

الفرض الأول في مادة الرياضيات للشكلي الأول

ملاحظة: التنظيم والدقة في الإجابة تؤخذ بعين الاعتبار.

التمرين 01:

- I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = x^3 + 6x + 12$.
1. ادرس اتجاه تغير الدالة g .
 2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]-1.48; -1.47[$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.
- II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = \frac{x^3-6}{x^2+2}$.
- وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1. أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - ب) بين أن من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$. ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
 2. أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .
 - ب) ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .
 3. بين أن $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.
 4. ارسم المستقيم (Δ) والمنحني (C_f) .
 5. أثبت أن من أجل كل $x \in [\alpha; 0]$ ، $-3 \leq f(x) \leq f(\alpha)$.

تعوّد على منهجية الحل والدقة في التعبير.

حل الفرض الأول في مادة الرياضيات للشكلي الأول

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = x^3 + 6x + 12$.

1. ادرس اتجاه تغير الدالة g .

لدينا الدالة g قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} ودالتها المشتقة: $g'(x) = 3x^2 + 6$.

$g'(x)$ موجبة تماما على \mathbb{R} ومنه الدالة g متزايدة تماما على \mathbb{R} .

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]-1.48; -1.47[$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على \mathbb{R} ، ولدينا $g(-1.48) \times g(-1.47) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $\alpha \in]-1.48; -1.47[$ ومنه نستنتج جدول إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

ب) بين أن من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2}$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول

تغيراتها.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 2) - (x^3 - 6)2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{3x^4 + 6x^2 - 2x^4 + 12x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{x^4 + 6x^2 + 12x}{(x^2 + 2)^2}$$

$$= \frac{x(x^3 + 6x + 12)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $(x^2 + 2)^2$ موجب تماما ومنه إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $xg(x)$. إذن:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
x	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty; \alpha[$ ، متناقصة تماما على $]\alpha; 0[$ ومتزايدة تماما على $]0; +\infty[$.
ومنه جدول تغيراتها:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	-3	$+\infty$

2. أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 - 6}{x^2 + 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 6 - x^3 - 2x}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x - 6}{x^2 + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x - 6}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x} = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) هو مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$ وبجوار $+\infty$ أيضا.

(ب) ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x) - x = \frac{-2x-6}{x^2+2}$ ومنه:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$-2x-6$	$+$	0	$-$
x^2+2	$+$		$+$
$f(x)-x$	$+$	0	$-$

إذن يكون (C_f) فوق (Δ) على $]-\infty; -3[$ ويكون تحته على $]-3; +\infty[$ ، ويقطعه في النقطة $A(-3; -3)$

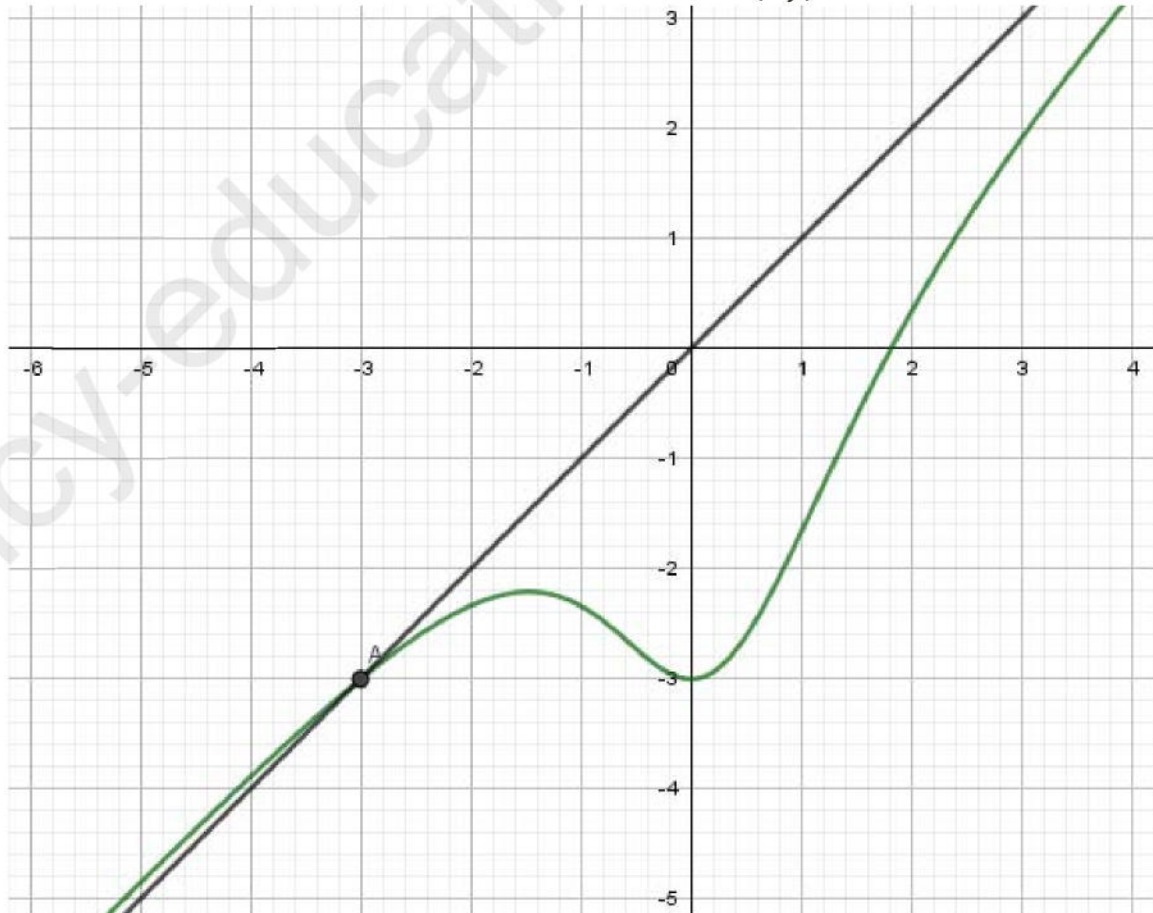
3. بين أن $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

لدينا $g(\alpha) = 0$ ومنه $\alpha^3 + 6\alpha + 12 = 0$ ومنه $\alpha^3 = -6\alpha - 12$ ومنه $\alpha^2 = \frac{-6\alpha - 12}{\alpha}$ ومنه

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - 6}{\alpha^2 + 2} = \frac{-6\alpha - 12 - 6}{\frac{-6\alpha - 12}{\alpha} + 2} = \frac{-6\alpha - 18}{\frac{-6\alpha - 12 + 2\alpha}{\alpha}} = \frac{\alpha(-6\alpha - 18)}{-4\alpha - 12}$$

$$= \frac{-6\alpha(\alpha + 3)}{-4(\alpha + 3)} = \frac{3}{2}\alpha$$

4. ارسم المستقيم (Δ) والمنحني (C_f) .



5. أثبت أن من أجل كل $x \in [\alpha; 0]$ ، $-3 \leq f(x) \leq f(\alpha)$. (مباشرة من جدول التغيرات)