الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

ثانوية طهيري عبد الرحمان -الجلفة- السنة الدراسية 2021 / 2022

الإختبار الثاني في مادة: الرياضيات

المستوى : 3 رياضيات المدة: 2 ساعة

ملاحظة: كل إجابة غير واضحة أو غير مبررة لا تؤخذ بعين الإعتبار.

التمرين الأول :

نعتبر المعادلة التفاضلية (E) التالية: $y'+y=\dfrac{1}{1+e^x}\cdots(E)$.

1. جد الدالة h حل المعادلة التفاضلية (E')، والتي تأخذ القيمة 1 عند 0 حيث: $y'+y=0\cdots(E')$
2. نعتبر الدالتين f و g القابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:
   $f(0)=\ln 2$ ومن أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)=e^{-x}.g(x)$.
   أ) احسب $g(0)$.
   ب) احسب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ و $g'(x)$.
3. بين أن: f حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كان $g'(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$.
4. استنتج عبارة $g(x)$، ثم عبارة $f(x)$ بحيث تكون f حلا للمعادلة (E).

التمرين الثاني :

نعرف على $\mathbb{N}^*$ المتتاليتين (U_n) و (V_n) كما يلي: $U_n=\dfrac{n^2}{2^n}$ و $V_n=\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$.

1. بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=\frac{1}{2}$.
2. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $V_n>\frac{1}{2}$.
3. أ) عين أصغر عدد طبيعي p يحقق: إذا كان $n\geq p$ فإن $V_n<\frac{3}{4}$.
   ب) استنتج أنه إذا كان $n\geq p$ فإن: $U_{n+1}<\frac{3}{4}U_n$.
4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 5$: $S_n=U_5+U_6+\cdots+U_n$.
   أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\geq 5$ يكون: $U_n\leq(\frac{3}{4})^{n-5}\times U_5$
   ب) بين أنه من أجل كل $n\geq 5$: $S_n\leq\left[1+\frac{3}{4}+(\frac{3}{4})^2+\cdots+(\frac{3}{4})^{n-5}\right]\times U_5$
   ج) استنتج أنه من أجل كل $n\geq 5$ يكون $S_n\leq 4U_5$.
5. بين أن المتتالية $(S_n)_{n\geq 5}$ متزايدة، ثم استنتج أنها متقاربة.

← اقلب الورقة

التمرين الثالث :

الهدف من التمرين هو حساب مساحة حيز محصور بمنحنيين بين عددين.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=(1-\frac{1}{x^2})\ln x$.

(ζ_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. و(γ) المنحني الممثل للدالة $x\longmapsto \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$ في نفس المعلم.(الشكل 1)

1. حدد وضعية (ζ_f) بالنسبة إلى (γ) في المجال $]0;+\infty[$، ثم جد النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x^2})\ln x$. ماذا تستنتج بالنسبة إلى (ζ_f) و(γ)؟

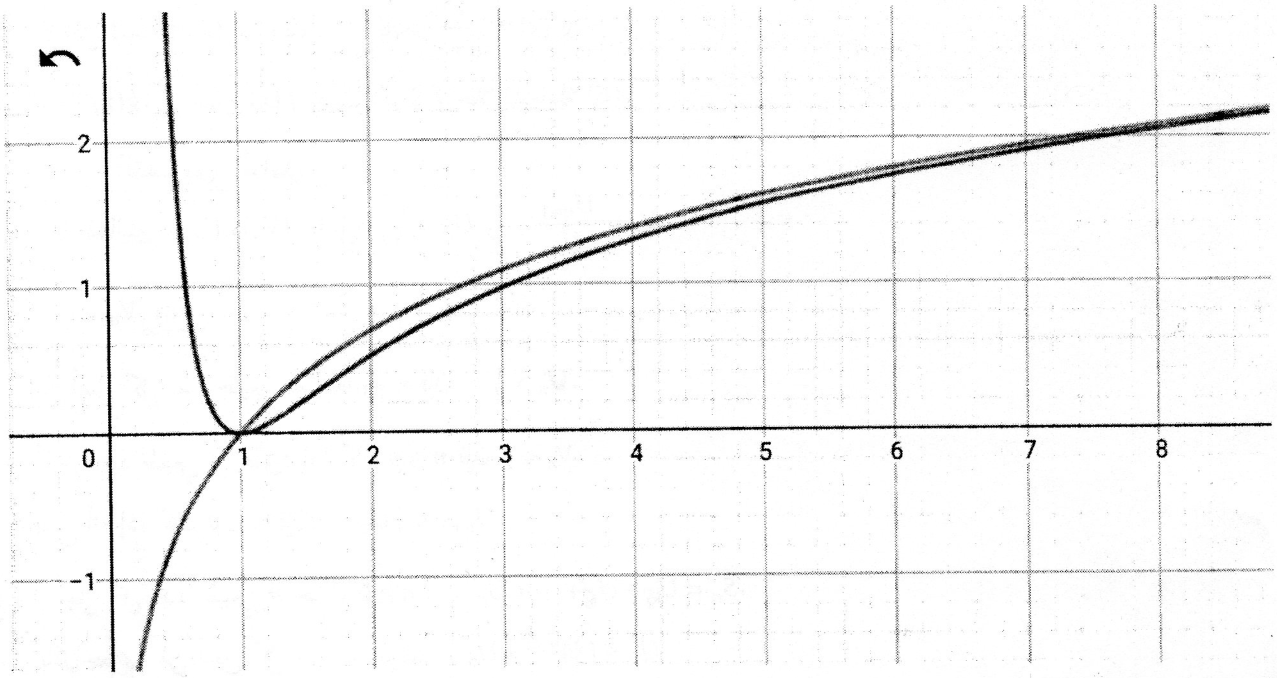
2. (ا) x عدد حقيقي حيث $x\geq 1$. باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن $\int_1^x \frac{1}{t^2}\ln(t)dt=\frac{x-1-\ln x}{x}$

(ب) تحقق أن الدالة $x\longmapsto x\ln x-x$ دالة أصلية للدالة $x\longmapsto \ln x$ على المجال $[1;+\infty[$.

(ج) استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $[1;+\infty[$.

3. α عدد حقيقي أكبر تماما من 1.

احسب بدلالة α المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (ζ_f) و(γ) والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1$ و$x=\alpha$، ثم احسب $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}A(\alpha)$.



الشكل 1

- تمنياتي لكم بالتوفيق -