الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية وهران

المقاطعة الأولى (وهران شرق) **الامتحان التجريبي لبكالوريا 2022في مادة الرياضيات**

الشعبة :علوم تجريبية **المدة : ثلاث ساعات و نصف**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين فقط

الموضوع الأول

التمرين الأول: (5نقاط) عين الاقتراح الصحيح في كل حالة من الحالات الآتية مع التعليل :

1) العدد $ln\left[(2+\sqrt{3})^{2022}\right]+ln\left[(2-\sqrt{3})^{2022}\right]$ يساوي :

أ -أ) 0 ب) 22 20 ج) 1

2) f دالة معرفة على مجال مفتوح يشمل 2،إذا كان منحنى f يقبل مماسا معادلته y=2 فان :

أ $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=1-$ ب- $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=0$ ج- $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=+\infty$

3) حلول المعادلة التفاضلية : $y=\sqrt{2}\,y'-1$ هي الدوال المعرفة على IR بـ :

أ) $f(x)=Ce^{\sqrt{2}x}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ب) $f(x)=Ce^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}-1$ ج) $f(x)=Ce^{\sqrt{2}x}+1$

4) الدالة g المعرفة على IR بـ: $g(x)=|x-1|(x+1)$, غير قابلة للاشتقاق عند 1 لان نهاية النسبة $\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$:

أ)عند 1 هي $+\infty$ ب)عند 1من يمين 1 , لا تساوي النهاية عند1من يسار ج) عند 1 هي $-\infty$

5) عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بحيث تضم كل لجنة رئيسا و نائبا له ينتخبون من بين خمسة رجال و ثلاث نساء هو :أ) 56 ب- 28 ج- 64

التمرين الثاني :(4نقاط)

نعتبر D_1 ; D_2 زهرتي نرد ذات ستة أوجه حيث :

- وجوه النرد D_1 متساوية الاحتمال , أربعة منها تحمل الرقم 1 و اثنان منها تحمل الرقم 2 .
- وجوه النرد D_2 مرقمة من 1 الى 6 حيث أن احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم k هو $\frac{k}{21}$.

1- أ- إذا رمينا النرد D_1 مرة واحدة فما هو احتمال ظهور الرقم 2 .؟

ب- إذا رمينا النرد D_2 مرة واحدة فما هو احتمال ظهور الرقم 6 ؟.

2- إذا رمينا النردين D_1 ; D_2 معا فما هو احتمال ظهور الرقم 1 :

أ -مرة واحدة بالضبط ب) مرتين

3- نرمي النردين معا و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية عدد المرات الذي يظهر فيها الرقم 2

أ عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

ب -احسب الأمل ألرياضياتي لهذا المتغير العشوائي

التمرين الثالث:(4نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على IN كما يلي : $u_n = \int_n^{n+1} e^{2-x}\,dx$

1 - بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = e^{2-n} - e^{1-n}$

2 - أحسب u_0 ثم برهن بمبدأ الاستدلال بالتراجع . انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$

3 - برهن ان المتتالية (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها ألأول

4 - أ- أحسب بدلالة n الفرق $u_{n+1} - u_n$. ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ب - استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

5 - نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

أحسب بدلالة n المجموع S_n , ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$

التمرين الرابع : (7نقاط)

الجزء I : f دالة معرفة على IR بـ : $f(x) = \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بمعلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث الوحدة 2cm على محور الفواصل و 5cm على محور التراتيب

1 - أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ ثم فسر النتيجة هندسيا

2 - أ) بين انه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = \frac{x+\ln(1+e^{-x})}{e^x}$

ب) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ ثم فسر النتيجة بيانيا

3- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1;-\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$

أ -أدرس تغيرات الدالة g على المجال $]0;+\infty[$

ب أحسب $g(0)$ ، ثم إشارة $g(x)$ من أجل x موجب تماما

4) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(e^x)}{e^x}$

ب - استنتج أن الدالة f متناقصة تماما على مجموعة تعريفها ، ثم شكل جدول تغيراتها

ج- مثل بيانيا (C_f)

الجزء II : نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

1 - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي t : $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$

2 - باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن $F(x) = -\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) - f(x) + 2\ln 2$

3 - استنتج مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $x = 0\,, x = \ln 4\,, y = 0$

الموضوع الثاني

التمرين الأول(04ن)

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التعليل:

السؤال:	الإجابة أ)	الإجابة ب)	الإجابة ج)
1) حلول المعادلة التفاضلية $y'-2y=1$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ:	$x\mapsto ce^{-2x}+\frac{1}{2}$ مع $c\in\mathbb{R}$	$x\mapsto ce^{2x}-\frac{1}{2}$ مع $c\in\mathbb{R}$	$x\mapsto ce^{\frac{1}{2}x}-2$ مع $c\in\mathbb{R}$
2) القيمة المتوسطة m للدالة f المعرفة على المجال $[2;3]$ بالعبارة $f(x)=e^{2x+3}-x$ تساوي:	$m=\frac{1}{2}\left(e^{9}-e^{7}-5\right)$	$m=e^{2}-\frac{5}{2}$	$m=\frac{1}{2}\left(e^{2}-5\right)$
3) من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>2$ يكون: $C_{n-1}^{2}+C_{n}^{2}$ يساوي:	$\frac{1}{2}(n-1)^{2}$	$(n-1)^{2}$	$n^{2}-2n$
4) عبارة الحد العام U_n للمتتالية العددية (u_n) المعرفة على N بـِ: $u_n=\int_0^n 2^x\ln 2\,dx$ هي:	2^{n}	$2^{n}+1$	$2^{n}-1$

التمرين الثاني(05ن)

I) المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدّها الأول $u_0=6$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n-\frac{1}{2}$

1) أ. في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، مثّل المستقيمين (Δ) و (D) إذا علمت أن : $(\Delta): y=x$ و $(D): y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$

ب. مثّل و دون حساب على حامل محور الفواصل الحدود: u_0، u_1، u_2 و u_3.

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n>-\frac{2}{3}$

3) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

II) المتتالية العددية (v_n) معرفة على N بحدها العام V_n:حيث من أجل كل nمن N $v_n=u_n+\alpha$ ، α عدد حقيقي.

1) عيّن قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$، ثم أحسب حدها الأول.

2) نضع $\alpha=\frac{2}{3}$: أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n. استنتج عبارة u_n بدلالة n، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الثالث (04ن)

نعتبر صندوقين أحدهما U يحتوي على **3** كرات خضراء و **4** كرات حمراء و الآخر U' يحتوي على **كرتين** خضراوين و **5** كرات حمراء، كل الكرات لا نميز بينها باللمس، نرمز للكرات الخضراء بالرمز V و للكرات الحمراء بالرمز R.

I - نسحب عشوائيا من الصندوق U ثلاث كرات في آن واحد. أحسب احتمال كلّ من الحوادث A ، B و C التالية:

◄ A : " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون ". ◄ B : " الحصول على كرة خضراء واحدة بالضبط ".

◄ C : " الحصول على كرة حمراء على الأقل ".

II - نختار بطريقة عشوائية صندوقا من بين الصندوقين و نسحب منه كرة واحدة عشوائيا:

1) أنجز شجرة الاحتمالات الموافقة لهذه التجربة العشوائية.

2) بيّن أنّ احتمال الحصول على كرة خضراء هو: $P(V)=\frac{5}{14}$

3) إذا كانت الكرة المسحوبة خضراء فما احتمال أن تكون من الصندوق U ؟.

التمرين الرابع (07ن)

يُنسب المستوي إلى المعلم المتعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\|=1\,cm$ و $\|\vec{j}\|=4\,cm$

I - g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=1+x^2-2x^2\ln x$

1) أدرس تغيرات الدالة g على المجال $]0;+\infty[$ (**يطلب منك حساب النهايات**)، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يُحقّق: $1{,}8<\alpha<2$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II - الدالة العددية f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{\ln x}{1+x^2}$ و (C_f) هو تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجتين هندسيا.

2) أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3) بيّن أنّ: $f(\alpha)=\frac{1}{2\alpha^2}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد الحقيقي $f(\alpha)$ سعته 10^{-2}.

4) عيّن إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل، ثمّ أنشئ المنحنى (C_f).

III - الدالة العددية G معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة: $G(x)=\frac{5}{9}x^3+x-\frac{2}{3}x^3\ln x$

1) بيّن أنّ الدالة G هي دالة أصلية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

2) أحسب بدلالة العدد α مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى A_α (C_g) و حامل محور الفواصل و المستقيمان اللذان معادلاتهما $x=1$ و $x=\alpha$. حيث (C_g) هو المنحنى البياني الممثل للدالة g في المعلم السابق.

التصحيح النموذجي

التمرين الثانى(4نقاط)

1) أ- احتمال ظهور الرقم 2 هو $\frac{}{6}$ أي $\frac{1}{3}$ (0,5)

ب- اذا رمينا النرد D_2 مرة واحدة احتمال ظهور الرقم 6 هو $\frac{6}{21}$ أي $2/7$ (0,5)

2) أ- احتمال ظهور الرقم 1 مرة واحدة بالضبط اي في D_1 فقط او في D_2 فقط $\frac{82}{126} = \frac{4}{6}\left(1-\frac{1}{21}\right)+\frac{1}{21}\times\frac{2}{6}$

(0,5)

ب- مرتين في D_1 و D_2 معا $\frac{4}{126} = \frac{4}{6}\times\frac{1}{21}$ 0,5

3) قيم X هي 2,1,0 0,25

قانون احتمال المتغير العشوائي هو :

$X=x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$			

0,25

0,25 $P(X=0)=\frac{4}{6}\left(1-\frac{2}{21}\right)=\frac{4\times 19}{126}=\frac{76}{126}$

0,25 $.P(X=1)=\frac{2}{6}\times\left(1-\frac{2}{21}\right)+\frac{2}{21}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{6}\times\frac{19}{21}+\frac{8}{126}=\frac{38+8}{126}=\frac{46}{126}$

0,25 $P(X=2)=\frac{2}{6}\times\frac{2}{21}=\frac{4}{126}$

0,75 $.E(X)=0\times\frac{76}{126}+1\times\left(\frac{46}{126}\right)+2\left(\frac{4}{126}\right)=\frac{54}{126}=\frac{3}{7}$

التمرين الثالث(4نقاط)

1 - نبين أن $_n = e^{2-n}-e^{1-n}$.

0,5 $.u_n=\int_n^{n+1}e^{2-x}dx=-[e^{2-x}]_n^{n+1}=-[e^{1-n}-e^{2-n}]=e^{2-n}-e^{1-n}$

2 - حساب u_0 *ثم البرهان بالتراجع ان* $u_n>0$.

نضع $P(n): u_n>0$

حساب $_0$: $u_0=e^2-e$ ... 0,25

المرحلة 01 : *من اجل* n=0 نجد $u_0=e^2-e$ و عليه $P(0)$ محققة

المرحلة 02 : من اجل كل عدد طبيعي n نفرض صحة $P(n)$ ونفرض صحة $P(n+1)$ ، ، 0,75

3 - اثبات أن (u_n) متتالية هندسية

لدينا $u_{n+1} = \frac{1}{e}u_n$ ومنه (u_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{e}$ و حدها الأول $u_0 = e^2 - e$ (0,5)

4 - أ- تعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n)

من اجل كل عدد طبيعي n . $u_{n+1} - u_n = -(e-1)^2 e^{-n}$ ،

نلاحظ $u_{n+1} - u_n < 0$ وعليه المتتالية (u_n) متناقصة (0,5)

ب- الاستنتاج ان المتتالية متقاربة

بما أن (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الاسفل بالعدد 0 فهي متقاربة $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ (0,5)

5 - حساب S_n :

$S_n = e^2\left(1 - \frac{1}{e^{n+1}}\right)$. (0,5)

$\lim_{n\to+\infty} S_n = e^2$. (0,5)

التمرين الرابع (7نقاط)

الجزء I

1- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ (0,5)

التفسير الهندسي : (C_f) يقبل مستقيم مقارب افقي معادلته y=1 بجوار $-\infty$ (0,25)

2 - أ- لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = \frac{1}{e^x} ln[e^x(e^{-x}+1)] = \frac{x+\ln(1+e^{-x})}{e^x}$ (0,25)

ب- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (0,5)

التفسير الهندسي : (C_f) يقبل مستقيم مقارب افقي معادلته y=0 بجوار $+\infty$ (0,25)

3 - أ- دراسة تغيرات الدالة g

النهايات $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ (0,25)

من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$ ولدينا $g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{-x}{(1+x)^2}$ ،

نلاحظ انه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$ $g'(x) < 0$, (0,5)

ب- جدول التغيرات : لدينا g(0)=0

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		
g	0 $\searrow$	

من جدول التغيرات نستنتج انه من اجل كل x من $[0;+\infty[$ g(x)<0 (0,5)

4 - أ- حساب $f'(x)$

f معرفة وقابلة للاشتقاق على IR ولدينا : $f'(x) = \frac{1}{e^x}\left(-ln(1+e^x) + \frac{e^x}{1+e^x}\right)$ أي $f'(x) = \frac{g(e^x)}{e^x}$ 0,5

ومنه الدالة f اشارتها من اشارة g اي الدالة f متناقصة تماما على مجموعة تعريفها 0,25

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		
f	1 ↘	

ج- انشاء (C_f) (1)

الحل النموذجي لبكالوريا التجريبي دورة ماي 2022 — الشعبة : علوم تجريبية

الموضوع الثاني

المستوى: 3 علوم تجريبية.

التصحيح النموذجي المختصر لامتحان البكالوريا التجريبية دورة ماي 2022:	التنقيط:

حل التمرين الأول: (04 نقاط)

- **إختيار الإجابة الصحيحة مع التعليل:**

1) الإجابة ب) — 0,25

التعليل: المعادلة التفاضلية $y'-2y=1$ تكافئ $y'=2y+1$ و هي من الشكل $y'=ay+b$ حيث $a=2$ و $b=1$

و عليه فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'-2y=1$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ: $x\mapsto ce^{ax}-\dfrac{b}{a}$ مع $c\in\mathbb{R}$ — 0,75

بالتعويض نجد $x\mapsto ce^{2x}-\dfrac{1}{2}$ مع $c\in\mathbb{R}$

الصفحة 1

2) الإجابة أ) — 0,25

التعليل:

لدينا القيمة المتوسطة m للدالة f المعرفة على المجال $[2;3]$ بالعبارة $f(x)=e^{2x+3}-x$ هي: $m=\int_a^b f(x)\,dx$

بالتعويض نجد: $m=\int_2^3 f(x)\,dx=\int_2^3\left(e^{2x+3}-x\right)dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x+3}-\frac{1}{2}x^2\right]_2^3=\frac{1}{2}\left(e^9-e^7-5\right)$ — 0,75

3) الإجابة ب) — 0,25

التعليل: لدينا من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>2$ يكون:

$$C_{n-1}^2+C_n^2=\frac{(n-1)!}{2!\times(n-1-2)!}+\frac{n!}{2!\times(n-2)!}=\frac{(n-1)!}{2\times(n-3)!}+\frac{n!}{2\times(n-2)!}$$ — 0,75

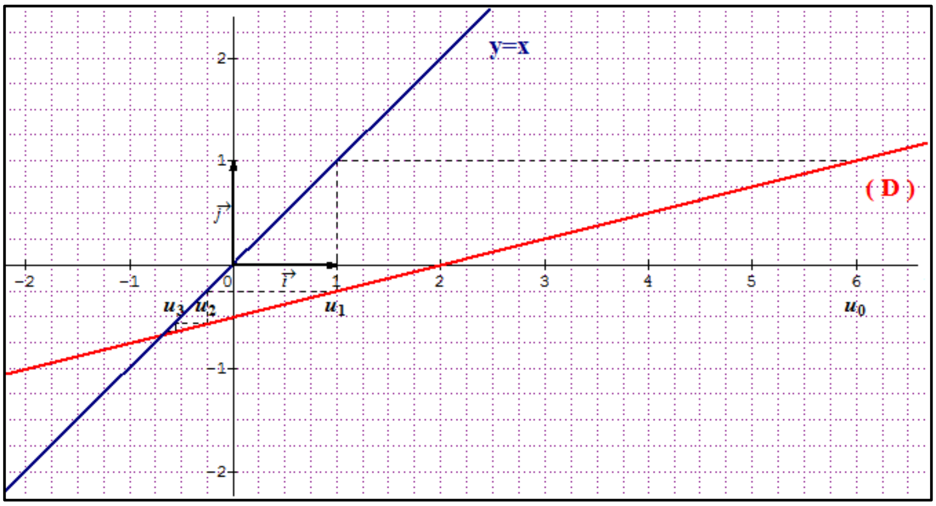
يكافئ $$C_{n-1}^2+C_n^2=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n-1)(2n-2)}{2}=(n-1)^2$$

4) الإجابة ج) — 0,25

التعليل: لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\int_0^n 2^x\ln 2\,dx=\int_0^n \ln 2\,e^{x\ln 2}\,dx=\left[e^{x\ln 2}\right]_0^n=2^n-1$ — 0,75

حل التمرين الثاني: (05 نقاط)

1) تمثيل المستقيمان و الحدود:



0,25

0,75

2) البرهان بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n > -\frac{2}{3}$ .... $p(n)$

أ - مرحلة التحقق: نتحقق من صحة الخاصية p من أجل $n_0 = 0$

لدينا $u_0 = 6$ و بما أن $6 > -\frac{2}{3}$ معناه $u_0 > -\frac{2}{3}$ ما يعني أن الخاصية p صحيحة من أجل $n_0 = 0$. 0,25

ب - مرحلة الوراثة: نفرض أن الخاصية p صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n معناه $u_n > -\frac{2}{3}$ 0,25

و نبرهن صحة الخاصية p من أجل $(n+1)$ أي البرهان أن $u_{n+1} > -\frac{2}{3}$

الصفحة 2

لدينا $u_n > -\frac{2}{3}$ يكافئ $\frac{1}{4}u_n > -\frac{1}{6}$ يكافئ $u_{n+1} > -\frac{4}{6}$ يكافئ $u_{n+1} > -\frac{2}{3}$ 0,25

ما يعني أن الخاصية p صحيحة من أجل $(n+1)$.

- الإستنتاج: نستنتج حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $u_n > -\frac{2}{3}$ 0,25

3) لنبيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2} - u_n = -\frac{3}{4}u_n - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}\left(u_n + \frac{2}{3}\right)$ 0,25

و لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > -\frac{2}{3}$ يكافئ $u_n + \frac{2}{3} > 0$ يكافئ $-\frac{3}{4}\left(u_n + \frac{2}{3}\right) < 0$ 0,25

يكافئ $u_{n+1} - u_n < 0$ ما يعني أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

- إستنتاج التقارب: بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل بالعدد $-\frac{2}{3}$ فإن المتتالية (u_n) متقاربة. 0,5

I - المتتالية العددية (v_n) معرفة على ب: $v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي.

1) تعيين قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2} + \alpha = \frac{1}{4}\left(u_n - 2 + 4\alpha\right)$

من جهة أخرى تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$ إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n: **0,5**

$v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n$ بالمطابقة مع $v_{n+1}=\frac{1}{4}(u_n-2+4\alpha)$ نجد $v_n=u_n-2+4\alpha$

يكافئ $u_n+\alpha=u_n-2+4\alpha$ يكافئ $\alpha=-2+4\alpha$ يكافئ $-3\alpha=-2$ يكافئ $\alpha=\frac{2}{3}$

- حساب حدها الأول: لدينا $v_0=u_0+\alpha=6+\frac{2}{3}=\frac{20}{3}$ معناه $v_0=\frac{20}{3}$ **0,25**

2) أ . الكتابة بدلالة n عبارة الحد العام v_n:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=v_0\times q^n$ بالتعويض نجد $v_n=\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$ معناه $v_n=\frac{20}{3\times 4^n}$ **0,5**

ب. استنتاج عبارة الحد العام u_n بدلالة n: لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n+\alpha$

يكافئ $u_n=v_n-\alpha$ يكافئ $u_n=\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n-\frac{2}{3}$ يكافئ $u_n=\frac{2}{3}\left(\frac{10}{4^n}-1\right)$ **0,5**

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{20}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}$ لأن $-1<\frac{1}{4}<1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ **0,25**

حل التمرين الثالث (04 نقاط)

I - حساب احتمال كلّ من الحوادث A، B و C:

الصفحة 3

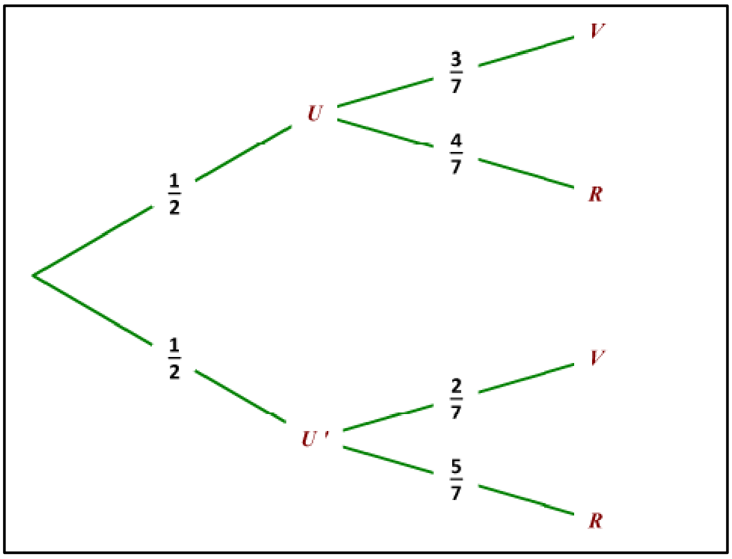
◄ لدينا $P(A)=\frac{C_3^3+C_4^3}{C_7^3}=\frac{5}{35}$ معناه $P(A)=\frac{1}{7}$ **0,5**

◄ لدينا $P(B)=\frac{C_3^1\times C_4^2}{C_7^3}=\frac{18}{35}$ معناه $P(B)=\frac{18}{35}$ **0,5**

◄ لدينا $P(C)=\frac{C_4^1\times C_3^2+C_4^2\times C_3^1+C_4^3}{C_7^3}=\frac{34}{35}$ معناه $P(C)=\frac{34}{35}$ **0,5**

II - نختار صندوقا عشوائيا و نسحب منه كرة واحدة عشوائيا:

1) إنجاز شجرة الإحتمالات الموافقة لهذه التجربة العشوائية: **01**



2) لنبيّن أنّ احتمال الحصول على كرة خضراء هو $P(V)=\dfrac{5}{14}$:

لدينا $P(V)=P(U\cap V)+P(U'\cap V)$ يكافئ $P(V)=P(U)\times P_U(V)+P(U')\times P_{U'}(V)$ **0,5**

بالتعويض نجد $P(V)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{7}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{7}$ ما يعني أن $P(V)=\dfrac{5}{14}$ **0,25**

3) حساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الصندوق U علما أنها خضراء اللون:

لدينا $P_V(U)=\dfrac{P(U\cap V)}{P(U)}=\dfrac{P(U)\times P_U(V)}{P(U)}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}}{\frac{5}{14}}==\dfrac{\frac{3}{14}}{\frac{5}{14}}=\dfrac{3}{14}\times\dfrac{14}{5}=\dfrac{3}{5}$ معناه أن $P_V(U)=\dfrac{3}{5}$ **0,75**

حل التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - الدالة العددية g معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	−

$$g(x)=1+x^2-2x^2\ln x$$

1) دراسة تغيرات الدالة g على المجال $]0;+\infty[$:

النهايات: لدينا $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2-2x^2\ln x\right)=1$ **0,25**

0,25

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+x^2-2x^2\ln x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\dfrac{1}{x^2}+1-2\ln x\right)\right]=-\infty$ **0,25**

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	1	↗	2	↘	$-\infty$

المشتقة: الدالة العددية g معرّفة و قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ تكون: **0,25**

$g'(x)=2x-2\left(2x\times\ln x+\dfrac{1}{x}\times x^2\right)=2x-4x\ln x-2x=-4x\ln x$ معناه $g'(x)=-4x\ln x$

إشارة المشتقة: لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]\,0;+\infty\,[$: $4x>0$

و عليه فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة العبارة $-\ln x$ معناه أن: **0,25**

إتجاه تغير الدالة g :

الدالة g متزايدة تماما على المجال $]\,0;1\,]$ و متناقصة تماما على المجال $[\,1;+\infty\,[$ **0,25**

جدول تغيرات الدالة g :

2) لنبيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يُحقّق: $1{,}8<\alpha<2$: **0,25**

لدينا الدالة g معرفة و مستمرة و رتيبة (متناقصة تماما) على المجال $[\,1;+\infty\,[$ **0,25**

إذا بالضرورة فإن الدالة g معرفة و مستمرة و رتيبة (متناقصة تماما) على المجال $[\,1{,}8\,;\,2\,]$.

و لدينا $g(1{,}8)\approx 0{,}43$ و $g(2)\approx -0{,}55$ و بما أن $g(1{,}8)\times g(2)<0$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}8<\alpha<2$ مع $g(\alpha)=0$. **0,25**

▪ استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:

II - 0,25

1) حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$: 0,25

لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \left(\dfrac{\ln x}{1+x^2}\right) = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (1+x^2) = 1$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (\ln x) = -\infty$

الصفحة 4

و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{1+x^2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 \times \dfrac{\ln x}{x^2}}{x^2\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\dfrac{\ln x}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}+1}\right) = 0$ 0,25 0,25

– التفسير الهندسي للنهايتين:

- لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty$ ما يعني أن المنحنى (C_f) مستقيم مقارب معادلته $x = 0$ هو حامل محور التراتيب.
- لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ما يعني أن المنحنى (C_f) مستقيم مقارب معادلته $y = 0$ هو حامل محور الفواصل بجوار $+\infty$.

x	0 α $+\infty$
$g(x)$	$+$ 0 $-$

2) أ. لنبيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: 0,5

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$$

لدينا الدالة العددية f معرّفة و قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ تكون: 0,25

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times(1+x^2) - 2x \times \ln x}{(1+x^2)^2} = \frac{\frac{1}{x} + x - 2x\ln x}{(1+x^2)^2} = \frac{x\left(\frac{1}{x}+x-2x\ln x\right)}{x(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2} = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$$ 0,25 0,5

ب. استنتاج إتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]\,0;+\infty\,[$: $x(1+x^2)^2 > 0$ و عليه فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ما يعني أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]\,0;\alpha\,]$ و متناقصة تماما على المجال $[\,\alpha;+\infty\,[$.

▪ تشكيل جدول تغيّرات الدالة f : 0,25

3) لنبيّن أنّ: $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha^2}$: لدينا $g(\alpha) = 0$ يكافئ $1+\alpha^2 - 2\alpha^2 \ln\alpha = 0$ يكافئ $\ln\alpha = \dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$

و من جهة أخرى $f(\alpha) = \dfrac{\ln\alpha}{1+\alpha^2}$ بالتعويض نجد $f(\alpha) = \dfrac{\dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}}{1+\alpha^2} = \dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha^2} \times \dfrac{1}{1+\alpha^2} = \dfrac{1}{2\alpha^2}$

▪ استنتاج حصر للعدد الحقيقي $f(\alpha)$ سعته 10^{-2}: 0,25

لدينا $1{,}8 < \alpha < 2$ يكافئ $3{,}24 < \alpha^2 < 4$ يكافئ $6{,}48 < 2\alpha^2 < 8$

$$\frac{1}{8} < \frac{1}{2\alpha^2} < \frac{1}{6{,}48}$$

x	0 α $+\infty$
$f'(x)$	$+$ 0 $-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $f(\alpha)$ ↘ 0

و عليه فإن حصر للعدد الحقيقي $f(\alpha)$ الذي سعته 10^{-2} هو: 0,25

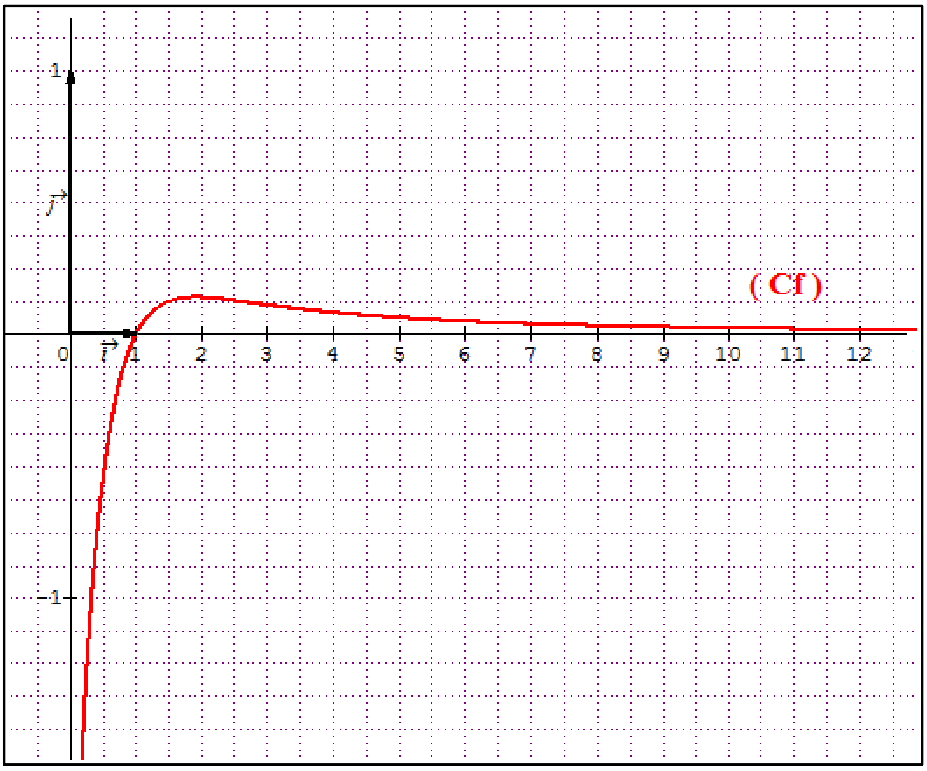
$$0{,}13 < f(\alpha) < 0{,}15$$

4) تعيين إحداثيّي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل:

لدينا $f(x)=0$ تكافئ $\frac{\ln x}{1+x^2}=0$ تكافئ $\ln x=0$ تكافئ $x=1$.

– ما يعني أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $(1;0)$.

- إنشاء المنحنى (C_f): **المنحنى (C_f) 0,5**



III -

1) لنبيّن أنّ الدالة G هي دالة أصلية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$:

لدينا الدالة العددية G معرّفة و قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ تكون: **0,5**

$$G'(x)=\frac{5}{9}\times 3x^2+1-\frac{2}{3}\left(3x^2\ln x+x^3\times\frac{1}{x}\right)=\frac{5}{3}x^2+1-2x^2\ln x-\frac{2}{3}x^2=1+x^2-2x^2\ln x$$

و عليه $G'(x)=g(x)$ ما يعني أن الدالة G هي دالة أصلية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$. **0,25**

2) حساب بدلالة α العدد A_α : لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;\alpha]$: $g(x)\geq 0$ و عليه فإن:

$$A_\alpha=\int_1^\alpha g(x)\,dx=[G(x)]_1^\alpha=G(\alpha)-G(1)$$ و لدينا $G(\alpha)=\frac{5}{9}\alpha^3+\alpha-\frac{2}{3}\alpha^3\ln\alpha$ و $G(1)=\frac{14}{9}$ **0,25**

و عليه $A_\alpha=\frac{5}{9}\alpha^3+\alpha-\frac{2}{3}\alpha^3\ln\alpha-\frac{14}{9}$ μa

إنتهى تصحيح الموضوع.