الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنيـة — مديرية التربية بولاية تمنراست

امتحـــان الثلاثي الأول — السنة الدراسية : 2017/2016

شعبة : الثالثة رياضيات

اختبار في مادة الرياضـــــــيات	المـــدة : ثلاثة ساعات و نصف

التمرين الأول (4 نقاط) :

نعتبر في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية : $(E)\ :\ y'+3y=2e^{-x}$.

1- عين قيمة العدد الحقيقي a بحيث تكون الدالة g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=a.e^{-x}$ حل للمعادلة (E).

2- نعتبر المعادلة التفاضلية : $(E')\ :\ y'+3y=0$ حل المعادلة (E').

3- برهن أن الدالة k هي حل للمعادلة (E) إذا وفقط اذا كانت الدالة $(k-g)$ هي حل للمعادلة (E') .

ثم استنتج مجموعة حلول المعادلة (E).

4- عين حلا خاصا k للمعادلة (E) بحيث يكون معامل توجيه المماس للمنحنى الممثل للدالة k في النقطة ذات الفاصلة 0 يساوي -4.

التمرين الثاني (4 نقاط) :

1- أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 5^n على 7

ب- عين باقي قسمة كل من العددين 5^{1438} و 5^{2017} على 7 .

2- أثبت انه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+3$ يقبل القسمة على 7.

3- عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+5n$ قابلا للقسمة على 7 .

4- n عدد طبيعي ، نضع : $\alpha_n=n^2+n\ ,\ \beta_n=n+2$

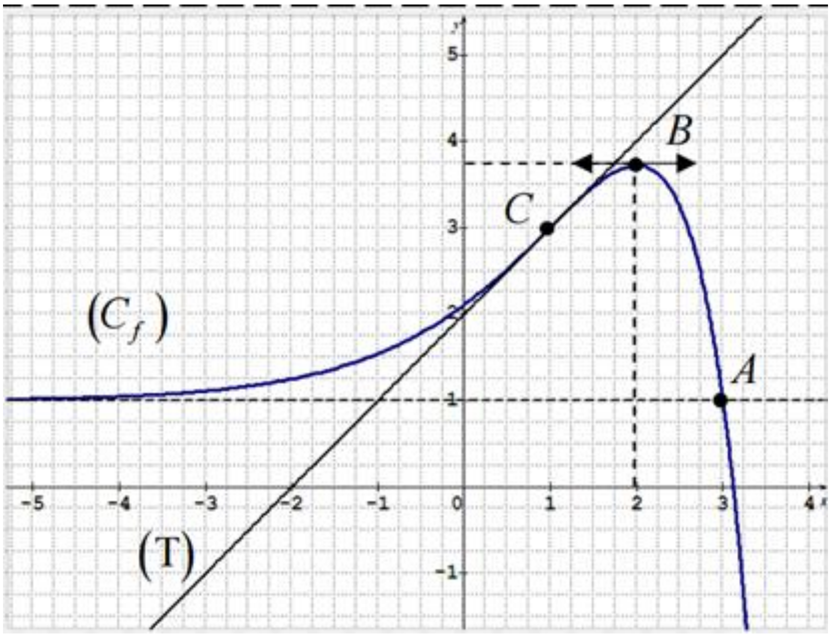
أ. تحقق أن : $n\beta_n-\alpha_n=n$

ب. أثبت أن : $PGCD(\beta_n\ ;\ \alpha_n)=PGCD(\beta_n\ ;\ n)$.

ج. استنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(\beta_n\ ;\ \alpha_n)$.

التمرين الثالث (5 نقاط) :

نعتبر الدالة f المعرفة بتمثيلها البياني (C_f) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ حيث $B(2;e+1)$ و $A(3;1)$ و $C(1;3)$ من البيان أجب عن الأسئلة التالية :



1) عين كلا من $f'(2)$ و $f'(1)$ و $f''(1)$.
2) أكتب معادلة المماس (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة C.
3) أ- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]3;+\infty[$ ثم أستنتج اشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.
ب-شكل جدول تغيرات الدالة f .
4) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=f(m)$.
5) لتكن h الدالة المعرفة على $]-\infty\,;\alpha[$ كما يلي $h(x)=f(x)-\ln[f(x)]$.
أ- أعط عبارة $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$.
ب- استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها

التمرين الرابع (7 نقاط) :

g دالة عددية معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي :
$$\begin{cases} g(x)=e^{\frac{(x+1)\ln(x)}{x}} & : \ x \succ 0 \\ g(0)=0 \end{cases}$$

(C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1. أدرس استمرارية الدالة g عند 0
2. تحقق انه من اجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$ فإن $\dfrac{g(x)}{x}=e^{\frac{\ln(x)}{x}}$.
3. أدرس قابلية اشتقاق g عند 0 و فسر النتيجة هندسيا
4. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$
5. بين ان $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)-x}{\ln(x)}=1$ (لاحظ أن $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}=1$)
ثم استنتج ان $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-x]=+\infty$.
6. ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .
7. أحسب $g(1)\ ;\ g(2)\ ;\ g(3)$ ثم أنشئ (C_g).

" تستطيع أن تنجح في حياتك و لو كان الناس يعتقدون أنك غير ناجح و لكن لن تنجح أبدا إذا كنت تعتقد في نفسك غير ناجح "

الاستاذ : جواليل أحمـــــد – بالتوفيق و النجاح في امتحان البكالوريا 2017
ثـانوية الشيخ أمود تمنــراست

تصحيح اختبار في مادة الرياضـــــــيات

تصحيح الاختبار الثلاثي الاول شعبة الثالثة رياضيات

التمارين	عناصر الإجابة	التنقيط: مجزأة	التنقيط: كاملة
التمرين الاول	1- تعين قيمة العدد الحقيقي a : : $g(x)=a.e^{-x}$ و $g'(x)=-a.e^{-x}$ و لدينا $g'(x)+3g(x)=-a.e^{-x}+3ae^{-x}$ أي $g'(x)+3g(x)=2ae^{-x}$ حتى تكون g حل للمعادلة (E) يكافئ ان $2ae^{-x}=2e^{-x}$ أي ان $a=1$.	(1)	4
	2- : $(E'): y'+3y=0$ حلها $y=Ce^{-3x}$ حيث C ثابت حقيقي .	(1)	
	3- البرهان أن الدالة k هي حل للمعادلة (E) إذا وفقط اذا كانت الدالة $(k-g)$ هي حل للمعادلة (E') : –إذا كانت k حل للمعادلة (E) يكافئ $k'(x)+3k(x)=2e^{-x}$ و لدينا $g'(x)+3g(x)=2e^{-x}$ بالطرح نجد أن $g'(x)-k'(x)+3g(x)-3k(x)=0$ أي ان $(g-k)'(x)+3(g-k)(x)=0$ و منه الدالة $(k-g)$ هي حل للمعادلة (E') . –إذا كانت $(k-g)$ حل للمعادلة (E') يكافئ $(g-k)'(x)+3(g-k)(x)=0$ يكافئ ان $k'(x)+3k(x)=g'(x)+3g(x)$ و لدينا $g'(x)+3g(x)=2e^{-x}$ و منه $k'(x)+3k(x)=2e^{-x}$ إذن k حل للمعادلة (E) . إذن حلول المعادلة (E) هي k حيث $k(x)-g(x)=C.e^{-3x}$ و منه $k(x)=g(x)+C.e^{-3x}$ أي أن $k(x)=2e^{-x}+C.e^{-3x}$ و C ثابت حقيقي.	(1)	
	4- معامل توجيه المماس للمنحنى الممثل للدالة k في النقطة ذات الفاصلة 0 يساوي -4 يعني أن $k'(0)=-4$ نحسب المشتقة $k'(x)=-2e^{-x}-3C.e^{-3x}$ و منه $k'(0)=-2-3C$ نساويها بـ -4 نجد ان $-2-3C=-4$ يكافئ $C=\frac{2}{3}$ **و منه** $k(x)=2e^{-x}+\frac{2}{3}.e^{-3x}$	(1)	
التمرين الثاني	1- أ- دراسة بواقي قسمة 5^n على 7 حسب قيم العدد الطبيعي n $5^0\equiv1[7]$ و $5^1\equiv5[7]$ و $5^2\equiv4[7]$ و $5^3\equiv6[7]$ و $5^4\equiv2[7]$ و $5^5\equiv3[7]$ و $5^6\equiv1[7]$ نلاحظ أن بواقي قسمة 5^n على 7 تشكل متتالية دورية و دورها 6 و منه باقي قسمة 5^n على 7 لما $n=6k$ هو 1 و لما $n=6k+1$ هو 5 و لما $n=6k+2$ هو 4 و لما $n=6k+3$ هو 6 و لما $n=6k+4$ هو 2 و لما $n=6k+5$ هو 3 .حيث k عدد طبيعي . ب-لدينا $1438=6(239)+4$ هو من الشكل $n=6k+4$ إذن باقي قسمة 5^{1438} على 7 هو 2 . و لدينا $2017=6(336)+1$ هو من الشكل $n=6k+1$ إذن باقي قسمة 5^{2017} على 7 هو 5 .	(1)	4
	2- إثبات انه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $26^{6n+5}+2\times47^{12n+2}+3$ يقبل القسمة على 7 لدينا $26\equiv5[7]$ بالرفع الى قوى $6n+5$ نجد $26^{6n+5}\equiv5^{6n+5}[7]$ و مما سبق نستنتج ان $5^{6n+5}\equiv3[7]$ و منه نجد $26^{6n+5}\equiv3[7]....(1)$ و لدي $47\equiv5[7]$ بالرفع الى قوى $12n+2$ نجد $47^{12n+2}\equiv5^{12n+2}[7]$ و مما سبق نستنتج ان $5^{6(2n)+2}\equiv4[7]$ و منه $47^{12n+2}\equiv4[7]$ بالضرب في 2 نجد $2\times47^{12n+2}\equiv8[7]$ و $8\equiv1[7]$ إذن $2\times47^{12n+2}\equiv1[7]...(2)$ بجمع (1) و (2) نجد $26^{6n+5}+2\times47^{12n+2}\equiv4[7]$ بإضافة 3 نجد	(1)	

$26^{6n+5}+2\times47^{12n+2}+3\equiv7[7]$ و $7\equiv0[7]$ و منه $26^{6n+5}+2\times47^{12n+2}+3\equiv0[7]$ إذن $26^{6n+5}+2\times47^{12n+2}+3$ يقبل القسمة على 7 .

3− لدينا مما سبق $26^{6n+5}+2\times47^{12n+2}\equiv4[7]$ بإضافة $5n$ نجد $26^{6n+5}+2\times47^{12n+2}+5n\equiv4+5n[7]$ العدد $26^{6n+5}+2\times47^{12n+2}+5n$ قابلا للقسمة على 7 يعني ان $4+5n\equiv0[7]$ أي ان $5n\equiv-3[7]$ يكافئ $5n\equiv4[7]$ بالضرب في 3 نجد $15n\equiv12[7]$ أي ان $n\equiv5[7]$ (1)

(لان $15\equiv1[7]$ و $12\equiv5[7]$ و منه قيم n المطلوبة هي $n=7k+5\;:\;k\in Z$)

4− أ. التحقق أن: $n\beta_n-\alpha_n=n$ لدينا $\begin{cases} n\beta_n=n^2+2n\\ \alpha_n=n^2+n\end{cases}$ بالطرح نجد $n\beta_n-\alpha_n=n$ (0,5)

ب. إثبات أن : $PGCD(\beta_n\,;\,\alpha_n)=PGCD(\beta_n\,;\,n)$ نضع

$PGCD(\beta_n\,;\,n)=d'$, $PGCD(\beta_n\,;\,\alpha_n)=d$ لدينا d قاسم α_n , β_n فهو قاسم للعدد $n\beta_n-\alpha_n$ و منه فهو قاسم للعدد n إذن d قاسم للعددين n و β_n و منه d قاسم لـ d' ....

(3)

$PGCD(\beta_n\,;\,n)=d'$ يعني أن d' قاسم للعددين n و β_n فهو قاسم للعدد $n(n+1)$ و منه d' قاسم للعدد α_n و منه d' قاسم للعددين α_n و β_n

إذن d' قاسم للعدد d .....(4) (0,25)

من (3) و (4) نجد أن $d=d'$ أي ان $PGCD(\beta_n\,;\,\alpha_n)=PGCD(\beta_n\,;\,n)$

ج. $PGCD(\beta_n\,;\,\alpha_n)$ قاسم للعددين n و β_n فهو قاسم للعدد $\beta_n-n=n+2-n=2$ القيم الممكنة للعدد $PGCD(\beta_n\,;\,\alpha_n)$ هي قواسم 2 أي 1 و 2. (0,25)

التمرين الثالث 5

1- تعيين كلا من $f'(2)=0$ معامل توجيه المماس عند النقطة $B(2;e+1)$ و $f'(1)=1$ معامل توجيه المماس عند النقطة $C(1;3)$ وبما ان نقطة $C(1;3)$ انعطاف فإن $f''(1)=0$. (1,5)

2- كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة C هي $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و لدينا $f(1)=3$ و $f'(1)=1$ بالتعويض نجد $y=x+2$. (0,5)

3- أ- بما أن f مستمرة و رتيبة على $]3;+\infty[$ و تأخذ صورها في المجال $]-\infty;1[$ و 0 من المجال $]-\infty;1[$ فحسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]3;+\infty[$. (0,5)

جدول إشارة $f(x)$ (0,5)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
اشارة $f(x)$		+	0	-	

ب - جدول تغيرات الدالة f (0,5)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	1	↗	$e+1$	↘	$-\infty$

4- المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m للعدد حلول المعادلة $f(x)=f(m)$:

حل المعادلة هو ايجاد فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) الذي معادلته $y=f(m)$ (0,75)

المناقشة :

لما $m\in]-\infty\,;2[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتان و منه المعادلة تقبل حلين.

لما $m=2$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة منه المعادلة تقبل حل وحيد.

لما $m\in\left]2\,;3\right[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m)يتقاطعان في نقطتان و منه المعادلة تقبل حلين.

لما $m\in\left[3;+\infty\right[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة منه المعادلة تقبل حل وحيد .

5- أ-عبارة $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$: $h'(x)=f'(x)-\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ (0,25)

ب-استنتاج اتجاه تغير الدالة h لدينا $h'(x)=f'(x)-\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ يكافئ $h'(x)=f'(x)\left[\dfrac{f(x)-1}{f(x)}\right]$

إشارتها

x	$-\infty$		2		3		α
اشارة $f'(x)$		+	0	-	|	-	
اشارة $f(x)-1$		+	|	+	0	-	
اشارة $h'(x)$		+	0	-	0	+	

و منه h متزايدة على المجالين $\left[3\,;\alpha\right[$ و $\left]-\infty;2\right]$ و متناقصة على المجال $[2;3]$. (0,25)

شكل جدول تغيراتها

x	$-\infty$	2	3	α
$h(x)$	1 ↗	$e+1-\ln(e+1)$ ↘	1 ↗	$+\infty$

(0,25)

التمرين الرابع — 7

1. دراسة استمرارية الدالة g عند 0 لدينا (1)

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0} g(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0} e^{\frac{(x+1)\ln(x)}{x}}=\lim_{x\overset{>}{\to}0} e^{\ln(x)+\frac{\ln(x)}{x}}=0$$ لأن

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{\ln(x)}{x}=-\infty\ ;\ \lim_{x\overset{>}{\to}0}\ln(x)=-\infty\ .$$

2. لدينا $g(x)=e^{\frac{(x+1)\ln(x)}{x}}$ يكافئ $g(x)=e^{\ln(x)+\frac{\ln(x)}{x}}=e^{\ln(x)}.e^{\frac{\ln(x)}{x}}=xe^{\frac{\ln(x)}{x}}$

و منه من اجل كل x من المجال $\left]0\,;+\infty\right[$: $\dfrac{g(x)}{x}=e^{\frac{\ln(x)}{x}}$. (0,5)

طريقة أخرى $\dfrac{g(x)}{x}=\dfrac{e^{\frac{(x+1)\ln(x)}{x}}}{e^{\ln(x)}}=e^{\frac{(x+1)}{x}\ln(x)-\ln(x)}=e^{\frac{\ln(x)}{x}}$

3. دراسة قابلية اشتقاق g عند 0 لدينا $\lim_{h\overset{>}{\to}0}\dfrac{g(h)}{h}=\lim_{h\overset{>}{\to}0} e^{\frac{\ln(h)}{h}}=0$ لأن (0,5)

$\lim_{h\overset{>}{\to}0}\dfrac{\ln(h)}{h}=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} e^{x}=0$ و منه الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0. (0,5)

تفسرها هندسيا ان المنحنى (C_g) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

4. حساب النهاية $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}}=1$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$. (0,75)

5. تبيين ان $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)-x}{\ln(x)}=1$ لدينا

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)-x}{\ln(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{g(x)}{x}-1\right)}{\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln(x)}{x}}-1}{\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)}$$ بوضع $t=\frac{\ln(x)}{x}$

(0,5) لما x يؤول الى $+\infty$ فإن t يؤول 0 و منه $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)-x}{\ln(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$

(0,5) استنتاج ان : $\lim_{x\to+\infty}[g(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(x)\times\frac{g(x)-x}{\ln(x)}\right]=\lim_{x\to+\infty}[\ln(x)\times 1]=+\infty$.

6. دراسة تغيرات الدالة g

المشتقة

(0,5)

$$g'(x)=\left[xe^{\frac{\ln(x)}{x}}\right]'=\left[e^{\frac{\ln(x)}{x}}+x\left(\frac{1-\ln(x)}{x^2}\right)e^{\frac{\ln(x)}{x}}\right]=\left[\frac{x+1-\ln(x)}{x}\right]e^{\frac{\ln(x)}{x}}$$

(0,25) إشارة المشتقة متعلقة بـ $x+1-\ln(x)$ نضع $t(x)=x+1-\ln(x)$ ندرس تغيرات h

المشتقة $t'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$ موجبة على المجال $[1;+\infty[$ و سالبة على المجال $]0;1]$ إذن

t متزايدة على $[1;+\infty[$ و متناقصة $]0;1]$ إذن فهي تقبل قيمة حدية صغرى هي $t(1)=2$ و

منه نستنتج ان t موجبة على مجال تعريفها و منه $g'(x)$ موجبة إذن الدالة g متزايدة

(0,5) على $]0\,;+\infty[$

جدول تغيراتها

x	0	$+\infty$
$g(x)$	0	$\nearrow$ $+\infty$

(0,75) 7. حساب $g(1)=1$; $g(2)=2e^{\frac{\ln 2}{2}}=2\sqrt{2}$ و $g(3)=3\sqrt[3]{3}$

رسم (C_g):

(0,75)