الجمهورية الجزائرية اليمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للإمتحانات والمسابقات

إمتحان بكالوريا تجريبي

ثانوية: صديقي النوري – الجلفة

دورة: 2022

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 03 ساعات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

## الموضوع الأول

### التمرين الأول: (03 نقاط)

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية، اقترحت ثلاث إجابات، واحدة فقط منها صحيحة، حدّدها مع التعليل

❶ حلول للمعادلة التفاضلية $y - y' = 1$ التي تحقق $y(0) = e$ هي:

أ/ $y = e^{x+1}$ ب/ $y = e^{x+1} - e^x + 1$ ج/ $y = e^{x+1} + 1$

❷ قيمة التكامل $A$ حيث: $A = \int_{-1}^{1} xe^x dx$ هي:

أ/ $A = 2e^{-1}$ ب/ $A = 2e$ ج/ $A = 2 + e$

❸ حلول المعادلة: $e^x - \sqrt{e^{x-1}} = 0$ هي:

أ/ $S \in \{-1; 1\}$ ب/ $S \in \{0\}$ ج/ $S \in \{-1\}$

### التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

يحتوي صندوق على ثلاث كرات حمراء مرقمة بـ $-1$، $1$، $2$ وخمس كرات بيضاء مرقمة بـ $1$، $1$، $1$، $2$، $2$ وكرتان خضراوان مرقمتان بـ $-1$ ، $-1$ (كل الكرات لا نميز بينها عند اللمس)

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات

نعتبر الحوادث التالية:

$A$: "الكرات المسحوبة مختلفة اللون مثنى مثنى"

$B$: "يوجد على الأقل كرة خضراء واحدة"

$C$: "الكرات المسحوبة مجموع أرقامها معدوم"

❶ احسب احتمال الحوادث $A$، $B$ و $C$

❷ علما أنّ مجموع أرقام الكريات المسحوبة معدوم، ما احتمال أن تكون مختلفة في اللون مثنى مثنى

❸ ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يمثل عدد ألوان الكرات المسحوبة

أ/ بيّن أنّ $p(X=2) = \frac{79}{120}$ ، ثم أكتب قانون احتمال المتغير العشوائي $X$

ب/ احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ ثم احسب الاحتمال $P(X^2 - 2X \geq 3)$

## التمرين الثالث: ($04.5$ نقاط)

لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 3$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+1} = 8\left(1 - \dfrac{3}{u_n + 2}\right)$

❶ برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا: $2 < u_n < 4$

❷ بيّن أنّ $(u_n)$ متزايدة تماما ، ثمّ استنتج أنها متقاربة

❸ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإنّ $4 - u_{n+1} \le \dfrac{4}{5}(4 - u_n)$

❹ استنتج أنّ $0 < 4 - u_n \le \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n)$

❺ نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 2}$

أ/ بيّن أنّ $(v_n)$ هندسية محددا أساسها وحدها الأول

ب/ اكتب عبارة $v_n$ بدلالة $n$، ثمّ استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$

ج/ اكتب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

## التمرين الرابع: ($08$ نقاط)

I) الدالة العددية $g$ المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = -1 + x + 2\ln x$

❶ ادرس اتجاه تغير الدالة $g$

❷ احسب $g(1)$، ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$ من المجال $]0; +\infty[$

II) الدالة العددية $f$ معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{-1 + (x-2)\ln x}{x}$ ، و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ (وحدة الطول $1cm$)

❶ احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$، وفسر النتيجة هندسيا ، ثمّ احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

❷ أ/ بين أنه من أجل كل $x$ من $]0; +\infty[$ لدينا: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

ب/ عيّن اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها

❸ ليكن $(\Gamma)$ المنحنى البياني الممثل للدالة: $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$

أ/ احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \ln x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

ب/ ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Gamma)$

❹ بين أن المنحنى $(C_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما $\alpha$ و $\beta$، ثم تحقق أنّ:

$0.5 < \alpha < 0.6$ و $2.9 < \beta < 3$

❺ ارسم $(\Gamma)$ ثم $(C_f)$

❻ احسب $A$ مساحة الحيز المحدد بـ $(C_f)$ و $(\Gamma)$ والمستقيمان ذو المعادلتان $x = 1$ و $x = e$

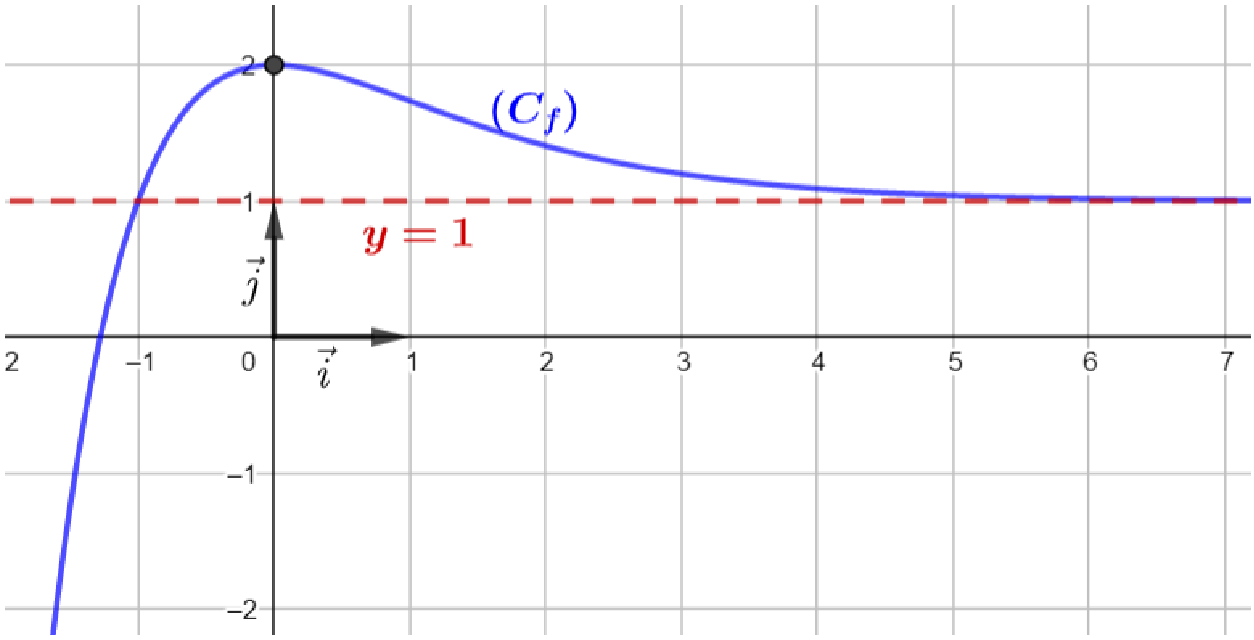
**انتهى الموضوع الأول**

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: ($03$ نقاط)

I) $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = (ax + b)e^{-x} + c$ حيث $a$، $b$ و $c$ أعداد حقيقية

$(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (وحدة الطول $1cm$)




- بقراءة بيانية، عيّن $a$، $b$ و $c$

II) نضع: $a = b = c = 1$

❶ باستعمال المكاملة بالتجزئة، عيّن دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x + 1)e^{-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل $-1$

❷ بيّن أن $A = (e - 1)cm^2$ حيث $A$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بـ $(C_f)$ وحامل محور الفواصل والمستقيمين ذو المعادلتين $x = -1$ و $x = 0$

### التمرين الثاني: ($04.5$ نقاط)

صندوق به ثلاث كريات حمراء وأربع كريات بيضاء و كريتين خضراوين

نسحب عشوائيا كريتان على التوالي بدون إرجاع

نعتبر الحوادث التالية: $A$: "الكرتان المسحوبتان من نفس اللون"

$B$: "سحب كرية بيضاء في المرة الأولى"

❶ احسب احتمال الحوادث $A$ و $B$

❷ استنتج احتمال سحب كريتين من لونين مختلفين

❸ علما أنّ الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء، احسب احتمال سحب كرتان من نفس اللون

❹ ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الكرات البيضاء المسحوبة

أ/ عيّن قيم المتغير العشوائي $X$، ثم أكتب قانون احتماله

ب/ احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ ثم احسب $E(1443X + 2022)$

## التمرين الثالث: (05 نقاط)

I) لتكن الدالة $f$ المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-1}$

❶ ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها

❷ بيّن أنه من أجل كل $x \geq 1$ فإنّ: $f(x) \geq 1$

II) لتكن $(u_n)$ المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 2$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ؛ $u_{n+1} = f(u_n)$

❶ برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n$ طبيعي فإنّ: $u_n \geq 1$

❷ بيّن أنّ $(u_n)$ متناقصة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة

❸ نضع من أجل كل $n$ طبيعي: $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n}$ و $w_n=\ln(v_n)$

أ/ بيّن أن $(w_n)$ هندسية أساسها 2 واحسب $w_0$

ب/ اكتب بدلالة $n$ عبارة $w_n$ ، ثم استنتج بدلالة $n$ عبارة $v_n$

❹ استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$، ثم احسب نهاية $(u_n)$

❺ أ/ اكتب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث: $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$

ب/ اكتب بدلالة $n$ الجداء $P_n$ حيث: $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$

## التمرين الرابع: (7.5 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (1-x)e^{2-x} + 1$

❶ ادرس اتجاه تغير الدالة $g$، ثمّ شكل جدول تغيراتها

❷ بيّن أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ فإنّ $g(x) \geq 0$

II) نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x - 2 + xe^{2-x}$ وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول هي $1cm$)

❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

❷ أ/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x-2)]$ ، ماذا تستنتج؟

ب/ ادرس الوضع النسبي بين $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$ حيث $(\Delta): y = x - 2$

❸ أ/ بيّن أنه من اجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $f'(x) = g(x)$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها

❹ بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]0.31; 0.32[$

❺ بيّن $(C_f)$ يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثييها

❻ بيّن أنّ $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ موازيا لـ $(\Delta)$ يطلب تعيين معادلة له

❼ ارسم $(T)$ ، $(\Delta)$ و $(C_f)$

❽ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية
الديوان الوطني للإمتحانات والمسابقات
إمتحان بكالوريا تجريبي
ثانوية: صديقي النوري – الجلفة
دورة: 2022
الشعبة: علوم تجريبية

## تصحيح مقترح لاختبار مادة الرياضيات

### الموضوع الأول

**◆ التمرين الأول: (03 نقاط)**

[01ن] ❶ حلول للمعادلة التفاضلية $y - y' = 1$ التي تحقق $y(0) = e$ هي: $\boxed{y = e^{x+1} - e^x + 1}$

**التبرير:**

**لدينا:**

$$y - y' = 1 \Longrightarrow y' = y - 1 \Longrightarrow y = Ce^x - \frac{-1}{1} \Longrightarrow Ce^x + 1$$

**ولدينا:**

$$y(0) = e \Longrightarrow Ce^0 + 1 = e \Longrightarrow C = e - 1$$

**ومنه:**

$$y = (e-1)e^x + 1 \Longrightarrow y = e^{x+1} - e^x + 1$$

[01ن] ❷ التكامل $A$ حيث: $A = \int_{-1}^{1}(xe^x)dx$ هي: $\boxed{A = 2e^{-1}}$

**التبرير:**

$$A = \int_{-1}^{1}(xe^x)dx$$

**نضع:** $u(x) = x$ و $v'(x) = e^x$

**ومنه:** $u'(x) = 1$ و $v(x) = e^x$

**إذن:**

$$A = \int_{-1}^{1}(xe^x)dx = [xe^x]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}e^x dx = [xe^x - e^x]_{-1}^{1} = 2e^{-1}$$

[01ن] ❸ حلول المعادلة: $e^x - \sqrt{e^{x-1}} = 0$ هي: $\boxed{S \in \{-1\}}$

**التبرير:**

$$e^x - \sqrt{e^{x-1}} = 0 \Longrightarrow e^x = \sqrt{e^{x-1}} \Longrightarrow e^{2x} = e^{x-1} \Longrightarrow 2x = x - 1 \Longrightarrow x = -1$$

**◆ التمرين الثاني: (04.5 نقاط)**

[1.5ن] ❶ حساب احتمال الحوادث $A$، $B$ و $C$:

$$p(A) = \frac{C_3^1 C_5^1 C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{3 \times 5 \times 2}{120} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$p(B) = \frac{C_2^1 C_8^2 + C_2^2 C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{2 \times 28 + 1 \times 8}{120} = \boxed{\frac{8}{15}}$$

$$p(C)=\frac{C_3^2C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{3\times 3}{120}=\boxed{\frac{3}{40}}$$

[0.5ن] ❷ حساب احتمال أن تكون مختلفة في اللون مثنى مثنى علما أنّ مجموع أرقامها معدوم:

$$p_C(A)=\frac{p(A\cap C)}{p(C)}=\frac{\frac{C_2^1C_2^1C_1^1}{C_{10}^3}}{\frac{3}{40}}=\frac{\frac{2\times 2\times 1}{120}}{\frac{3}{40}}=\boxed{\frac{4}{9}}$$

[0.5ن] ❸ أ/ تبيين أنّ $p(X=2)=\frac{79}{120}$:

$$p(X=2)=\frac{C_3^2C_7^1+C_5^2C_5^1+C_2^2C_8^1}{C_{10}^3}=\boxed{\frac{79}{120}}$$

[01ن] - كتابة قانون احتمال $X$:

لدينا: $X(\Omega)=\{1;2;3\}$ حيث:

$$p(X=1)=\frac{C_3^3+C_5^3}{C_{10}^3}=\boxed{\frac{11}{120}}$$

$$p(X=2)=\boxed{\frac{79}{120}}$$

$$p(X=3)=\frac{C_3^1C_5^1C_2^1}{C_{10}^3}=\boxed{\frac{30}{120}}$$

ومنه:

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{11}{120}$ | $\frac{79}{120}$ | $\frac{30}{120}$ |

[0.5ن] ب/ حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$ :

$$E(X)=1\frac{11}{179}+2\frac{79}{120}+3\frac{30}{120}=\boxed{\frac{259}{120}}$$

[0.5ن] • حساب $P(X^2-2X\geq 3)$

$$P(X^2-2X\geq 3)=P(X^2-2X-3\geq 0)=P\big((X+1)(X-3)\geq 0\big)$$

لدينا:

| $X$ | $-\infty$ | $-1$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(X+1)(X-3)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

إذن:

$$P(X^2-2X\geq 3)=P(X=3)=\boxed{\frac{30}{120}}$$

## ♦ التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

[0.5ن] ❶ برهان بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ لدينا: $2<u_n\leq 4$:

نسمي الخاصية $P(n)$ ... $2<u_n<4$

• لدينا: $2<u_0<4$ ومنه: $2<3<4$ إذن القضية $P(n)$ محققة من أجل $n=0$

• نفرض أنّ: $2<u_n<4$ ونثبت أنّ $2<u_{n+1}<4$

• لدينا:

$$2<u_n<4\Rightarrow 4<u_n+2<6\Rightarrow \frac{1}{6}\leq\frac{1}{u_n+2}<\frac{1}{4}\Rightarrow -\frac{3}{4}<-\frac{3}{u_n+2}<-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} < 1 - \frac{3}{u_n + 2} < \frac{1}{2} \Rightarrow 2 < 8\left(1 - \frac{3}{u_n + 2}\right) < 4 \Rightarrow 2 < u_{n+1} < 4$$

**حسب مبدأ البرهان بالتراجع $P(n)$ محققة**

❷ **تبيين أنّ $(u_n)$ متزايدة تماما ، ثمّ استنتاج أنها متقاربة:** [0.5ن]

$$u_{n+1} - u_n = 8\left(1 - \frac{3}{u_n + 2}\right) - u_n = \frac{-(u_n)^2 + 6u_n - 8}{u_n + 2} = \frac{-(u_n - 2)(u_n - 4)}{u_n + 2}$$

**لدينا:** $2 < u_n < 4$ **ومنه:** $0 < u_n - 2 < 2$

**لدينا:** $2 < u_n < 4$ **ومنه:** $-2 < u_n - 4 < 0$

**لدينا:** $2 < u_n < 4$ **ومنه:** $4 < u_n + 2 < 6$

**إذن:** $\frac{-(u_n - 2)(u_n - 4)}{u_n + 2} > 0$ **وعليه** $(u_n)$ **متزايدة تماما**

• **وبما أنّ** $(u_n)$ **متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ** 4 **فهي متقاربة**

❸ **تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإنّ $4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$:** [0.5ن]

**لدينا:**

$$4 - u_{n+1} = 4 - 8\left(1 - \frac{3}{u_n + 2}\right) \Rightarrow 4 - u_{n+1} = \frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2}$$

**ولدينا:** $(u_n)$ **متزايدة ولدينا** $u_0 = 3$ **ومنه:**

$$u_n \geq 3 \Rightarrow u_n + 2 \geq 5 \Rightarrow \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2} \leq \frac{4(4 - u_n)}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)}$$

❹ **استنتاج أنّ $0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$:** [0.5ن]

**لدينا:** $4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$ **ومنه:**

$$\begin{cases} 4 - u_1 \leq \frac{4}{5}(4 - u_0) \\ 4 - u_2 \leq \frac{4}{5}(4 - u_1) \\ \vdots \\ 4 - u_n \leq \frac{4}{5}(4 - u_{n-1}) \end{cases}$$

**بالضرب طرفا لطرف نجد:**

$$(4 - u_1) \times (4 - u_2) \times \dots \times (4 - u_n) \leq \frac{4}{5}(4 - u_0)\frac{4}{5}(4 - u_1) \times \dots \times \frac{4}{5}(4 - u_{n-1})$$

**ومنه:**

$$4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n (4 - u_0) \Rightarrow 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \dots (*)$$

**ولدينا:**

$$u_n < 4 \Rightarrow -4 < -u_n \Rightarrow 0 < 4 - u_n \dots (**)$$

**من** $(*)$ **و** $(**)$ **نجد أنّ:**

$$\boxed{0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n}$$

[0.5ن] • حساب $\lim_{n\to+\infty}(u_n)$ :

$$0 < 4-u_n \le \left(\frac{4}{5}\right)^n \Rightarrow 0 < \lim_{n\to+\infty}(4-u_n) \le \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$$
$$\Rightarrow 0 < \lim_{n\to+\infty}(4-u_n) \le 0$$

حسب مبدأ النهايات بالحصر نجد أنّ: $\lim_{n\to+\infty}(4-u_n)=0$

ومنه: $\boxed{\lim_{n\to+\infty}(u_n)=4}$

❺

[0.5ن] أ/ تبيين أنّ $(v_n)$ هندسية محددا أساسها وحدها الأول:

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-4}{u_{n+1}-2}=\frac{8\left(1-\frac{3}{u_n+2}\right)-4}{8\left(1-\frac{3}{u_n+2}\right)-2}=\frac{4u_n-16}{6u_n-12}=\frac{4(u_n-4)}{6(u_n-2)}=\frac{2}{3}v_n$$

ولدينا:

$$v_0=\frac{u_0-4}{u_0-2}=-1$$

[0.5ن] ب/ كتابة عبارة $v_n$ بدلالة $n$:

$$v_n=-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

[0.5ن] - استنتاج عبارة $u_n$ بدلالة $n$:

$$v_n=\frac{u_n-4}{u_n-2}\Rightarrow v_nu_n-2v_n-u_n=-4\Rightarrow u_n(v_n-1)=-4+2v_n$$

$$\Rightarrow u_n=2\frac{v_n-2}{v_n-1}\Rightarrow \boxed{u_n=2\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+2}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}}$$

[0.5ن] ج/ اكتب بدلالة $n$ المجموع $S_n$

$$u_n=2\frac{v_n-2}{v_n-1}=2\frac{v_n-1-1}{v_n-1}=2\left(1-\frac{1}{v_n-1}\right)$$

ومنه:

$$S_n=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n=-\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}=\boxed{3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1\right)}$$

◆ **التمرين الرابع: (08 نقاط)**

(I

[0.5ن] ❶ دراسة اتجاه تغير الدالة $g$:

$$g'(x)=1+2\frac{1}{x}=\frac{x+2}{x}$$

لدينا: $g'(x)>0$ لما $x\in\mathbb{R}_+^*$ ومنه الدالة $g$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+^*$

[0.25ن] ❷ حساب $g(1)$:

$$g(1)=-1+1+2\ln 1=0$$

[0.5ن] - استنتاج إشارة $g(x)$ :

بما أن الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]0;+\infty[$ ، و $g(1)=0$ فإنّ:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**(II**

❶ أ/ حساب $\lim\limits_{x \to 0^{>}} f(x)$: [0.5ن]

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left( \frac{-1 + \overbrace{x \ln x}^{0} - 2 \ln x}{x} \right) = +\infty$$

ومنه $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 0$

ب/ حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ : [0.5ن]

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left( -\frac{1}{x} + \ln x - 2\frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

❷ أ/ تبيين أنه من أجل كل $x$ من $]0; +\infty[$ : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ [0.75ن]

$$f'(x) = \frac{\left(\ln x + \frac{x-2}{x}\right)x - (-1 + (x-2)\ln x)}{x^2} = \frac{x - 1 + 2\ln x}{x^2} = \boxed{\frac{g(x)}{x^2}}$$

ب/ تعيين اتجاه تغير الدالة $f$ ، وتشكيل جدول تغيراتها: [0.75ن]

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

- جدول تغيرات الدالة $f$:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

❸ أ/ حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \ln x)$ : [0.75ن]

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - \ln x) = \lim_{x \to +\infty} \left( \frac{-1 + (x-2)\ln x}{x} - \ln x \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left( -\frac{1}{x} + \ln x - 2\frac{\ln x}{x} - \ln x \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left( -\frac{1}{x} - 2\frac{\ln x}{x} \right) = 0$$

- التفسير الهندسي: $(C_f)$ و $(\Gamma)$ متقاربان بجوار $+\infty$

ب/ دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Gamma)$: [0.5ن]

$$f(x) - \ln x = 0 \Rightarrow -\frac{1}{x} - \frac{2\ln x}{x} = 0 \Rightarrow -1 - 2\ln x = 0$$

$$\Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$$

| $x$ | $0$ | | $e^{-\frac{1}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) - \ln x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

- $(C_f)$ فوق $(\Gamma)$ لما $x \in \left]0; e^{-\frac{1}{2}}\right[$
- $(C_f)$ يقطع $(\Gamma)$ لما $x = e^{-\frac{1}{2}}$
- $(C_f)$ تحت $(\Gamma)$ لما $x \in \left]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty\right[$

[01ن] ❹ تبيين أن $(C_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطتين:

من جدول تغيرات الدالة $f$ نلاحظ أنّ $(C_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطتين

- التحقق أنّ: $0.5 < \alpha < 0.6$ و $2.9 < \beta < 3$:

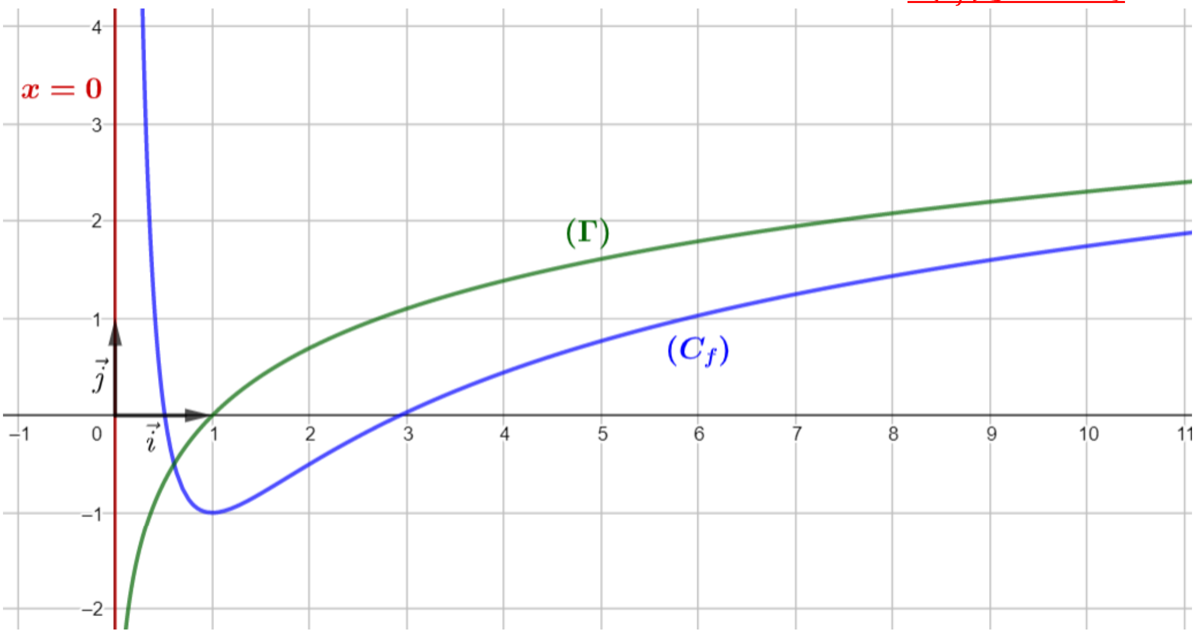
• لدينا: $f(0.6) \times f(0.5) < 0$ لأن: $f(0.6) \approx -0.47$ و $f(0.5) \approx 0.08$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]0.5; 0.6[$

• ولدينا: $f(2.9) \times f(3) < 0$ لأن: $f(3) \approx 0.03$ و $f(2.9) \approx -0.01$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\beta$ في المجال $]2.9; 3[$

[01ن] ❺ رسم $(\Gamma)$ و $(C_f)$ :




[01ن] ❻ حساب $A$:

$$A = \int_1^e (\ln x - f(x))dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x}\ln x\right) dx = \left[\ln x + 2\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e$$

$$= [\ln x + (\ln x)^2]_1^e = \boxed{2} cm^2$$

**بالتوفيق في شهادة البكالوريا**

❤ لا تنسونا من صالح دعائكم ❤

**الأستاذ: قويسم براهيم الخليل**

الخليل للرياضيات

## الموضوع الثاني

### ◆ التمرين الأول: (03 نقاط)

I) تعيين $a$، $b$ و $c$ [1.5ن]

من البيان نجد:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 \\ f(0) = 2 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

• لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \left((ax+b)e^{-x} + c\right) = 1 \Longrightarrow \boxed{c = 1}$$

•ولدينا:

$$f(0) = 0 \Longrightarrow (a(0)+b)e^{-(0)} + c = 2 \Longrightarrow b + c = 2 \Longrightarrow \boxed{b = 1}$$

• ولدينا:

$$f'(x) = ae^{-x} - (ax+b)e^{-x} = (a-b-ax)e^{-x}$$

ومنه:

$$f'(0) = 0 \Longrightarrow \left(a-b-a(0)\right)e^{-(0)} = 0 \Longrightarrow a-b = 0 \Longrightarrow a = b \Longrightarrow \boxed{a = 1}$$

II)

❶ تعيين دالة أصلية للدالة $f$: [01ن]

نسمي: $g(x) = (x+1)e^{-x}$

نضع: $u(x) = t+1$ و $v'(t) = e^{-t}$

ومنه: $u'(t) = 1$ و $v(t) = -e^{-t}$

إذن:

$$G(x) = \int_{-1}^{x} (t+1)e^{-t}dt = [-(t+1)e^{-t}]_{-1}^{x} - \int_{-1}^{x} -e^{-t}dt$$
$$= [-(t+1)e^{-t}]_{-1}^{x} - [e^{-t}]_{-1}^{x} = [-(t+2)e^{-t}]_{-1}^{x} = \boxed{-(x+2)e^{-x} + e}$$

❷ تبيين أن $A = e - 2$ [0.5ن]

$$A = \int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \left((x+1)e^{-x} + 1\right)dx = \int_{-1}^{0} (x+1)e^{-x}dx + \int_{-1}^{0} dx$$
$$= [-(x+2)e^{-x}]_{-1}^{0} + [x]_{-1}^{0} = [-(x+2)e^{-x} + x]_{-1}^{0}$$
$$= \boxed{(e-1)}\, cm^2$$

### ◆ التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

❶ حساب احتمال الحوادث $A$ و $B$: [01ن]

$$p(A) = \frac{A_3^2 + A_4^2 + A_2^2}{A_9^2} = \boxed{\frac{20}{72}} = \frac{5}{18}$$

$$p(B) = \frac{A_4^1 A_8^1}{A_9^2} = \boxed{\frac{32}{72}} = \frac{4}{9}$$

❷ استنتاج احتمال سحب كريتين من لونين مختلفين: [0.5ن]

$$p(C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{20}{72} = \boxed{\frac{52}{72}} = \frac{13}{18}$$

❸ حساب احتمال سحب كرتان من نفس اللون علما أنّ الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء: [0.5ن]

$$p_B(A)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{\frac{A_4^2}{A_9^2}}{\frac{32}{72}}=\frac{\frac{12}{72}}{\frac{32}{72}}=\boxed{\frac{3}{8}}$$

❹

أ/ تعيين قيم المتغير العشوائي $X$، وكتابة قانون احتماله: [1.5ن]

لدينا: $X(\Omega)=\{0;1;2\}$ حيث:

$$p(X=0)=\frac{A_5^2}{A_9^2}=\boxed{\frac{20}{72}}=\frac{5}{18}$$

$$p(X=1)=\frac{2A_4^1A_5^1}{A_9^2}=\boxed{\frac{40}{72}}=\frac{5}{9}$$

$$p(X=2)=\frac{A_4^2}{A_9^2}=\boxed{\frac{12}{72}}=\frac{1}{6}$$

ومنه:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p(X=x_i)$ | $\frac{20}{72}$ | $\frac{40}{72}$ | $\frac{12}{72}$ |

ب/ حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$ : [0.5ن]

$$E(X)=0\frac{20}{72}+1\frac{40}{72}+2\frac{12}{72}=\frac{8}{9}$$

• حساب $E(1443X+2022)$: [0.5ن]

$$E(1443X+2022)=1443E(X)+2022=\boxed{\frac{9914}{3}}$$

## ◆ التمرين الثالث: (05 نقاط)

I)

❶ دراسة اتجاه تغير الدالة $f$ وتشكيل جدول تغيراتها: [0.5ن]

$$f'(x)=\frac{2x(2x-1)-2x^2}{(2x-1)^2}=\frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}>0$$

إذن الدالة $f$ متزايدة تماما على $[1;+\infty[$

| $x$ | $1 \qquad\qquad +\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $1 \nearrow +\infty$ |

❷ تبيين أنه من أجل كل $x\geq 1$ فإنّ: $f(x)\geq 1$: [0.25ن]

من جدول تغيرات الدالة $f$ نجد أنّ $f(x)\geq 1$

II)

❶ برهان بالتراجع أنه من أجل كل $n$ طبيعي فإنّ: $u_n\geq 1$: [0.5ن]

نسمي $u_n\geq 1 \ldots P(n)$

• لدينا: $u_0\geq 1$ ومنه: $2\geq 1$ إذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$

• نفرض أن $u_n\geq 1$ ونثبت صحة $u_{n+1}\geq 1$

• لدينا: $u_n \geq 1$

وبما أنّ الدالة $f$ متزايدة تماما على $[1;+\infty[$ فإنّ:

$$u_n \geq 1 \Rightarrow f(u_n) \geq f(1) \Rightarrow u_{n+1} \geq 1$$

حسب البرهان بالتراجع $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

❷ تبيين أنّ $(u_n)$ متناقصة تماما، واستنتاج أنها متقاربة: [0.5ن]

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n)^2}{2u_n - 1} - u_n = \frac{-(u_n)^2 + u_n}{2u_n - 1} = \frac{u_n(1-u_n)}{2u_n - 1}$$

لدينا: $u_n \geq 1$ ومنه: $1 - u_n \leq 0$

ولدينا: $u_n \geq 1$ ومنه: $2u_n - 1 \geq 1$

إذن:

$$\frac{u_n(1-u_n)}{2u_n - 1} < 0$$

وعليه $(u_n)$ متناقصة تماما

• وبما أن $(u_n)$ متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ $1$ فهي متقاربة

❸

أ/ تبيين أن $(w_n)$ هندسية أساسها $2$ وحساب $w_0$: [0.5ن]

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left(\frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{(u_n)^2}{2u_n - 1} - 1}{\frac{(u_n)^2}{2u_n - 1}}\right) = \ln\left(\frac{(u_n)^2 - 2u_n + 1}{(u_n)^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(u_n - 1)^2}{(u_n)^2}\right) = 2\ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right) = 2\ln(v_n) = 2w_n$$

ولدينا: $w_0 = \ln(v_0) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

إذن $(v_n)$ هندسية أساسها $2$ وحدها الأول $-\ln 2$

ب/ كتابة بدلالة $n$ عبارة $w_n$ : [0.5ن]

$$w_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times (2)^n = \boxed{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)}$$

• استنتاج بدلالة $n$ عبارة $v_n$: [0.5ن]

$$w_n = \ln(v_n) \Rightarrow e^{w_n} = v_n \Rightarrow v_n = e^{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)} \Rightarrow \boxed{v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$$

❹ استنتاج عبارة $u_n$ بدلالة $n$: [0.5ن]

لدينا:

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \Rightarrow v_n u_n = u_n - 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{1 - v_n} \Rightarrow \boxed{u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}}$$

• حساب نهاية $(u_n)$: [0.5ن]

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}\right) = \boxed{1}$$

لأنّ: $\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)=0$ ، $\left(-1<\frac{1}{2}<1\right)$

❺

**أ/ كتابة بدلالة $n$ المجموع $S_n$ :** [0.5ن]

$$S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right) = \boxed{\ln(2)\left(1-2^{n+1}\right)}$$

**ب/ كتابة بدلالة $n$ الجداء $P_n$ :** [0.25ن]

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n = e^{w_0}\times e^{w_1}\times\ldots\times e^{w_n} = e^{w_0+w_1+\cdots+w_n} = e^{S_n} = e^{\ln(2)(1-2^{n+1})}$$
$$= \boxed{2^{(1-2^{n+1})}}$$

## ◆ التمرين الرابع: (07.5 نقاط)

**(I**

❶ **دراسة اتجاه تغير الدالة $g$ ، وتشكيل جدول تغيراتها:** [01ن]

- **النهايات:**

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}e^2 - xe^{-x}e^2+1\right)=1$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

- **المشتقة:**

$$g'(x) = -e^{2-x}-(1-x)e^{2-x} = (x-2)e^{2-x}$$

**لدينا:** $e^{2-x}>0$ **ومنه إشارة** $g'(x)$ **من إشارة** $x-2$ :

$$x-2=0 \Longrightarrow x=2$$

- **جدول التغيرات:**

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(x)$ | $+\infty$ ↘ | $0$ | ↗ $1$ |

❷ **تبيين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ فإنّ $g(x)\geq 0$:** [0.5ن]

**من جدول تغيرات الدالة $g$ نجد أنّ $g(x)\geq 0$ (لأنّ الدالة $g$ تبلغ قيمة حدية دنيا موجبة)**

**(II**

❶ **حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ :** [0.5ن]

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-2-(-x)e^{-x}e^2\right) = \boxed{+\infty}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$

❷ **أ/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]$ :** [0.5ن]

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[xe^{2-x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[-(-x)e^{-x}e^2\right]=0$$

• **نستنتج أنّ $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y=x+2$**

**ب/ دراسة الوضع النسبي بين $(C_f)$ و $(\Delta)$:** [0.5ن]

$$f(x)-(x+2) = xe^{2-x}$$

**لدينا:** $e^{2-x}>0$ **إذن إشارة الفرق من إشارة** $x$:

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

- $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ لما $x \in ]-\infty; 0[$
- $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ لما $x = 0$
- $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ لما $x \in ]0; +\infty[$

❸ أ/ تبيين أنه من اجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $f'(x) = g(x)$: [0.5ن]

$$f'(x) = 1 + e^{2-x} - xe^{2-x} = (1-x)e^{2-x} + 1 = g(x)$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ وتشكيل جدول تغيراتها: [0.5ن]

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه:

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

❹ تبيين أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]0.31; 0.32[$: [0.5ن]

لدينا الدالة $f$ مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$

ولدينا: $f(0.31) \times f(0.32) < 0$ لأنّ: $f(0.31) \approx -0.01$ و $f(0.32) \approx 0.04$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]0.31; 0.32[$

❺ تبيين $(C_f)$ يقبل نقطة إنعطاف : [0.5ن]

لدينا: $f'(x) = g(x)$

ومنه: $f''(x) = g'(x)$

إذن إشارة $f''(x)$ من إشارة $g'(x)$

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

المشتقة الثانية تنعدم عند $x = 2$ وتغير إشارتها

إذن $(C_f)$ يقبل نقطة إنعطاف $\Omega(2; f(2))$ أي: $\boxed{\Omega(2; 2)}$

❻ تبيين أنّ $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ موازيا لـ $(\Delta)$ : [0.5ن]

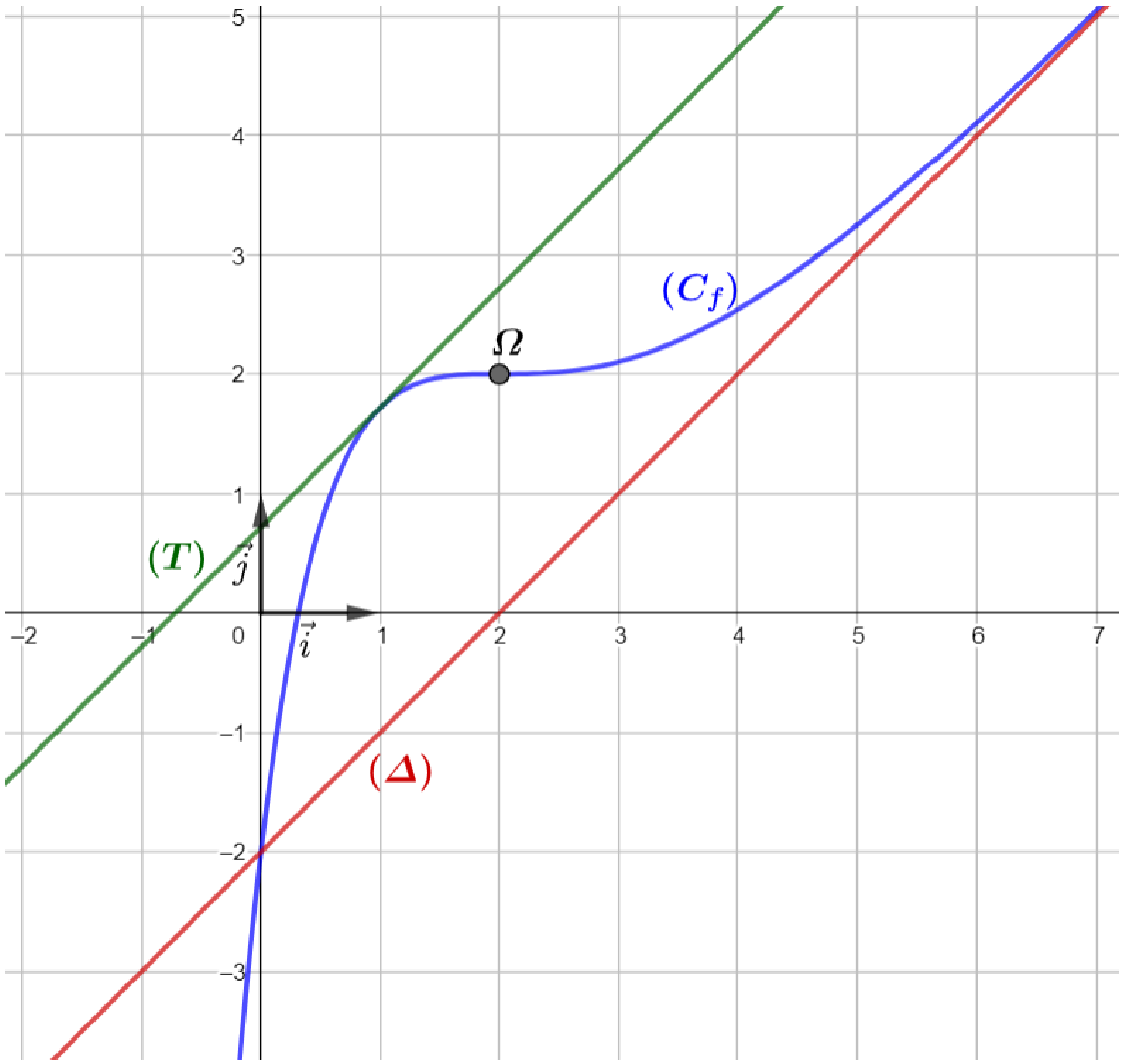
$$f'(a) = 1 \Longrightarrow (1-a)e^{2-a} + 1 = 1 \Longrightarrow (1-a)e^{2-a} = 0 \Longrightarrow 1 - a = 0 \Longrightarrow \boxed{a = 1}$$

إذن $(C_f)$ يقبل مماسا موازيا لـ $(\Delta)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$

- كتابة معادلة $(T)$: [0.5ن]

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1) = \boxed{x + e - 2}$$

❼ رسم $(T)$، $(\Delta)$ و $(C_f)$: [01ن]




[0.5ن]

❽ **المناقشة البيانية:**

**حلول المعادلة** $f(x) = x + m$ **هي فواصل نقط تقاطع** $(C_f)$ **مع المستقيمات ذات المعادلات** $y_m = x + m$

**وهي:**

**لما** $m < -2$ **المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا تماما**

**لما** $m = -2$ **المعادلة تقبل حلا معدوما**

**لما** $-2 < m < e - 2$ **المعادلة تقبل حلين موجبين**

**لما** $m = e - 2$ **المعادلة تقبل حلا وحيدا قيمته** $x = 1$

**لما** $m > e - 2$ **المعادلة لا تقبل حلولا**

**بالتوفيق في شهادة البكالوريا**

❤ **لا تنسونا من صالح دعائكم** ❤

**الأستاذ: قويسم براهيم الخليل**

الخليل للرياضيات