الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي — دورة: **2021**

الشعبة: تقني رياضي — ثانوية مرسى الحجاج (وهران)

تصحيح اختبار مادة: الرياضيات — **إعداد: الأستاذ قوعيش**

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $(E)...2011x-1432y=31$

أ) بين أن العدد 2011 أولي .

لدينا $\sqrt{2011}\approx 44{,}8$ والعدد 2011 لا يقبل القسمة على أي عدد أولي من بين الأعداد الأولية الأصغر من 44

ب) باستعمال خوارزمية إقليدس عين حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

لدينا :

$$579=2011-1\times1432$$
$$274=1432-2\times579$$
$$31=579-2\times274$$

ومنه : $\begin{cases}31=579-2\times(1432-2\times579)\\=-2\times1432+5\times579\\=-2\times1432+5\times(2011-1\times1432)\\=5\times2011-7\times1432\end{cases}$

بالمطابقة نجد $(x_0;y_0)=(5;7)$

لدينا : $\begin{cases}2011x-1432y=31\\2011x_0-1432y_0=31\end{cases}$ بالطرح نجد : $2011(x-x_0)=1432(y-y_0)$ أي :

$2011(x-5)=1432(y-7)$.

لدينا $1432/2011(x-5)$ و 1432 أولي مع 2011 إذن حسب مبرهنة غوص $1432/x-5$

ومنه $x=1432k+5$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ، وبالتعويض في المعادلة (E) نجد : $y=2011k+7$

ومنه : $(x;y)=(1432k+5;2011k+7)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

2) **أ)** عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 ، ثم جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7 .

$2^0\equiv1[7]$ ، $2^1\equiv2[7]$ ، $2^2\equiv4[7]$ ، $2^3\equiv1[7]$ ومنه البواقي دورية ودورها 3 إذن من أجل كل عدد طبيعي k لدينا : $2^{3k}\equiv1[7]$ ، $2^{3k+1}\equiv2[7]$ ، $2^{3k+2}\equiv4[7]$.

لدينا $2011\equiv2[7]$ ومنه $2011^{1432^{2012}}\equiv2^{1432^{2012}}[7]$

من جهة أخرى $1432 \equiv 1[3]$ ومنه $1432^{2012} \equiv 1^{2012}[3]$ أي $1432^{2012} \equiv 1^{2012}[3]$ ومنه $1432^{2012} = 3k' + 1$ حيث $k' \in \mathbb{N}$ إذن $2^{1432^{2012}} \equiv 2[7]$ ومنه $2011^{1432^{2012}} \equiv 2\ [7]$ إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7 هو 2 .

ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0[7]$.

لدينا $2010 \equiv 1[7] \Leftrightarrow 2010^n \equiv 1^n[7] \Leftrightarrow 2010^n \equiv 1[7]$

$2011 \equiv 2[7] \Leftrightarrow 2011^n \equiv 2^n[7]$

$1432 \equiv 4[7] \Leftrightarrow 1432^n \equiv 2^{2n}[7]$

ومنه $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 1 + 2^n + 2^{2n}[7]$ إذن :

$2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0[7] \Leftrightarrow 1 + 2^n + 2^{2n} \equiv 0[7]$

$\Leftrightarrow 2^n + 2^{2n} \equiv -1[7]$

$\Leftrightarrow 2^n + 2^{2n} \equiv 6[7]$

ليكن $k \in \mathbb{N}$

من أجل $n = 3k$: $2^n + 2^{2n} = 2^{3k} + 2^{3(2k)} \equiv 2[7]$ (مرفوض)

من أجل $n = 3k+1$: $2^n + 2^{2n} = 2^{3k+1} + 2^{2(3k+1)} = 2^{3k+1} + 2^{3(2k)+2} \equiv 6[7]$ (مقبول)

من أجل $n = 3k+2$: $2^n + 2^{2n} = 2^{3k+2} + 2^{2(3k+2)} = 2^{3k+2} + 2^{3(2k+1)+1} \equiv 6[7]$ (مقبول)

إذن قيم n هي : $n = 3k+1$ أو $n = 3k+2$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

3) N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\gamma\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 9 حيث α ، β و γ تشكل حدودا متتابعة بهذا الترتيب لمتتالية حسابية متزايدة تماما و الثنائية $(\beta;\gamma)$ حل للمعادلة (E) .

أ) عين α ، β و γ .

$N = \overline{2\gamma\alpha\beta}^9 = \beta + \alpha \times 9 + \gamma \times 9^2 + 2 \times 9^3 = \beta + 9\alpha + 81\gamma + 54$ مع الشروط : $\begin{cases} 0 \le \alpha < 9 \\ 0 \le \beta < 9 \\ 0 \le \gamma < 9 \end{cases}$

الثنائية $(\beta;\gamma)$ حل للمعادلة (E) معناه يوجد $k \in \mathbb{Z}$ بحيث : $\beta = 1432k + 5$ و $\gamma = 2011k + 7$

$$0 \le \beta < 9 \Leftrightarrow 0 \le 1432k + 5 < 9 \Leftrightarrow -\frac{5}{1432} \le k < \frac{4}{1432} \Leftrightarrow -0,0035 \le k < 0,0028$$

وبما أن $k \in \mathbb{Z}$ فإن $k = 0$ بالتعويض نجد $\beta = 5$ و $\gamma = 7$.

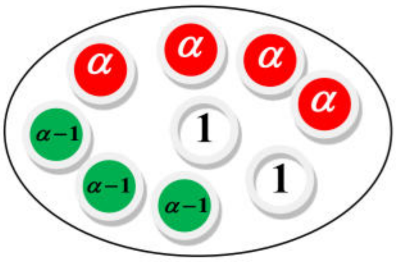
α ، β و γ تشكل حدودا متتابعة بهذا الترتيب لمتتالية حسابية متزايدة تماما معناه $\alpha + \gamma = 2\beta$ ومنه $\alpha = 2\beta - \gamma = 3$.

ب) أكتب N في النظام العشري .

$N = \beta + 9\alpha + 81\gamma + 54 = 2057$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

يحوي كيس على أربع كريات حمراء تحمل الرقم α و ثلاث كريات خضراء تحمل الرقم $\alpha - 1$ و كريتين بيضاوين تحملان الرقم 1 ، حيث α عدد طبيعي غير معدوم . الكريات متماثلة ولا نميز بينها عند اللمس .
نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريات في آن واحد .
نعتبر الحوادث التالية : A " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر" ، B "الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس العدد" و C " الحصول على كريتين بالضبط تحملان الرقم $\alpha - 1$ " .



1) أ) أحسب إحتمال كل من الحوادث A ، B و C .

A " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر"

نميز حالتين :

سحب 3 كريات من بينها واحدة بيضاء

سحب 3 كريات ولا توجد من بينها أي كرية بيضاء .

ومنه $P(A)=\dfrac{C_2^1\times C_7^2+C_7^3}{C_9^3}=\dfrac{11}{12}$

B "الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس العدد"

نميز حالتين :

سحب 3 كريات لها نفس الرقم α .

سحب 3 كريات لها نفس الرقم $\alpha-1$.

ومنه $P(B)=\dfrac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\dfrac{5}{84}$

C " الحصول على كريتين بالضبط تحملان الرقم $\alpha-1$"

معناه سحب 3 كريات من بينها كريتين تحملان الرقم $\alpha-1$ أما الكرية الثالثة تحمل إما الرقم 1 أو الرقم α

ومنه $P(C)=\dfrac{C_3^2\times C_6^1}{C_9^3}=\dfrac{3}{14}$

ب) ما هو احتمال الحصول على ثلاث كريات تحمل ألوان العلم الوطني ؟

معناه سحب 3 كريات من 3 ألوان مختلفة مثنى مثنى ومنه :

$$P(D)=\frac{C_3^1\times C_2^1\times C_4^1}{C_9^3}=\frac{2}{7}$$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع الأرقام الظاهرة على الكريات الحمراء المسحوبة والذي يأخذ القيمة 0 إذا لم يتم سحب أي كرية حمراء .

أ) برر أن القيم الممكنة لـ X هي $\{0,\alpha,2\alpha,3\alpha\}$ ثم عرف قانون احتماله .

إذا لم يتم سحب أي كرية حمراء فإن $X=0$

إذا سحبنا كرية حمراء واحدة فإن $X=\alpha$

إذا سحبنا كريتين حمراوين فإن $X=\alpha+\alpha=2\alpha$

إذا كانت كل الكريات الثلاث حمراء فإن $X=\alpha+\alpha+\alpha=3\alpha$

ومنه $X\in\{0,\alpha,2\alpha,3\alpha\}$

$$P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{10}{84}$$

$$P(X=\alpha)=\frac{C_4^1\times C_5^2}{C_9^3}=\frac{40}{84}$$

$$P(X=2\alpha)=\frac{C_4^2\times C_5^1}{C_9^3}=\frac{30}{84}$$

$$P(X=3\alpha)=\frac{C_4^3}{C_9^3}=\frac{4}{84}$$

$X=X_i$	0	α	2α	3α
$P(X=X_i)$	$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$

ب) أحسب بدلالة α الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X ، ثم عين قيمة α من أجل $|E(X)-1|\le 2$.

$$E(X)=0\times\frac{10}{84}+\alpha\times\frac{40}{84}+2\alpha\times\frac{30}{84}+3\alpha\times\frac{4}{84}=\frac{4}{3}\alpha$$

$$|E(X)-1|\le 2\Leftrightarrow -2\le E(X)-1\le 2\Leftrightarrow -1\le E(X)\le 3\Leftrightarrow -1\le\frac{4}{3}\alpha\le 3\Leftrightarrow -\frac{3}{4}\le\alpha\le\frac{9}{4}\Leftrightarrow -0,75\le\alpha\le 1,25$$

بما أن α عدد طبيعي غير معدوم فإن $\alpha\in\{1;2\}$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_1=-2$ ، و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$u_{n+1}=\dfrac{3(n+1)u_n-(8n+12)}{n}$.

1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n<0$.

من أجل $n=1$ لدينا $u_1=-2<0$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=1$.

نفرض أن $u_n<0$ ونبرهن أن $u_{n+1}<0$.

لدينا $u_n<0\Leftrightarrow 3(n+1)u_n<0$ لأنه $\forall n\in\mathbb{N}^*,3(n+1)>0$

كذلك $\forall n\in\mathbb{N}^*,8n+12>0$ ومنه $\forall n\in\mathbb{N}^*,-(8n+12)<0$

بالجمع نجد $3(n+1)u_n-(8n+12)<0$ وبما أن $n>0$ فإن $\dfrac{3(n+1)u_n-(8n+12)}{n}<0$ ومنه $u_{n+1}<0$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$. ومنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n<0$

ب) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

لدينا $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3(n+1)u_n-(8n+12)}{n}-u_n=\dfrac{3(n+1)u_n-(8n+12)-nu_n}{n}=\dfrac{(2n+3)(u_n-4)}{n}$

بما أنه $\forall n\in\mathbb{N}^*,u_n<0$ فإن $u_n<4$ ومنه $u_n-4<0$ وبما أن $n>0$ و $2n+3>0$ فإن $\dfrac{(2n+3)(u_n-4)}{n}<0$ ومنه $\forall n\in\mathbb{N}^*,u_{n+1}-u_n<0$ إذن (u_n) متناقصة تماما .

2) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي : $v_n=\dfrac{4-u_n}{n}$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يطلب تعيين حدها الأول ، ثم عبر عن v_n بدلالة n .

$$v_{n+1}=\frac{4-u_{n+1}}{n}=\frac{4-\dfrac{3(n+1)u_n-(8n+12)}{n}}{n}=\frac{4n-3(n+1)u_n+8n+12}{n(n+1)}=\frac{-3(n+1)u_n+12(n+1)}{n(n+1)}$$

ومنه $v_{n+1}=\dfrac{-3u_n+12}{n}=3\left(\dfrac{4-u_n}{n}\right)=3v_n$ إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 .

حدها الأول : $v_1=6$.

ب) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $u_n = 4-2n\times 3^n$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

لدينا $v_n = v_1\times q^{n-1} = 6\times 3^{n-1} = 2\times 3^n$ ومن جهة أخرى لدينا :

$$v_n = \frac{4-u_n}{n} \Leftrightarrow 4-u_n = nv_n \Leftrightarrow u_n = 4-nv_n = 4-2n\times 3^n$$

$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty \end{cases}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 4-2n\times 3^n = -\infty$ ، لاحظ أن (u_n) متباعدة .

ج) أحسب بدلالة n الجداء : $P_n = (4-u_1)(4-u_2)...(4-u_n)$.

لدينا $\forall n\in\mathbb{N}^*, nv_n = 4-u_n$ ومنه :

$$P_n = (4-u_1)(4-u_2)...(4-u_n) = (1\times v_1)(2\times v_2)...(n\times v_n) = (1\times 2\times ...\times n)(v_1\times v_2\times ...\times v_n)$$

نعلم أن : $1\times 2\times ...\times n = n!$

$$v_1\times v_2\times ...\times v_n = 2.3^1\times 2.3^2\times ...\times 2.3^n = 2^n.3^{1+2+...+n} = 2^n.3^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

ومنه $P_n = n!2^n.3^{\frac{n(n+1)}{2}}$

3) لتكن المتتالية العددية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي : $w_n = \ln\left(\frac{n}{4-u_n}\right)$.

- عبر عن w_n بدلالة n ثم أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = w_1+w_2+...+w_n$.

$$w_n = \ln\left(\frac{n}{4-u_n}\right) = \ln\frac{1}{v_n} = -\ln(2.3^n)$$

$$S_n = w_1+w_2+...+w_n = -\ln(2.3^1)-\ln(2.3^2)-...-\ln(2.3^n) = -\ln(2.3^1\times 2.3^2\times ...\times 2.3^n) = -\ln\left(2^n.3^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x+2)e^{x-2}-2$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^2}xe^x + \frac{2}{e^2}e^x - 2 = -2 \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x+2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-2} = +\infty \end{cases}$$

2) أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

$g'(x) = (x+3)e^{x-2}$ وإشارة $g'(x)$ من إشارة $x+3$ لأنه : $\forall x\in\mathbb{R}, e^{x-2} > 0$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-3]$ ومتزايدة تماما على المجال $[-3;+\infty[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	-2	↘	$-\frac{1}{e^5}-2$	↗	$+\infty$

3) أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق من أن $1,45<\alpha<1,46$.

الدالة g لا تنعدم على المجال $]-\infty;-3]$ لأن $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-2<0$ و $g(-3)\approx -2,006<0$

بينما الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]-3;+\infty[$ ولدينا $g(-3)<0$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-3;+\infty[$.

لدينا $g(1,45)\times g(1,46)\approx -0,0095\times 0,0163<0$ ومنه $\alpha\in]1,45;1,46[$

ب) استنتج إشارة $g(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x .

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2-x^2e^{x-2}$

نسمي (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2\left(1-e^{x-2}\right)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \text{ ou } 1-e^{x-2}=0$$

$$x^2=0 \Leftrightarrow x=0$$

$$1-e^{x-2}=0 \Leftrightarrow e^{x-2}=1 \Leftrightarrow x=2$$

ومنه حلول المعادلة هي $\{0;2\}$ ونستنتج أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما 0 و 2 .

2) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2-\frac{1}{e^2}x^2e^x=+\infty \quad \begin{cases}\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty\\ \lim_{x\to-\infty} x^2e^x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-e^{x-2}\right)=-\infty \quad \begin{cases}\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty} e^{x-2}=+\infty\end{cases}$$

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=-x.g(x)$.(f' هي الدالة المشتقة الأولى للدالة f)

$$f'(x)=2x\left(1-e^{x-2}\right)+x^2\left(-e^{x-2}\right)=x\left(2-2e^{x-2}-xe^{x-2}\right)=-x\left(xe^{x-2}+2e^{x-2}-2\right)=-x\left[(x+2)e^{x-2}-2\right]=-xg(x)$$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

إشارة $f'(x)$ من إشارة الجداء $-x.g(x)$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$-x$		+	0	-	|	-	
$g(x)$		-	|	-	0	+	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	

الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;0]$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;\alpha]$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

ج) بين أن $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}$ ، ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$ حيث α هو العدد الحقيقي المعرف في الجزء I) .

$$g(\alpha)=0 \Leftrightarrow (\alpha+2)e^{\alpha-2}-2=0 \Leftrightarrow e^{\alpha-2}=\frac{2}{\alpha+2}$$

$$f(\alpha)=\alpha^2-\alpha^2e^{\alpha-2}=\alpha^2-\alpha^2.\frac{2}{\alpha+2}=\frac{\alpha^3}{\alpha+2}$$

$$1,45<\alpha<1,46 \Leftrightarrow 3,45<\alpha+2<3,46 \Leftrightarrow \frac{1}{3,46}<\frac{1}{\alpha+2}<\frac{1}{3,45}$$

$$1,45<\alpha<1,46 \Leftrightarrow 3,0486<\alpha^3<3,1121$$

ومنه $\dfrac{3,1121}{3,45}<\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}<\dfrac{3,0486}{3,46}$ أي $0,8811<f(\alpha)<0,9021$

4) ليكن (Γ) المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto x^2$ على $\mathbb{R}$:

أ) بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x^2\right]=0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x^2\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}-x^2e^{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{1}{e^2}x^2e^x=0$ ، ومنه (Γ) منحنى مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$

ب) أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (Γ) .

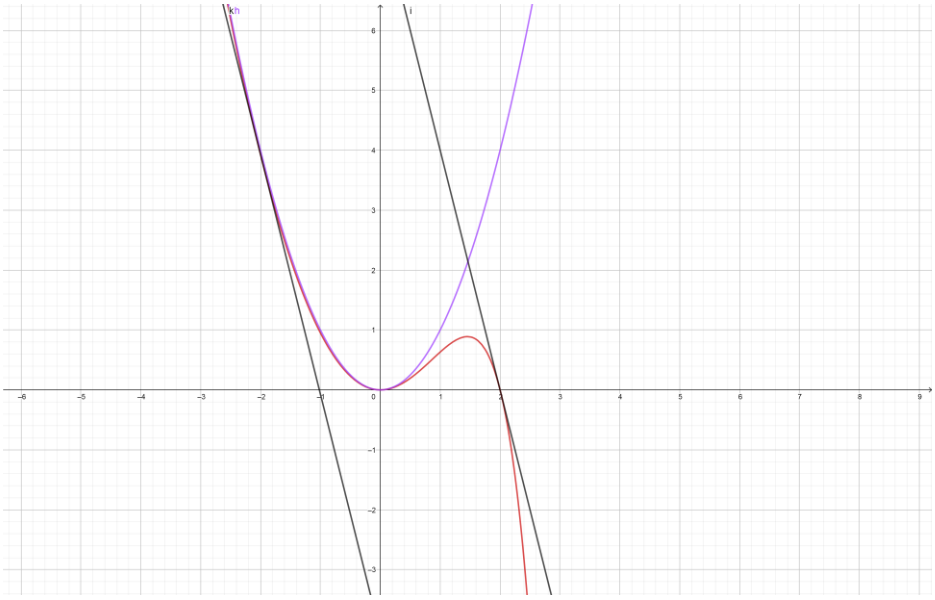
يكفي دراسة إشارة الفرق $f(x)-x^2$ أي $-x^2e^{x-2}$ وبما أن $\forall x\in\mathbb{R}, e^{x-2}>0$ فإن إشارة $-x^2e^{x-2}$ من إشارة $-x^2$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x^2$		-	0	-	
الوضعية النسبية		(C_f) تحت (Γ)	**تقاطع**	(C_f) تحت (Γ)	

5) عين معادلة لكل من المماسين (T) و (T') لـ (C_f) عند النقطتين ذات الفاصلتين 2 و -2 على الترتيب .

$(T): y=-4x+8$ ، $(T'): y=-4x-4\left(1+\frac{1}{e^4}\right)$

6) أنشيء (T) ، (T') ، (Γ) و (C_f) .



7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m عدد حلول المعادلة : $f(x)=-4x+\ln(m)$.

يكفي مناقشة عدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم $(d_m): y=-4x+\ln(m)$

الذي يوازي كلا من (T) و (T') ومنه :

من أجل $\ln(m)<-4\left(1+\frac{1}{e^4}\right)$ أي $0<m<e^{-4\left(1+\frac{1}{e^4}\right)}$ المعادلة تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.

من أجل $\ln(m)=-4\left(1+\frac{1}{e^4}\right)$ أي $m=e^{-4\left(1+\frac{1}{e^4}\right)}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا وحلا بسيطا .

من أجل $-4\left(1+\frac{1}{e^4}\right)<\ln(m)<8$ أي $e^{-4\left(1+\frac{1}{e^4}\right)}<m<e^8$ المعادلة تقبل 3 حلول بسيطة .

من أجل $\ln(m)=8$ أي $m=e^8$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا وحلا بسيطا .

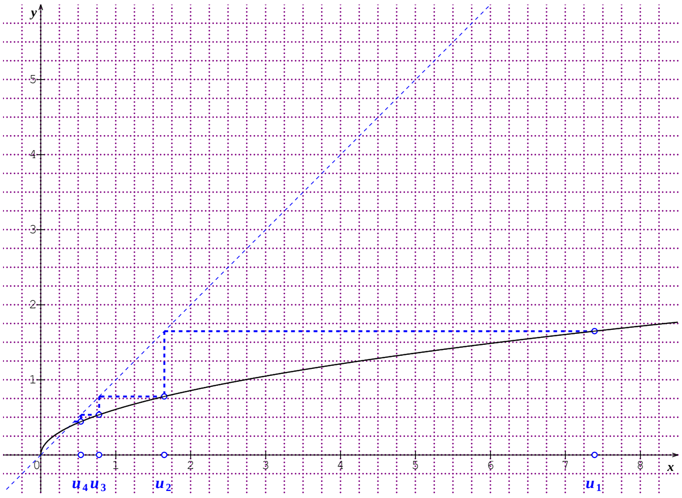
من أجل $\ln(m)>8$ أي $m>e^8$ المعادلة تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.

انتهى تصحيح الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (05 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{x}$.



(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، (الشكل المقابل) .

1) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

من البيان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

لدينا كذلك : $f'(x)=\dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{x}}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)>0$ إذن f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

2) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_1=e^2$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) أنقل المنحنى المقابل ثم مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل(دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء .

أنظر الشكل المقابل .

ب) أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

لدينا من البيان $u_1>u_2>u_3>u_4$ ومنه (u_n) متناقصة تماما .

النقط M_1 ، M_2 ، M_3 و M_4 من المنحنى (C_f) ذات الفواصل u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 على الترتيب تتقارب نحو نقطة ثابتة A هي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x$ ومنه (u_n) متقاربة نحو فاصلة النقطة A .

3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n>\dfrac{1}{e}$.

من أجل $n=1$ لدينا $u_1=e^2>\dfrac{1}{e}$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=1$

نفرض أن $u_n>\dfrac{1}{e}$ و نبرهن أن $u_{n+1}>\dfrac{1}{e}$

لاحظ أن : $u_{n+1}=e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{u_n}$

$u_n>\dfrac{1}{e}\Leftrightarrow\sqrt{u_n}>\sqrt{\dfrac{1}{e}}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{u_n}>\dfrac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{\dfrac{1}{e}}\Leftrightarrow u_{n+1}>\dfrac{1}{e}$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

إذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n>\dfrac{1}{e}$ ونستنتج أن (u_n) محدودة من الأسفل .

4) أ) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{u_n}-u_n=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{u_n}\right)^2-u_n^{\,2}}{\frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{u_n}+u_n}=\frac{u_n\left(\frac{1}{e}-u_n\right)}{\frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{u_n}+u_n}$$

بما أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n > \frac{1}{e}$ فإن $u_n > 0$ ومنه $\sqrt{u_n} > 0$ إذن $\frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{u_n} + u_n > 0$

كذلك من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\frac{1}{e} - u_n < 0$ ومنه $u_n\left(\frac{1}{e} - u_n\right) < 0$ إذن

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه (u_n) متناقصة تماما .

ب) برر تقارب المتتالية (u_n) ثم أوجد نهايتها .

بما أن (u_n) محدودة من الأسفل ومتناقصة تماما فهي متقاربة ، لإيجاد نهايتها نحل المعادلة $f(x) = x$

$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{x} = x \Leftrightarrow \frac{1}{e}x = x^2 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{e} - x\right) = 0$ ومنه $x = 0$ أو $x = \frac{1}{e}$ وبما أنه $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$

فإن $x = \frac{1}{e}$ ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{e}$

5) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{u_n}$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب تعيين حدها الأول .

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{u_{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln u_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\ln e^{-\frac{1}{2}} + \ln\sqrt{u_n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln\sqrt{u_n}$$

ومنه $v_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln\sqrt{u_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \ln\sqrt{u_n}\right) = \frac{1}{2}v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

حدها الأول : $v_1 = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{u_1} = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{e^2} = \frac{3}{2}$

ب) أكتب عبارتي v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

$$v_n = v_1.q^{n-1} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$v_n = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{u_n} \Leftrightarrow \ln\sqrt{u_n} = v_n - \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n = \left(e^{v_n - \frac{1}{2}}\right)^2 = e^{2v_n - 1} = e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} = \frac{1}{e} \quad \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \\ -1 < \frac{1}{2} < 1 \end{cases}$$

6) أحسب بدلالة n المجموع التالي : $S_n = \frac{1}{1 + \ln u_1} + \frac{1}{1 + \ln u_2} + \ldots + \frac{1}{1 + \ln u_n}$.

لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$ ومنه $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + \ln u_n = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{1 + \ln u_n} = \frac{2^n}{6}$

إذن : $S_n = \frac{1}{1 + \ln u_1} + \frac{1}{1 + \ln u_2} + \ldots + \frac{1}{1 + \ln u_n} = \frac{2^1}{6} + \frac{2^2}{6} + \ldots + \frac{2^n}{6} = \frac{1}{6}\left(2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n\right) = \frac{1}{6}.2\left(\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right)$

ومنه $S_n = \frac{1}{3}\left(2^n - 1\right)$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

1) **أ)** أنشر العبارة $(n+2)(3n^2 - 6n + 16)$ مع $n \in \mathbb{N}$.

$$(n+2)(3n^2 - 6n + 16) = 3n^3 + 4n + 32$$

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون العدد $3n^3+4n+32$ قابلا للقسمة على $n+2$.

بما أن $3n^3+4n+32=(n+2)k$ حيث $k=3n^2-6n+16$ و $k\in\mathbb{Z}$ فإن $n+2/3n^3+4n+32$

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3n^2-6n+16$ هو عدد طبيعي غير معدوم .

لدينا $\Delta=-156<0$ ومنه $\forall n\in\mathbb{N},3n^2-6n+16>0$ وبما أن $3n^2-6n+16\in\mathbb{Z}$ فإن $3n^2-6n+16$ عدد طبيعي غير معدوم .

3) أ) بين أنه من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة α ، β و γ ، تكون المساواة التالية صحيحة : $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta\gamma-\alpha;\beta)$.

نضع $PGCD(\alpha;\beta)=d$ و $PGCD(\beta\gamma-\alpha;\beta)=d'$

لدينا $\begin{cases} d/\alpha \\ d/\beta \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} d/\alpha \\ d/\beta\gamma \end{cases}$ بالطرح نجد $d/\beta\gamma-\alpha$

$\begin{cases} d/\beta \\ d/\beta\gamma-\alpha \end{cases}$ ومنه d قاسم مشترك للعددين β و $\beta\gamma-\alpha$ ومنه فهو يقسم القاسم المشترك الأكبر لهما أي d/d'

من جهة أخرى لدينا : $\begin{cases} d'/\beta \\ d'/\beta\gamma-\alpha \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} d'/\beta\gamma \\ d'/\beta\gamma-\alpha \end{cases}$ بالطرح نجد : d'/α

$\begin{cases} d'/\beta \\ d'/\alpha \end{cases}$ ومنه d' قاسم مشترك للعددين β و α ومنه فهو يقسم القاسم المشترك الأكبر لهما أي d'/d

d/d' و d'/d إذن $d=d'$ أي $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta\gamma-\alpha;\beta)$

ب) استنتج أنه من أجل عدد طبيعي n ، $PGCD(3n^3+4n;n+2)=PGCD(32;n+2)$.

بوضع : $\alpha=3n^3+4n$ ، $\beta=n+2$ و $\gamma=3n^2-6n+16\in\mathbb{N}^*$ نجد :

$\beta\gamma-\alpha=(n+2)(3n^2-6n+16)-3n^3-4n=32$

ومنه حسب ما سبق : $PGCD(3n^3+4n;n+2)=PGCD(32;n+2)$

4) أ) عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 32 .

$\{1;2;4;8;16;32$

ب) استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $A=\dfrac{3n^3+4n}{n+2}$ طبيعيا .

لدينا من أجل عدد طبيعي n ، $3n^3+4n$ و $n+2$ عددان طبيعيان مع $n+2\neq 0$

حتى يكون العدد $A=\dfrac{3n^3+4n}{n+2}$ يكفي : $n+2/3n^3+4n$ ومنه $PGCD(3n^3+4n;n+2)=n+2$

معناه كذلك : $PGCD(32;n+2)=n+2$ ومنه $n+2/32$ أي $n+2\in D_{32}^{+}$

$n+2$	1	2	4	8	16	32
n	-1 مرفوض	0	2	6	14	30

ومنه $n\in\{0;2;6;14;30\}$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

يحوي كيس على خمس كرات حمراء و ثلاث كرات بيضاء ، كل الكرات متماثلة ولا نميز بينها باللمس .

نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كرات في آن واحد .

1) أحسب احتمال كل من الحدثين التاليين :

A " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون" ، B " الحصول على كرة بيضاء على الأقل "

$$P(A)=\frac{C_5^3+C_3^3}{C_8^3}=\frac{11}{56}$$

$$P(B)=\frac{C_3^1\times C_5^2+C_3^2\times C_5^1+C_3^3}{C_8^3}=\frac{23}{28}$$

2) ننزع من الكيس الكرات البيضاء ونضع مكانها n كرة سوداء حيث $n\geq 2$ ، ثم يسحب لاعب كرتين على التوالي دون إرجاع الكرة المسحوبة الأولى .

إذا سحب اللاعب كرة سوداء يتحصل على 5 نقاط وإذا سحب كرة حمراء يخسر 10 نقاط . وليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب مجموع النقاط المحصل عليها .

أ) عرف قانون الاحتمال لـ X ، ثم بين أن أمله الرياضياتي هو $E(X)=\dfrac{10n^2-60n-400}{(n+4)(n+5)}$.

تعيين القيم الممكنة لـ X :

كرتين حمراوين فإنه يخسر 20 نقطة وإذا سحب كرة حمراء وكرة سوداء فإنه يخسر 5 نقاط أما إذا سحب كرتين سوداوين فإنه يربح 10 نقاط ، ومنه $X\in\{-20;-5;10\}$.

عدد الكرات الإجمالي في الكيس هو $n+5$ ومنه عدد الحالات الممكنة للسحب هو A_{n+5}^2

$$P(X=-20)=\frac{A_5^2}{A_{n+5}^2}=\frac{\frac{5!}{2!}}{\frac{(n+5)!}{(n+3)!}}=\frac{20(n+3)!}{(n+5)!}=\frac{20(n+3)!}{(n+5)(n+4)(n+3)!}=\frac{20}{(n+5)(n+4)}$$

$$P(X=-5)=\frac{\Gamma_2^{1,1}\times A_5^1\times A_n^1}{A_{n+5}^2}=\frac{2\times\frac{5!}{4!}\times\frac{n!}{(n-1)!}}{\frac{(n+5)!}{(n+3)!}}=\frac{10n}{(n+5)(n+4)}$$

$$P(X=10)=\frac{A_n^2}{A_{n+5}^2}=\frac{\frac{n!}{(n-2)!}}{\frac{(n+5)!}{(n+4)!}}=\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$$

$X=X_i$	-20	-5	10
$P(X=X_i)$	$\dfrac{20}{(n+5)(n+4)}$	$\dfrac{10n}{(n+5)(n+4)}$	$\dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$

ومنه :
$$\begin{cases} E(X)=(-20)\dfrac{20}{(n+5)(n+4)}+(-5)\dfrac{10n}{(n+5)(n+4)}+10\times\dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)} \\ =\dfrac{-400-50n+10n(n-1)}{(n+5)(n+4)}=\dfrac{10n^2-60n-400}{(n+4)(n+5)} \end{cases}$$

ب) ما هو أصغر عدد ممكن للكرات السوداء حتى تكون اللعبة مربحة .

حتى تكون اللعبة مربحة يكفي : $E(X)>0$

$$E(X)>0\Leftrightarrow\frac{10n^2-60n-400}{(n+4)(n+5)}>0\Rightarrow 10n^2-60n-400>0$$ لأن $(n+4)(n+5)>0$

يكفي حل المتراجحة $10x^2-60x-400>0$ نجد $x\in]-\infty;-4[\cup]10;+\infty[$

وبما أن $n\in\mathbb{N}$ فإن $n>10$ ومنه أصغر عدد ممكن للكرات السوداء حتى تكون اللعبة مربحة هو 11 .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+2-2\ln x$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=+\infty \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \ln x=-\infty \\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x^2+2=2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(x+\frac{2}{x}-2\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0 \end{cases}$$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

$g'(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{x}$ وإشارتها من إشارة x^2-1 لأن $x\in]0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	-	0	+	

الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;1[$ ومتزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

جدول التغيرات :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	-	0	+	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

3) حدد إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0;+\infty[$.

الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى هي 3 ومنه : $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) \geq 3$ ومنه $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) > 0$

x	0	$+\infty$
$g(x)$	‖ +	

II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = -x + e - \dfrac{2\ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا ، ثم أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} -x + e - \frac{2}{x}.\ln x = +\infty \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{2}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty \end{cases}$$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مطابقا لحامل محور التراتيب بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{x^2}$.

$$f'(x) = -1 - \left(\frac{\frac{2}{x} \times x - 2\ln x}{x^2} \right) = \frac{-x^2 - 2 + 2\ln x}{x^2} = \frac{-g(x)}{x^2}$$

3) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم أدرس إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$ لأنه $\forall x \in]0;+\infty[, x^2 > 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

جدول التغيرات :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		-	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

4) أ) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+e$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x+e)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{2\ln x}{x}=0$ ومنه (Δ) الذي معادلته $y=-x+e$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

يكفي دراسة إشارة الفرق $f(x)-(-x+e)$ أي $-\frac{2\ln x}{x}$

إشارة $-\frac{2\ln x}{x}$ من إشارة $-2\ln x$ لأن $x>0$

x	0		1		$+\infty$
$-2\ln x$		**+**	0	**-**	
الوضعية النسبية		(C_f) **فوق** (Δ)	**تقاطع**	(C_f) **تحت** (Δ)	

5) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي المستقيم (Δ) ، ثم جد معادلة له .

يكفي حل المعادلة $f'(x)=-1$

$\frac{-x^2-2+2\ln x}{x^2}=-1 \Leftrightarrow f'(x)=-1$ نجد $-2+2\ln x=0$ ومنه $x=e$

ومنه (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي المستقيم (Δ) حيث : $(T): y=f'(e)(x-e)+f(e)$

ومنه $(T): y=-x+e-\frac{2}{e}$

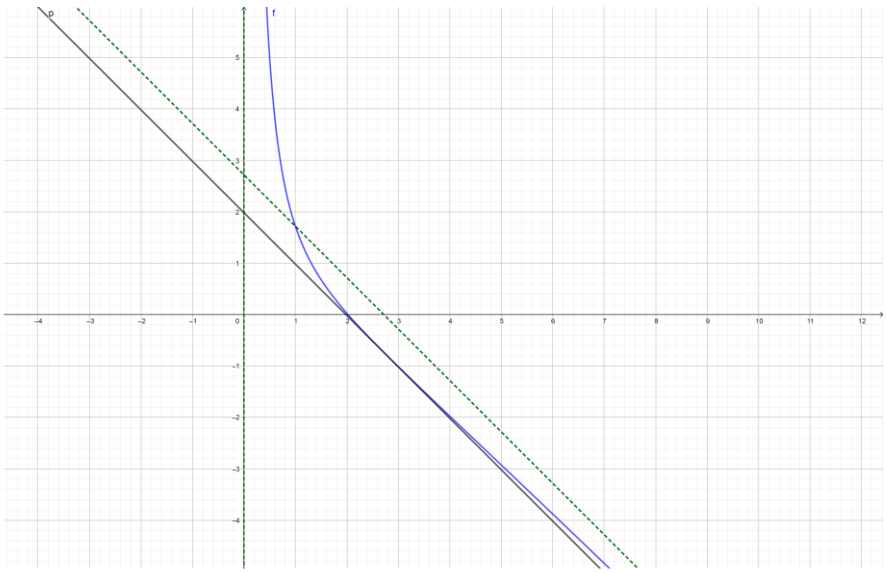
6) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $2<\alpha<2,1$.

يكفي أن نبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2<\alpha<2,1$

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]0;+\infty[$ وبالأخص على المجال $]2;2,1[$ ولدينا :

$f(2)\times f(2,1)\approx 0,025\times(-0,08)<0$ ، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2<\alpha<2,1$ ومنه (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $2<\alpha<2,1$.

7) أرسم كلا من (Δ) ، (T) و (C_f) .



8) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $x(e-m)=\ln(x^2)$.

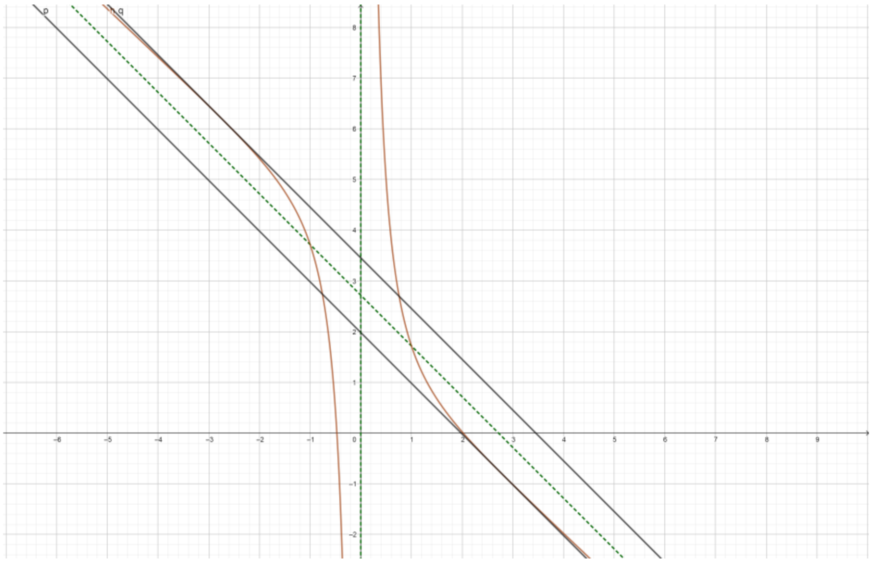
المعادلة معرفة من أجل $x\neq 0$ ولدينا :

$$x(e-m)=\ln(x^2)\Leftrightarrow e-m=\frac{2\ln|x|}{x}\Leftrightarrow m-e=-\frac{2\ln|x|}{x}\Leftrightarrow -x+e+m-e=-x+e-\frac{2\ln|x|}{x}$$
$$\Leftrightarrow h(x)=-x+m$$

حيث h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x)=-x+e-\frac{2\ln|x|}{x}$

من أجل $x>0$: $h(x)=-x+e-\frac{2\ln x}{x}=f(x)$

ولدينا $h(x)+h(-x)=-x+e-\frac{2\ln|x|}{x}+x+e+\frac{2\ln|-x|}{x}=2e$ لأن $|-x|=|x|$ ومنه منحنى الدالة h متناظر بالنسبة إلى النقطة $\omega(0;e)$ ويطابق (C_f) من أجل $x>0$.



المناقشة مناقشة بيانية وسيطية مائلة وتؤول إلى دراسة عدد نقط تقاطع منحنى الدالة h مع المستقيم $(d_m): y=-x+m$ والذي يوازي كلا من (Δ) ، (T) و (T') حيث $(T'): y=-x+e+\frac{2}{e}$ نظير (T) بالنسبة إلى النقطة ω ومنه :

من أجل $m \in \left]-\infty; e-\frac{2}{e}\right[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

من أجل $m=e-\frac{2}{e}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا وحلا بسيطا

من أجل $m \in \left]e-\frac{2}{e}; e\right[$ المعادلة تقبل 3 حلول

من أجل $m=e$ المعادلة تقبل حلين متمايزين

من أجل $m \in \left]e; e+\frac{2}{e}\right[$ المعادلة تقبل 3 حلول

من أجل $m=e+\frac{2}{e}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا وحلا بسيطا

من أجل $m \in \left]e+\frac{2}{e}; +\infty\right[$ المعادلة تقبل حلا وحيد

انتهى تصحيح الموضوع الثاني