(2)=-2$ ، $f'(1)=0$ و $f'(2)$ هو معامل توجيه المماس عند النقطة ذات

الفاصلة 2 والذي يشمل النقطتين ذات الإحداثيات $(1;1)$ و $(2;-2)$ ومنه $f'(2)=-3$

(2) كتابة معادلة للمماس (T)

أي $y = -3x + 4$ $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

(3) ماذا تمثل النقطة ذات الفاصلة 2 بالنسبة (C_f)

بمان المنحني (C_f) يخترق مماسه (T) في النقطة ذات الفاصلة 2 فإن هذه النقطة تمثل نقطة

انعطاف للمنحني (C_f)

الجزء 2 : نفرض أن $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

بإستعمال العبارة $f(x)$:

(1) أ/ حساب نهايتي الدالة f : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

ب / دراسة اتجاه تغير الدالة f

الدالة f قابلة للاشتقاق على $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ و

$\Delta = 36$ ، $x_1 = 1$ ، $x_2 = 3$

الدالة f متزايدة تماماً على المجالين $]-\infty; 1]$ و $[3; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على المجال $[1; 3]$

جدول تغيرات الدالة f

أ/ نشر العبارة : $(x-1)(x^2-5x+4)$

..... $(x-1)(x^2-5x+4) = x^3 - 6x^2 - 9x - 4$

ب/ تعيين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل

$f(x) = 0$ يعني $(x-1)(x^2-5x+4) = 0$

يعني $x = 1$ أو $x = 4$ ومنه $(C_f) \cap (xx') = \{(1;0); (4;0)\}$

(2) نبين أن النقطة ذات الفاصلة 2 نقطة انعطاف للمنحني (C_f)

الدالة قابلة للاشتقاق مرتين على $f''(x) = 6x - 12$ و

$f''(x) = 0$ يعني $x = 2$

ن 08

0.25

3×

ن 0.5+

ن 0.5

ن 0.5

ن 0.5

2×

ن 0.5

ن 01

ن 0.5

ن 0.5

ن 0,75

ن 01

– الدالة " f موجبة على المجال $[2; +\infty[$ وسالبة على المجال $] -\infty; 2]$
 اذن : بما ان الدالة " f تنعدم عند 2 وتغير اشارتها عند 2 فإن النقطة ذات الفاصلة 2 نقطة انعطاف للمنحني

(C_f)

أكمال إنشاء المنحني (C_f)



ن 0,5

الموضوع الاول

التمرين الأول: (06 نقاط)

(u_n) متتالية حسابية حدها الاول $u_0 = 2$ و $u_0 + 5u_1 + 5u_3 = 102$

(1) نبين أن : $u_1 + u_3 = 20$ و استنتاج u_2

0,75 $u_0 + 5u_1 + 5u_3 = 102$ يعني $5(u_1 + u_3) = 100$ اي $u_1 + u_3 = 20$

0,75 حسب الوسط الحسابي للحددين u_1 و u_3 لدينا $u_1 + u_3 = 2u_2$ اي $u_2 = 10$

(2) حساب u_1 و استنتاج أن أساس المتتالية (u_n) هو 4

0,75 حسب الوسط الحسابي للحددين u_0 و u_2 لدينا $u_0 + u_2 = 2u_1$ اي $u_1 = 6$

0,75 لدينا $r = u_1 - u_0$ أي $r = 4$

ن 01 (3) كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n

$$u_n = 2 + 4n \text{ ومنه } u_n = u_0 + nr$$

ن 01 (4) أ/ حساب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

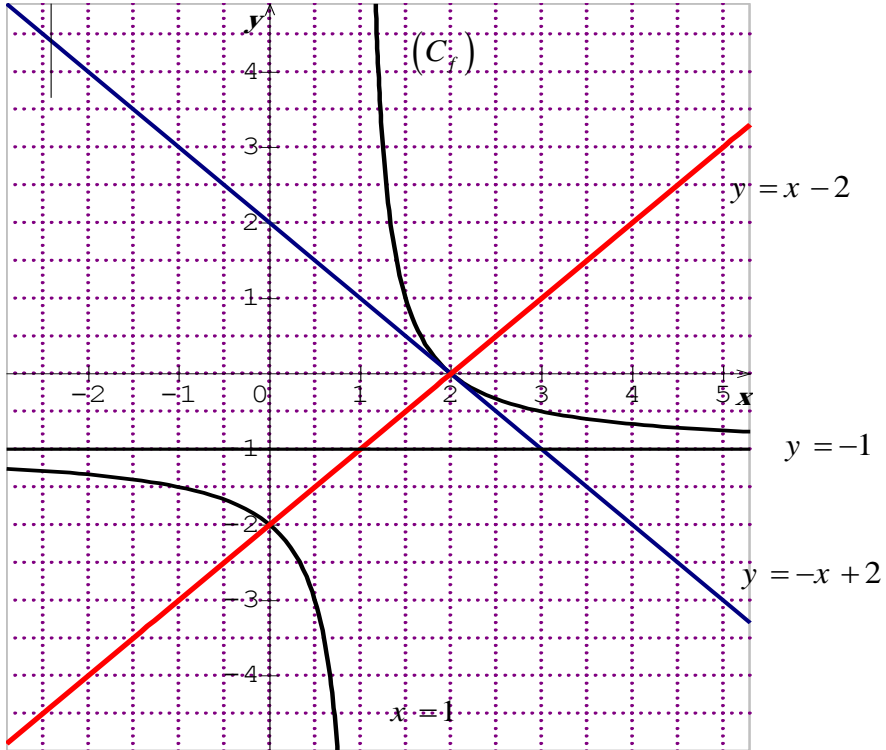
عدد الحدود هو $n+1$

$$S_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2} \text{ ومنه } S_n = 2(n+1)^2$$

ن 01 ب/ تعيين قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = 162$

$$S_n = 162 \text{ يعني } (n+1)^2 = 81 \text{ أي } n = 8 \text{ أو } n = -10 \notin \mathbb{N} \text{ مرفوض}$$

| العلامة | | عناصر الإجابة |
|---------|-------|---|
| كاملة | مجزأة | |
| 06 ن | | <p>التمرين الثاني : (06 نقاط)</p> <p>(1) أ/ <u>تعين بواقي القسمة الاقليدية على 5 للعدد 2^n من أجل قيم n التالية : 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4</u></p> $2^0 \equiv 1[5] ، 2^1 \equiv 2[5] ، 2^2 \equiv 4[5] ، 2^3 \equiv 3[5] ، 2^4 \equiv 1[5]$ <p>ومنه بواقي القسمة الاقليدية على 5 هي 1، 2، 3 و 4</p> <p>ب/ <u>استنتاج بواقي القسمة الاقليدية على 5 للعدد 2^n من أجل كل عدد طبيعي n</u></p> <p>من أجل كل عدد طبيعي k لدينا :</p> $2^{4k} \equiv 1[5] ، 2^{4k+1} \equiv 2[5] ، 2^{4k+2} \equiv 4[5] ، 2^{4k+3} \equiv 3[5]$ <p>ومنه بواقي القسمة الاقليدية على 5 للعدد 2^n من أجل كل عدد طبيعي n هي 1، 2، 3 و 4</p> <p>(2) <u>تعين باقي قسمة 17 على 5 و استنتاج باقي قسمة العدد 17^{4k} على 5 حيث k عدد طبيعي</u></p> <p>لدينا $17 \equiv 2[5]$</p> <p>بمأن $17 \equiv 2[5]$ فإن $17^{4k} \equiv 2^{4k} [5]$</p> <p>ومنه $17^{4k} \equiv 1[5]$ لان $2^{4k} \equiv 1[5]$ حسب خاصية التعدي حيث k عدد طبيعي</p> <p>(3) <u>استنتاج أن العدد $17^{4k} + 2^{4k+3} + 6$ يقبل القسمة على 5 حيث k عدد طبيعي</u></p> <p>لدينا من أجل كل k عدد طبيعي ، $17^{4k} \equiv 1[5]$ و $2^{4k+3} \equiv 3[5]$ ومنه $17^{4k} + 2^{4k+3} + 6 \equiv 10[5]$ أي</p> $17^{4k} + 2^{4k+3} + 6 \equiv 0[5]$ <p>(4) <u>تعين باقي القسمة الاقليدية على 5 للعدد : $2017^{2016} - 2^{49} + 61^{1954}$</u></p> <p>- لدينا : $61 \equiv 1[5]$ ومنه $61^{1954} \equiv 1[5]$</p> <p>- ولدينا $2017 \equiv 2[5]$ وبمأن $2016 = 4 \times 504$ (2016 من الشكل $4k$)</p> <p>ومنه $2017^{2016} \equiv 2^{4 \times 504} [5] \equiv 1[5]$ أي $2017^{2016} \equiv 1[5]$</p> <p>- ولدينا $2^{49} \equiv 2[5]$ لان $49 = 4 \times 12 + 1$ أي 49 من الشكل $4k + 1$</p> <p>وبالتالي $2017^{2016} - 2^{49} + 61^{1954} \equiv 1 - 2 + 1[5] \equiv 0[5]$</p> <p>ومنه باقي القسمة الاقليدية على 5 للعدد : $2017^{2016} - 2^{49} + 61^{1954}$ هو 3</p> <p>التمرين الثالث : (08 نقاط)</p> <p>نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{2-x}{x-1}$</p> <p>(1) <u>نبين أنه من أجل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن $f(x) = -1 + \frac{a}{x-1}$ حيث a عدد حقيقي يطلب</u></p> <p><u>تحيينه</u></p> <p>..... $f(x) = -1 + \frac{a}{x-1}$ يعني $f(x) = \frac{-x+1+a}{x-1}$ ومنه $a=1$</p> <p>و بالتالي : $f(x) = -1 + \frac{1}{x-1}$</p> <p>(2) <u>أ/ <u>تعين النهايات :</u></u></p> <p>..... $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$</p> |
| 08 ن | | |
| 01 ن | | |
| 02 ن | | |

| العلامة | | عناصر الإجابة |
|----------------------|-------|--|
| كاملة | مجزأة | |
| | | ب/ استنتاج المستقيمان المقاربان للمنحني (C_f) |
| 0,5 ن | | معادلة مستقيم مقارب للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$ |
| | | معادلة مستقيم مقارب للمنحني (C_f) $x = 1$ |
| 01 ن | | (3) حساب $f'(x)$ وتشكيل جدول تغيرات الدالة f |
| | | الدالة f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty; 1[$ و $]1; +\infty[$ و $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$ اي $f'(x) < 0$ |
| 01 ن | | ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty; 1[$ و $]1; +\infty[$ |
| | | (4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة $A(2;0)$ |
| | | $y = -x + 2$ أي $y = f'(2)(x-2) + f(2)$ |
| 0,25 0,25 01 ن | | (5) $f(0) = -2$ ، إنشاء المماس (T) ، المستقيمين المقاربين ثم المنحني (C_f) |
| | |  |
| 0,25 | | (6) أ/ إنشاء في نفس المعلم السابق المستقيم ذو المعادلة $y = x - 2$ |
| 0,75 | | ب/ حل في \mathbb{R} ، بيانيا المترابحة $f(x) \leq x - 2$ |
| | | $S = [0; 1[\cup [2; +\infty[$ |

