بكالوريا تجريبي

اختبار في مادة: الرياضيات المدة: 3سا و30د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التعليل في كل حالة مما يلي:

1- الشكل الجبري للعدد المركب $\left[\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right]^{2022}$ هو: أ) 1 ب) -1 ج) $-i$.

2- الشكل الأسي للعدد المركب $\frac{6e^{i\frac{3\pi}{4}}.e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{2}}}$ هو: أ) $3e^{-i\frac{\pi}{12}}$ ب) $3e^{i\frac{\pi}{12}}$ ج) $3e^{i\frac{11\pi}{12}}$.

3- الشكل المثلثي لـ $\left[\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right]^{2}$ هو: أ) $2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$ ب) $2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ ج) $2(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6})$.

4- مجموعة حلول المعادلة $z^2-z.\bar{z}+2=0$ في $\mathbb{C}$ هي: أ) $S=\{-i;i\}$ ب) $S=\{-1;1\}$ ج) $S=\{i\}$.

5- مجموعة النقط M لاحقتها z التي تحقّق $|z+i|=1$ هي: أ) مستقيم ب) قطعة مستقيمة ج) دائرة.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

كيس به 9كريات بيضاء مرقّمة من 1 إلى 9، و6كريات سوداء مرقّمة من 1 إلى 6، لا نفرق بين الكريات باللمس.

I- نسحب من هذا الكيس وبطريقة عشوائية أربع كريات في آن واحد.

1- احسب p_1 احتمال سحب أربع كريات تحمل كل واحدة منها رقما زوجيا.

2- احسب p_2 احتمال سحب كرية واحدة على الأقل تحمل رقما فرديا.

3- احسب p_3 احتمال سحب أربع كريات تحمل أرقاما زوجية أو أربع كريات تحمل أرقاما فردية.

4- احسب p_4 احتمال سحب أربع كريات تحمل أرقاما فردية ومن لونين مختلفين.

5- احسب p_5 احتمال سحب كرية واحدة على الأقل تحمل رقما زوجيا أو كل الكريات من نفس اللون.

6- احسب p_6 احتمال سحب كريتين فقط تحمل كل منهما رقما فرديا إذا علمت أنّهما من نفس اللون.

7- ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات السوداء المتبقية في الكيس.

أ) برّر أنّ قيم المتغيّر العشوائي هي: 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6.

ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X. ثم بيّن أنّ $E(X)=\frac{22}{5}$، واحسب $p(X^2-3X\leq 0)$.

II- نسحب الآن كرية من الكيس، إذا كان ترقيمها من مضاعفات 3 نرجعها إلى الكيس ونسحب كرية ثانية، وإذا كانت غير ذلك نضعها جانبا ونسحب كرية ثانية من الكيس. الحدث A_1: سحب الكرية الأولى التي ترقيمها من مضاعفات 3، والحدث A_2: سحب الكرية الثانية التي ترقيمها من مضاعفات 3. أنشئ شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية، ثم احسب $p(A_2)$ احتمال أن يكون في السحب الثاني كرية ترقيمها من مضاعفات 3.

(في كل التمرين، تُعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = 8$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{u_n + 4}$.

1- أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $u_n > 0$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما. استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

2- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} \leq \dfrac{3}{4}u_n$ ، وأنّ $u_n \leq 8\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \dfrac{1}{\frac{9}{8}\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1}$. احسب مرّة أخرى نهاية u_n.

4- لتكن (v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = 1 + \dfrac{a}{u_n}$.

أ) عيّن قيمة العدد الحقيقي a حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{4}{3}$.

ب) نضع $a = 1$، احسب بدلالة n: $S_n = \dfrac{1}{u_0} + \dfrac{1}{u_1} + \dots + \dfrac{1}{u_n}$ و $S'_n = v_0 + 3v_1 + \dots + 3^n v_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f و g الدالتان المعرّفتان على $[-1;+\infty[$ بـ: $f(x) = 3x^2 - 6x(1 - e^{-x})$ و $g(x) = 3x^2 - 6x$.

وليكن $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ تمثيلهما البياني على الترتيب في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- بيّن أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2- أ) بيّن أنّ $f'(x) = 6(x-1)(1 - e^{-x})$ ، ثم ادرس إشارة $f'(x)$ على $[-1;+\infty[$.

ب) شكّل جدول تغيرات كل من f و g على المجال $[-1;+\infty[$.

3- بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[1;+\infty[$. تحقّق أنّ $1 < \alpha < 2$ ، ثم أعط حصرا للعدد α بتقريب 10^{-1}.

4- أ) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)]$. فسّر النتيجة بيانيا.

ب) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمنحني $(\mathscr{C}')$، ثم ارسم $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$.

5- بيّن أنّ معادلة المماس للمنحني $(\mathscr{C})$ عند $x_0 = \alpha$ هي $y = 3\alpha(\alpha - 1)(x - \alpha)$.

6- أ) عيّن العددين الحقيقيين a و b ، بحيث تكون الدالة $x \mapsto (ax+b)e^{-x}$ أصلية الدالة $x \mapsto xe^{-x}$.

ب) نضع $I_\alpha = \int_0^\alpha [f(x) - g(x)]dx$. بيّن أنّ $I_\alpha = 3\alpha(\alpha - 1)$ ، ثم أعط تفسيرا بيانيا للعدد I_α.

7- h الدالة العددية المعرّفة على $[-1;+\infty[$ بـ: $\begin{cases} h(x) = f(x) & -1 \leq x \leq 0 \\ h(x) = g(x) & x > 0 \end{cases}$ و $(\mathscr{H})$ تمثيلها البياني.

أ) بيّن أنّ h غير قابلة للاشتقاق عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$. ماذا تمثل النقطة O بالنسبة لـ$(\mathscr{H})$؟

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة h على $[-1;+\infty[$.

جـ) ارسم نصفي المماسين لـ$(\mathscr{H})$ عند $x_0 = 0$ ، والمنحني $(\mathscr{H})$ في معلم آخر.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التبرير.

	السؤال	الإجابة أ)	الإجابة ب)	الإجابة ج)
1	المنحني $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x}{e^x+1}$، يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته:	$y=x-1$	$y=x+1$	$y=x$
2	الدالة الأصلية للدالة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\dfrac{1}{x(\ln x+2)}$. والتي تنعدم عند $\dfrac{1}{e}$ هي:	$\dfrac{(\ln x+2)^2}{2}$	$\ln(\ln x+2)+1$	$\ln(\ln x+2)$
3	المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي $n\in\mathbb{N}^*$ بالعبارة: $v_n=n-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$، هي متتالية:	متزايدة تماما ومتباعدة	متناقصة تماما ومتباعدة	متزايدة تماما ومتقاربة
4	المتتالية المعرّفة بـ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $u_n=\int_n^{n+1}e^{2x}\,dx$. نضع $S_n=u_0+u_1+...+u_n$، عبارة S_n هي:	$\frac{1}{2}\left(e^{2n+2}-1\right)$	$\frac{1}{2}\left(e^{2n+2}-e^{2n}\right)$	$\frac{1}{2}\left(e^{2n+2}+1\right)$
5	$\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(e^{2x}-2x+3)-x]$ تساوي:	$-\infty$	$+\infty$	0
6	حلُّ المعادلة التفاضلية $y'+y=(2x+1)e^{-x}$، الذي يحقّق $y(-1)=0$ هو:	$(x^2-1)e^{-x}$	$(x^2+x+1)e^{-x}$	$(x^2+x)e^{-x}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لدينا ثلاثة أقفاص، في كل قفص عشرة طيور. القفص C_1 يحتوي على 6 من طائر الحسون (A) و4 من الكناري (B)، القفص C_2 يحتوي على 5 من طائر الحسون (A) و5 من الكناري (B)، القفص C_3 يحتوي على 7 من طائر الحسون (A) و3 من الكناري (B).

نرمي زهرة نرد مكعبة ومتوازنة لها ستة أوجه مرقّمة من 1 إلى 6. إذا ظهر الوجه الذي يحمل الرقم 3 نسحب طائرا واحدا من القفص C_1، وإذا ظهر الوجه الذي يحمل رقما زوجيا نسحب طائرا واحدا من القفص C_2، وإذا ظهر غير ذلك نسحب طائرا واحدا من القفص C_3.

1- أنشئ شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية، ثم بيّن أنّ احتمال سحب طائر الحسون $P(\mathrm{A})=\dfrac{7}{12}$.

2- إذا سحبنا طائر الحسون، ما احتمال أن يكون من القفص C_1؟

3- نضيف إلى القفص C_2، n طيرا من طائر الحسون (A) ثم نكرّر عملية السحب السابقة.

أ) بيّن أنّ احتمال سحب الكناري $P(\mathrm{B})=\dfrac{n+25}{6(n+10)}$، ثم عيّن أكبر قيمة للعدد n بحيث $P(\mathrm{B})>\dfrac{1}{4}$.

ب) عيّن قيمة n حتى تكون الحادثتان: السحب من C_2 وسحب الكناري (B) مستقلتين.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرّفة بحدها الأول $u_0=\alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=(u_n-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}$.

1- عيّن قيم العدد الحقيقي α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

نفرض في باقي التمرين أنّ المتتالية (u_n) غير ثابتة وأنّ $\alpha=\sqrt{2}+\frac{1}{2}$.

2- أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $\sqrt{2}<u_n<2$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما. استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

3- (v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\ln(u_n-\sqrt{2})$.

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها وحدها الأول.

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n. تأكّد من النهاية المحصل عليها في (2- ب).

ج) نضع من أجل كلّ $n\in\mathbb{N}$، $S_n=\frac{v_0}{2^0}+\frac{v_1}{2^1}+\frac{v_2}{2^2}+...+\frac{v_n}{2^n}$. بيّن أنّ: $S_n=(-n-1)\ln 2$.

د) نضع من أجل كلّ $n\in\mathbb{N}^*$، $S'_n=\frac{1}{v_0\times v_2}+\frac{1}{v_1\times v_3}+...+\frac{1}{v_{n-1}\times v_{n+1}}$. احسب S'_n بدلالة n.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-e+e\ln x$

1- احسب $g'(x)$ ، ثم بيّن أنّ الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0\,;+\infty[$.

2- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}54<\alpha<1{,}55$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(\frac{x-e}{x}\right)\ln x$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستو المزود بالمعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أثبت أنّه من أجل كل $x>0$ فإن: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$. استنتج اتجاه تغير الدالة f.

2- احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ (أعط تفسيرا بيانيا) و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3- أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$. ماذا يمكن قوله عن المنحني $(\mathscr{C})$ والمنحني $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة $\ln$؟

ب) ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لـ $(\mathscr{C}')$، وكذلك وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لحامل محور الفواصل.

4- أ) بيّن أنّ $f(\alpha)=2-\left(\frac{\alpha}{e}+\frac{e}{\alpha}\right)$. باستخدام حصر العدد α، بيّن أنّ $-0{,}34<f(\alpha)<-0{,}32$.

ب) احسب $f(4)$ و $f(6)$ ثم ارسم $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$. $\|\vec{i}\|=1\text{cm}$ و $\|\vec{j}\|=2\text{cm}$.

ج) باستعمال المنحني $(\mathscr{C})$ عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x)=f(m)$ حلين متمايزين، كل منهما أكبر تماما من 1.

5- M_0 نقطة من $(\mathscr{C})$ فاصلتها x_0 و (Tx_0) المماس للمنحني $(\mathscr{C})$ في النقطة M_0. بيّن أنّ (Tx_0) يشمل النقطة $A\left(0\,;-\frac{1}{2}\right)$ إذا تحقّق: $(x_0-2e)(-1+2\ln x_0)=0$. استنتج عدد المماسات لـ $(\mathscr{C})$ التي تشمل A.

6- λ عدد حقيقي أكبر من 1. احسب بـ cm^2 المساحة $A(\lambda)$ لمجموعة النقط $M(x\,;y)$ من المستوي حيث: $1\le x\le\lambda$ و $f(x)\le y\le\ln x$ ، ثم احسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{A(\lambda)}{\lambda}$. (ضع $t=\ln\lambda$ وتذكّر أنّ $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^2}=+\infty$)

انتهى الموضوع الثاني

وفّقكم الله أعزائي الطلاب في البكالوريا

تصحيح البكالوريا التجريبي 2022م

الموضوع الأول

تمرين 1:

1) الإجابة الصحيحة هي ب) لأن:

$$\left(\frac{\sqrt3 - i}{2}\right)^{2022} = \left[e^{i(-\frac{\pi}{6})}\right]^{2022} = e^{i(-\frac{2022\pi}{6})} = e^{i(-\pi)} = -1$$

2) الإجابة الصحيحة هي أ) لأن:

$$\frac{6e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2e^{i(-\frac{\pi}{2})}} = \frac{6}{2} e^{i(\frac{3\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2})} = 3e^{i\frac{23\pi}{12}} = 3e^{i(-\frac{\pi}{12})}$$

3) الإجابة الصحيحة هي جـ) لأن:

$$\left(\frac{1+i\sqrt3}{1-i}\right)^2 = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt2 e^{i(-\frac{\pi}{4})}}\right)^2 = \left(\sqrt2 e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

4) الإجابة الصحيحة هي أ) لأن:

$$(x+iy)^2 - (x+iy)(x-iy) + 2 = 0$$

$$-2y^2+2+2ixy=0$$

$$\begin{cases} -2y^2+2=0 \\ 2xy=0\end{cases}$$

نجد: $x=0$ و $y=1$ أو $y=-1$

ومنه: $S=\{-i; i\}$

5) الإجابة الصحيحة هي جـ) لأن:

$$|x+iy+i| = |x+i(y+1)| = \sqrt{x^2+(y+1)^2} = 1$$

$x^2+(y+1)^2=1$ (هي دائرة مركزها $\Omega(0,-1)$ و $r=1$)

تمرين 2:

I-1) $P_1 = \frac{C_7^4}{C_{15}^4} = \frac{1}{39}$

2) $P_2 = 1-P_1 = \frac{38}{39}$

3) $P_3 = \frac{C_8^4+C_7^4}{C_{15}^4} = \frac{1}{13}$

4) $P_4 = \frac{C_5^1\times C_3^3 + C_5^2\times C_3^2 + C_5^3\times C_3^1}{C_{15}^4} = \frac{1}{21}$

5) $P_5 = 1-P_4 = \frac{20}{21}$ (الحادثة العكسية)

6) $P_6 = \frac{C_5^2\times C_4^2 + C_3^2\times C_3^2}{C_9^4+C_6^4} = \frac{23}{47}$

7) $P(X=2) = \frac{C_6^4}{C_{15}^4} = \frac{1}{91}$; $P(X=3) = \frac{C_9^1 \cdot C_6^3}{C_{15}^4} = \frac{12}{91}$

$P(X=4) = \frac{C_9^2\times C_6^2}{C_{15}^4} = \frac{36}{91}$; $P(X=5)=\frac{C_9^3\cdot C_6^1}{C_{15}^4} = \frac{24}{65}$

$P(X=6) = \frac{C_9^4}{C_{15}^4} = \frac{6}{65}$

x_i	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{91}$	$\frac{12}{91}$	$\frac{36}{91}$	$\frac{24}{65}$	$\frac{6}{65}$

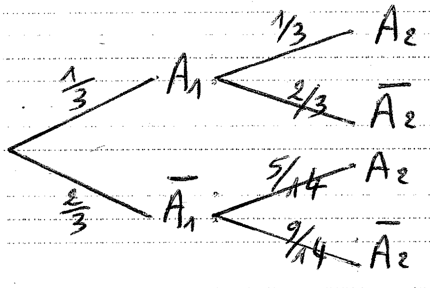
$$E(X) = \frac{2}{91}+\frac{36}{91}+\frac{144}{91}+\frac{120}{65}+\frac{36}{65} = \frac{22}{5}$$

$$P(X^2-3X\le0) = P(0\le X\le3) = P(X=2)+P(X=3)$$

$+ \ 0 \ - \ 3 \ +$

$$P(X^2-3X\le 0) = \frac{1}{7}$$

II-



$P(A_2) = \frac13\times\frac13 + \frac23\times\frac{5}{14}$

$P(A_2)=\frac{22}{63}$

تمرين 3:

1) أ) $n=0$: $u_0=8$ ، $8>0$ (محققة)

نفرض أن $u_n>0$ ونبرهن أن $u_{n+1}>0$

لدينا: $u_n>0$: $3u_n>0$ و $u_n+4>0$ ومنه $\frac{3u_n}{u_n+4}>0$

$u_{n+1}>0$ ومنه $\forall n\in\mathbb{N}$ ، $u_n>0$.

ب) $u_{n+1}-u_n = \frac{3u_n}{u_n+4} - u_n = \frac{-u_n(u_n+1)}{u_n+4} < 0$

ومنه (u_n) متناقصة تماما.

(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

2) $u_{n+1} - \frac34 u_n = \frac{3u_n}{u_n+4} - \frac34 u_n = \frac{-3u_n^2}{4(u_n+4)} < 0$

$u_n \le 8\left(\frac34\right)^n$: $n=0$: $u_0 \le 8\left(\frac34\right)^0$ (محققة)

نفرض أن $u_n\le 8\left(\frac34\right)^n$ ونبرهن أن $u_{n+1}\le 8\left(\frac34\right)^{n+1}$

$\left(\frac34\right)\times u_n \le 8\left(\frac34\right)^n \times \left(\frac34\right)$ ، نجد $\frac34 u_n \le 8\left(\frac34\right)^{n+1}$.

ولدينا: $u_{n+1}\le\frac34 u_n$ ومنه: $u_{n+1}\le 8\left(\frac34\right)^{n+1}$

$\forall n\in\mathbb N$: $u_n\le 8\left(\frac34\right)^n$

$\lim_{+\infty}\left(\frac34\right)^n = 0$ و $0<u_n\le 8\left(\frac34\right)^n$ ومنه $\lim_{+\infty} u_n = 0$

(مبرهنة الحصر)

3) $n=0$: $u_0 = \frac{1}{\frac98 - 1} = 8$ (محققة)

نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن صحة $P(n+1)$: $u_{n+1} = \frac{1}{\frac98\left(\frac43\right)^{n+1}-1}$

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n+4} = \frac{\frac{3}{\frac98\left(\frac43\right)^n-1}}{\frac{1}{\frac98\left(\frac43\right)^n-1}+4} = \frac{3}{4\cdot\frac98\left(\frac43\right)^n - 3}$$

$$= \frac{3}{3\left(\frac98\left(\frac43\right)\left(\frac43\right)^n-1\right)} = \frac{1}{\frac98\left(\frac43\right)^{n+1}-1}$$

ومنه $\forall n\in\mathbb N$: $u_n=\frac{1}{\frac98\left(\frac43\right)^n-1}$

$\lim_{+\infty} u_n = 0$ $\left(\frac43>1\right)$

4) أ) $v_n = 1 + a\left(\frac98\left(\frac43\right)^n - 1\right) = 1-a+a\frac98\left(\frac43\right)^n$

حتى تكون هندسية: $1-a=0$ ومنه $a=1$

ب) $\frac{1}{u_n} = v_n - 1$ ومنه: $S_n = v_0-1+v_1-1+\dots+v_n-1$

$$S_n = v_0+v_1+\dots+v_n-1-1-\dots-1 = v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)-(n+1)$$

$$S_n = \frac98\left(\frac{1-(4/3)^{n+1}}{1-4/3}\right)-n-1 = \frac{-27}{8}\left(1-(4/3)^{n+1}\right)-n-1$$

5) $y = f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha) = 6(\alpha-1)(1-e^{-\alpha})(x-\alpha)$

لدينا $f(\alpha)=0$ ، يعني : $1-e^{-\alpha} = \frac{3\alpha^2}{6\alpha} = \frac{\alpha}{2}$

$y = 6(\alpha-1)\left(\frac{\alpha}{2}\right)(x-\alpha) = 3\alpha(\alpha-1)(x-\alpha)$

6) أ) $\left[(ax+b)e^{-x}\right]' = xe^{-x}$

$(a-b-ax)e^{-x} = xe^{-x}$

$\begin{cases} -a=1 \\ a-b=0 \end{cases}$ نجد $a=-1$ و $b=-1$

ومنه: أصلية xe^{-x} هي $(-x-1)e^{-x}$

ب) $I_\alpha = \int_0^\alpha (f(x)-g(x))\,dx = \int_0^\alpha 6xe^{-x}\,dx$

$I_\alpha = 6\left[(-x-1)e^{-x}\right]_0^\alpha = 6(-\alpha-1)e^{-\alpha}+6$

ولدينا سابقا من $f(\alpha)=0$: $e^{-\alpha} = 1-\frac{\alpha}{2}$

$I_\alpha = 6(-\alpha-1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)+6 = 3\alpha(\alpha-1)$

I_α يُعبّر بالـ u.a المساحة بين (C) ، (C') ، $x=0$ و $x=\alpha$

7) أ) $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x}$

$= \lim_{x \to 0^-} \left(3x-6(1-e^{-x})\right) = 0 = f'_g(0)$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)}{x}$

$= \lim_{x \to 0^+} (3x-6) = -6 = g'_d(0)$

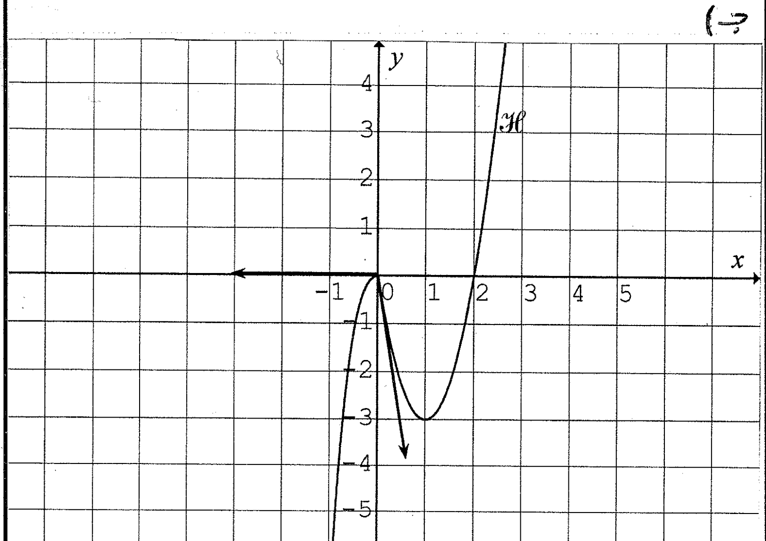
ومنه $h'_g(0) \neq h'_d(0)$ ومنه h غير قابلة للاشتقاق عند 0.

النقطة $O(0,0)$ تمثل نقطة زاوية.

ب)

x	-1		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	$0 \parallel -6$	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$9-6e$	↗	0	↘	-3	↗	$+\infty$

ج)



نضع $w_n = 3^n v_n$ ، $w_n = \frac{9}{8}\cdot 4^n$

w_n متتالية هندسية أساسها 4 و $w_0 = \frac{9}{8}$

$S'_n = \frac{9}{8}\left(\frac{4^{n+1}-1}{4-1}\right) = \frac{3}{8}\left(4^{n+1}-1\right)$

تمرين 4 :

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3x(x-2+2e^{-x}) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$ (أكبر حد)

2) أ) $f'(x) = 6x-6(1-e^{-x}+xe^{-x})$

$= 6x-6-6e^{-x}(-1+x) = 6(x-1)(1-e^{-x})$

$1-e^{-x}=0$ لما $x=0$ ؛

x	-1		0		1	
		$+$		$-$		$+$

ب)

x	-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$9-6e$	↗	0	↘	$-3+6/e$	↗	$+\infty$

$g'(x) = 6x-6$

x	-1		1	
		$-$	0	$+$

x	-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	9	↘	-3	↗	$+\infty$

3) f مستمرة ومتزايدة على $[1,+\infty[$ و $0 \in \left]-3+\frac{6}{e},+\infty\right[$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α.

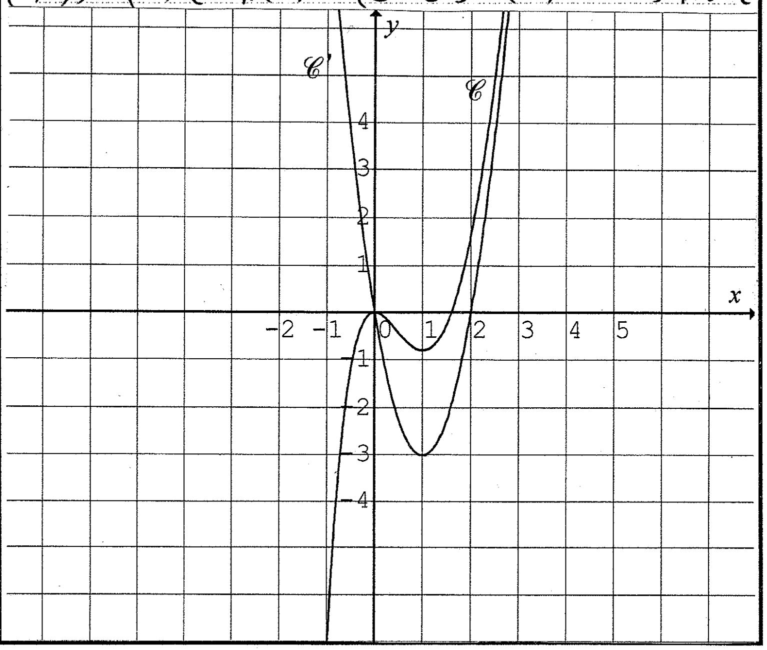
$f(1) \simeq -0{,}8 < 0$ و $f(2) \simeq 1{,}6 > 0$ ، $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$

لأن $f(1{,}6) > 0$ و $f(1{,}5) < 0$.

4) أ) $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-g(x)) = \lim_{x\to+\infty} 6xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} 6\frac{x}{e^x} = 0$

ومنه: (C) و (C') متقاربان بجوار $+\infty$

ب) إشارة $6xe^{-x}$: $x \in [-1,0[$ ، (C) تحت (C') . $x \in]0,+\infty[$ ، (C) فوق (C') ، (C) يقطع (C') عند $(0,0)$



عبد المطلب

تصحيح البكالوريا التجريبي 2022م

الموضوع الثاني

"عبد المطلب"

تمرين 1:

1) الإجابة الصحيحة هي ج) لأن:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-xe^x}{e^x+1}=0$$

2) الإجابة الصحيحة هي ج) لأن:

$G(x)=\ln(\ln x+2)+C$ ؛ $g(x)=\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x+2}$

بما أن $G(\frac{1}{e})=0$ ، $\ln 1+C=0$ ومنه $C=0$

3) لتكن f الدالة المرفقة: $f(x)=x-\ln(1+\frac{1}{x})$

$f'(x)=1+\dfrac{1}{x(x+1)}>0$ على $]0;+\infty[$

و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ إذن (V_n) متزايدة ومتباعدة

4) الإجابة الصحيحة هي أ) لأن:

$$S_n=\int_0^1 e^{2x}dx+\int_1^2 e^{2x}dx+\dots+\int_n^{n+1}e^{2x}dx$$

باستعمال علاقة شال نجد: $S_n=\int_0^{n+1}e^{2x}dx$

$$S_n=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{n+1}=\frac{1}{2}(e^{2n+2}-1)$$

يمكن البرهان على أنها هندسية ثم حساب المجموع أو الجمع طرف لطرف ثم الاختزال.

5) الإجابة الصحيحة هي ب) لأن:

$$\lim_{x\to+\infty}[\ln(e^{2x}-2x+3)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln e^{2x}\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}+\frac{3}{e^{2x}}\right)-x\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln e^{2x}+\ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}+\frac{3}{e^{2x}}\right)-x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x+\ln\left(1-\underbrace{\frac{2x}{e^{2x}}}_{0}+\underbrace{\frac{3}{e^{2x}}}_{0}\right)\right]=+\infty$$

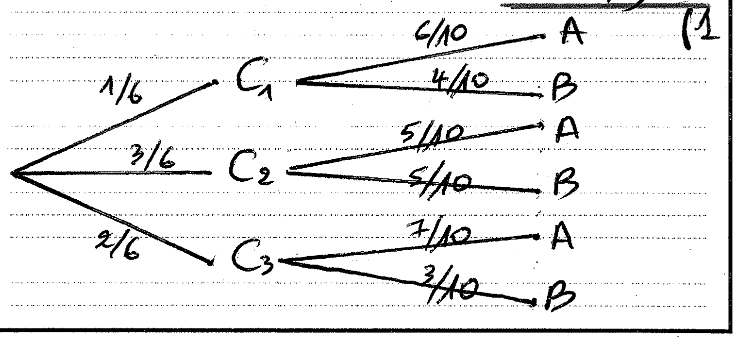
6) الإجابة الصحيحة هي ج) لأن:

$f'(x)=(-x^2+x+1)e^{-x}$ ، $\begin{cases}f(x)=(x^2+x)e^{-x}\\ f(-1)=0\end{cases}$

$f'(x)+f(x)=(2x+1)e^{-x}$

تمرين 2:

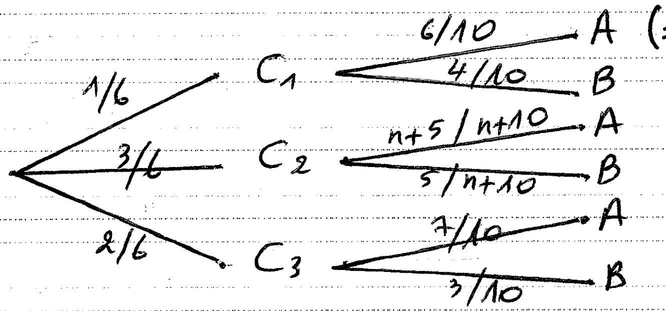
1)



$$P(A)=\frac{1}{6}\times\frac{6}{10}+\frac{3}{6}\times\frac{5}{10}+\frac{2}{6}\times\frac{7}{10}=\frac{35}{60}=\frac{7}{12}$$

2) $P_A(C_1)=\dfrac{P(C_1\cap A)}{P(A)}=\dfrac{1/6\times 6/10}{35/60}=\dfrac{6}{35}$

3)



أ) $P(B)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{4}{10}+\dfrac{3}{6}\times\dfrac{5}{n+10}+\dfrac{2}{6}\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{n+25}{6(n+10)}$

$P(B)>\frac{1}{4}$ يعني: $\dfrac{n+25}{6(n+10)}>\dfrac{1}{4}$ أي $2n+50>3n+30$

$n<20$ ومنه $n=19$

ب) $P(C_2)=\frac{3}{6}$ و $P(B)=\dfrac{n+25}{6(n+10)}$

(C_2) و (B) مستقلان إذا تحقق:

$$P(B\cap C_2)=P(B)\times P(C_2)$$

$$\frac{3}{6}\times\frac{5}{n+10}=\frac{5}{2(n+10)}=\frac{n+25}{12(n+10)}$$

$n+25=30$ ومنه $n=5$

تمرين 3:

1) (u_n) ثابتة يعني: $u_{n+1}=u_n=u_0=\alpha$

$\alpha=(\alpha-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}$ ، $(\alpha-\sqrt{2})(\alpha-\sqrt{2}-1)=0$

$\alpha=\sqrt{2}$ أو $\alpha=\sqrt{2}+1$

2) أ) $n=0$: $u_0=\sqrt{2}+\frac{1}{2}$ ؛ $\sqrt{2}<u_0<2$ (محققة)

نفرض أن $\sqrt{2}<u_n<2$ ونبرهن: $\sqrt{2}<u_{n+1}<2$

لدينا: $\sqrt{2}<u_n<2$ ؛ $0<u_n-\sqrt{2}<2-\sqrt{2}$

$0<(u_n-\sqrt{2})^2<6-4\sqrt{2}$ ؛

$\sqrt{2}<(u_n-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}<6-3\sqrt{2}<2$ (محققة)

$\sqrt{2}<u_{n+1}<2$ ومنه $\forall n\in\mathbb{N}$: $\sqrt{2}<u_n<2$

ب) $u_{n+1}-u_n=(u_n-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}-u_n$

$=(u_n-\sqrt{2})(u_n-\sqrt{2}-1)<0$

لأن $\sqrt{2}<u_n<2$

	$\sqrt{2}$		2	$\sqrt{2}+1$	
$+$	0	$-$		0	$+$

ومنه (u_n) متناقصة تماما.

ج) (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

$$\lim_{+\infty}u_n=\lim_{+\infty}u_{n+1}=\ell$$

$$\ell = (\ell - \sqrt{2})^2 + \sqrt{2}$$

$(\ell - \sqrt{2})(\ell - \sqrt{2} - 1) = 0$ ، $\ell = \sqrt{2}$ مقبول ، $\ell = \sqrt{2}+1$ مرفوض

3) أ) $V_{n+1} = \ln(U_{n+1} - \sqrt{2}) = \ln(U_n - \sqrt{2})^2$

$= 2\ln(U_n - \sqrt{2}) = 2V_n$

(V_n) متتالية هندسية أساسها 2 و $V_0 = -\ln 2$

ب) $V_n = V_0 \cdot q^n = (-\ln 2)\, 2^n$

$V_n = \ln(U_n - \sqrt{2})$ ومنه: $U_n = e^{V_n} + \sqrt{2}$

$U_n = e^{(-\ln 2)2^n} + \sqrt{2}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \sqrt{2}$

ج) $S_n = \frac{V_0}{2^0} + \frac{V_1}{2^1} + \dots + \frac{V_n}{2^n} = \frac{V_0}{2^0} + \frac{V_0 \cdot 2^1}{2^1} + \dots + \frac{V_0 2^n}{2^n}$

$S_n = V_0 + V_0 + \dots + V_0 = (n+1)V_0 = (n+1)(-\ln 2)$

د) $S'_n = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} + \dots + \frac{1}{V_n^2} = \frac{1}{V_0^2 q^2} + \frac{1}{V_0^2 q^4} + \dots + \frac{1}{V_0^2 q^{2n}}$

$S'_n = \frac{1}{V_0^2}\left(q^{-2} + q^{-4} + \dots + q^{-2n}\right) = \frac{1}{V_0^2} q^{-2}\left(\frac{1 - q^{-2n}}{1 - q^{-2}}\right)$

$S'_n = \frac{1}{(\ln 2)^2} \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{3(\ln 2)^2}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

تمرين 4:

I-1) $g'(x) = 1 + \frac{e}{x} = \frac{x+e}{x} > 0$ ومنه g متزايدة

2) g مستمرة ومتزايدة على $]1,54;1,55[$.

$g(1,54) \simeq -0,004 < 0$ و $g(1,55) \simeq 0,02 > 0$ حسب

مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α.

إشارة $g(x)$: 0 ، $-$ ، α ، $+$

II 1) $f'(x) = \frac{e}{x^2}\ln x + \frac{x-e}{x^2} = \frac{e\ln x + x - e}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

f متزايدة لما $x \geq \alpha$ و متناقصة لما $x \leq \alpha$.

2) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{x-e}{x}\right) = -\infty$

$x=0$ مستقيم مقارب لـ (C)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-e}{x}\right) = 1$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

3) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - \ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -e\left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$

ومنه (C') يقارب (C) بجوار $(+\infty)$

ب) وضعية (C) بالنسبة لـ (C'). ندرس إشارة

$f(x) - y = -e\frac{\ln x}{x}$ ، 0 ، $+$ ، 1 ، $-$

$x>1$: (C) أسفل (C') . $0<x<1$: (C) أعلى (C')

(C') يقطع (C) عند النقطة $(1,0)$.

وضعية (C) بالنسبة لـ (Ox): ندرس إشارة $f(x)$.

0 ، $+$ ، 1 ، $-$ ، e ، $+$ ، $f(x) = \left(\frac{x-e}{x}\right)\ln x$

$1<x<e$: (C) أسفل (Ox) ، (C) يقطع (Ox) عند

$x \in]0,1[\cup]e,+\infty[$: (C) أعلى (Ox) . $(e,0)$ و $(1,0)$.

4) أ) $f(\alpha) = \left(\frac{\alpha - e}{\alpha}\right)\ln\alpha$ و لدينا: $g(\alpha)=0$ ،

$\alpha - e + e\ln\alpha = 0$ ، $\ln\alpha = \frac{e-\alpha}{e}$ نعوضها في $f(\alpha)$

$f(\alpha) = \left(\frac{\alpha-e}{\alpha}\right)\left(\frac{e-\alpha}{e}\right)$ ومنه: $f(\alpha) = 2 - \frac{\alpha}{e} - \frac{e}{\alpha}$

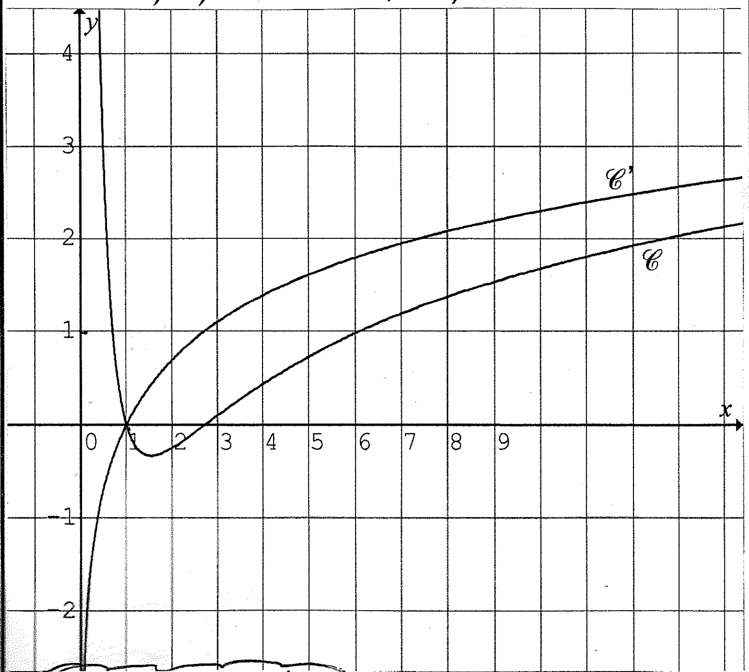
$1,54 < \alpha < 1,55$ ، $0,566 < \frac{\alpha}{e} < 0,57$.

$0,645 < \frac{1}{\alpha} < 0,649$ ؛ $1,754 < \frac{e}{\alpha} < 1,765$

$2,319 < \frac{\alpha}{e} + \frac{e}{\alpha} < 2,334$ ؛ $-2,334 < -\left(\frac{\alpha}{e} + \frac{e}{\alpha}\right) < -2,319$

ومنه: $-0,34 < 2 - \left(\frac{\alpha}{e} + \frac{e}{\alpha}\right) < -0,32$: $-0,34 < f(\alpha) < -0,32$

ب) $f(4) \simeq 0,44$ و $f(6) \simeq 0,98$



ج) $f(\alpha) < f(m) < 0$ ومنه $m \in]1;\alpha[\cup]\alpha;e[$

5) $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ يشمل $A\left(0;-\frac{1}{2}\right)$

$-\frac{1}{2} = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0)$

$-\frac{1}{2} = \left(\frac{x_0 - e + e\ln x_0}{x_0^2}\right)(-x_0) + \left(\frac{x_0 - e}{x_0}\right)\ln x_0$

$-\frac{1}{2} = \frac{-x_0 + e - 2e\ln x_0 + x_0\ln x_0}{x_0}$

$-2x_0 + 2e - 4e\ln x_0 + 2x_0\ln x_0 = -x_0$

$-x_0 + 2e + 2\ln x_0 \cdot (-2e + x_0) = 0$

$(x_0 - 2e)(-1 + 2\ln x_0) = 0$ (و هو المطلوب)

$1 - 2\ln x_0 = 0$ لما $x_0 = \sqrt{e}$ و $2e - x_0 = 0$ لما $x_0 = 2e$

هناك مماسين عند $2e$ و $\sqrt{e}$ يشملان النقطة A

6) $A(\lambda) = \int_1^\lambda (\ln x - f(x))\,dx = \int_1^\lambda e\frac{\ln x}{x}\,dx = \left[e\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^\lambda$

$A(\lambda) = e\frac{(\ln\lambda)^2}{2}\, u.a$ ومنه $A(\lambda) = e(\ln\lambda)^2\, cm^2$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{A(\lambda)}{\lambda} = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} e\frac{(\ln\lambda)^2}{\lambda} = \lim\limits_{t\to+\infty} e\left(\frac{t^2}{e^t}\right)$

$= \lim\limits_{t\to+\infty} e\frac{1}{\left(\frac{e^t}{t^2}\right)} = 0$

"عبد المطلب"