

الامتحان التجريبي في مادة الرياضيات

قسم 03 رياضيات

المدة : 4 سا و 30 د

دورة ماي 2022

الموضوع الاول

التمرين الاول :

عين في كل حالة الاقتراح الصحيح من بين لاقتراحات (أ) ، (ب) ، (ج) و (د) (التبرير مطلوب)

(1) الكتابة المبسطة للعدد A المعرف ب : $A = \ln(e + e^{-1} + 2) - 2\ln(e + 1)$ هي :

(أ) $A=0$ ، (ب) $A=1$ ، (ج) $A=-1$ ، (د) $A=e$

(2) من اجل كل عدد حقيقي x العدد $2x - \ln(e^x + 3)$ يساوي :

(أ) $3x + \ln(1+3e^{-x})$ ، (ب) $x - \ln(1+3e^{-x})$ ، (ج) $x + \ln(1+3e^{-x})$ ، (د) $3x - \ln(1+3e^{-x})$

(3) عدد حلول المعادلة $e^x - 3e^{-x} = -2$ في R هو :

(أ) 1 ، (ب) 2 ، (ج) 4 ، (د) 0

(4) النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{4} \left[\frac{e^{3x} - 1}{5x} \right]$ تساوي :

(أ) $\frac{3}{4}$ ، (ب) $\frac{3}{5}$ ، (ج) $\frac{5}{3}$ ، (د) $\frac{9}{20}$

(5) نعرف من اجل كل عدد طبيعي n المجموع $S = e^{\ln 5} + e^{2\ln 5} + e^{3\ln 5} + \dots + e^{n\ln 5}$ و منه :

(أ) $S = 5^{n+1} - 1$ ، (ب) $S = \frac{5}{4}(1 - 5^n)$ ، (ج) $S = \frac{1}{4}(1 - 5^{n+1})$ ، (د) $S = \frac{5}{4}(5^{n+1} - 1)$

التمرين الثاني :

(1) احسب القاسم المشترك الاكبر للعددين $4^5 - 1$ و $4^6 - 1$

(2) نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على N ب : $u_0 = 0$ و $u_1 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n $U_{n+2} = 5U_{n+1} - 4U_n$

(أ) احسب الحدود : u_2 ، u_3 و u_4

(ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 4U_n + 1$

(ت) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان U_n عدد طبيعي ، ثم استنتج $\text{PGCD}(U_n ; U_{n+1})$

(3) لتكن (V_n) متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n ب : $V_n = U_n + \frac{1}{3}$

(أ) بين ان (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها و حدها الاول .

(ب) اكتب بدلالة العدد الطبيعي n عبارة V_n ثم عبارة U_n

(ت) عين من اجل كل عدد طبيعي n : $\text{PGCD}(4^{n+1} - 1 ; 4^n - 1)$

التمرين الثالث :

(1) نعتبر في المجموعة Z^2 المعادلة (E) ذات المجهول $(x ; y)$ حيث : $4x - 9y = 5$

(أ) بين انه اذا كانت الثنائية $(x ; y)$ حلا للمعادلة (E) فان : $8 \mid 9x$ ، ثم استنتج حلول المعادلة (E)

(ب) α عدد طبيعي يكتب 43 في نظام التعداد الذي اساسه x و يكتب 98 في نظام التعداد الذي اساسه y حيث $x \leq 35$

و $y \leq 15$

(أ) عين القيم الممكنة ل x و y ثم اكتب α في النظام العشري

(ب) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 4^n على 9

(2) عين الثنائيات $(x ; y)$ من N^2 حلول المعادلة (E) حيث : $2011^x + 4^y + 7 \equiv 0 \pmod{9}$

(أ) نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث : $a = 9n + 8$ و $b = 4n + 3$ و ليكن d قاسمهما المشترك الاكبر حيث n عدد طبيعي

(ب) ما هي القيم الممكنة ل d

(ت) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $d = 5$

(3) من اجل كل عدد طبيعي n ، نضع $A = 9n^2 + 17n + 8$ و $B = 4n^2 + 7n + 3$

(أ) بين ان العدد $(n+1)$ يقسم كل من A و B

(ب) استنتج حسب قيم n القاسم المشترك الاكبر للعددين A و B

التمرين الرابع :

I. لتكن الدالة u المعرفة على $]0 ; +\infty[$ ب : $u(t) = 3 \ln(1+t) - \frac{t}{1+t}$

عين اتجاه تغير الدالة u :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 [\ln(1+x) - \ln x] ; x \in]0 ; 1[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(1) ليكن الدالة f المعرفة على $]0 ; 1[$ ب :

اثبت ان f قابلة للاشتقاق علي يمين 0

تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي $x \in]0 ; 1[$ $f'(x) = x^2 u\left(\frac{1}{x}\right)$

عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيرات الدالة f
 II. نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على $[0; 1]$ ب :

$$\begin{cases} g(x) = x^3 \ln(x+1) & x \in]0; 1[\\ h(0) = 0 \end{cases}$$

و ليكن على الترتيب (C_f) ، (C_g) و (C_h) منحنيات الدوال f ، g و h في معلم متعامد و متجانس (o, \vec{i}, \vec{j}) بحيث : $i =$ 4cm

(أ) تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x من $[0, 1]$: $f(x) = g(x) - h(x)$

(ب) عين الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_g)

(1) ليكن (T) و (T') مماسين ل (C_f) و (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة $e^{-\frac{1}{3}}$ على الترتيب

اثبت ان (T) و (T') متوازيان

(2) انشئ المنحنى (C_f)

(3) لتكن H الدالة الاصلية الوحيدة ل h على المجال $[0, 1]$ و التي تنعدم عند 1

ليكن $\alpha \in]0; 1[$ و $A\alpha = \int_{\alpha}^1 x^3 \ln x dx$ عبر عن $A\alpha$ بدلالة الدالة H

احسب $A\alpha$ باستعمال التكامل بالتجزئة ثم استنتج $H(0)$

(4) عين مساحة الحيز من المستوي المحدة بالمنحنيين (C_f) و (C_g) و المستقيمين ذو المعادلتين $x=0$ و $x=1$

الموضوع الثاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)

- (1) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7.
ب- ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد $2017^{4n+2} + 2019^{6n+4}$ على 7
- (2) نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : $343x - 648y = 76$ (E).
أ- بين أن المعادلة (E) تقبل حلولاً في Z^2
ب- حل في Z^2 المعادلة (E).
- (3) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير معدومين x و y غير حلول المعادلة (E).
أ- ماهي القيم الممكنة للعدد d .
ب- عين الثنائيات $(x ; y)$ من الأعداد الطبيعية بحيث يكون $d = 76$.
- (4) عدد طبيعي يكتب $\beta 1 \alpha \beta$ في نظام التعداد ذي الأساس 7، ويكتب $\alpha 1 \alpha \beta$ في نظام التعداد ذي الأساس 5.
جد العددين α و β ، ثم أكتب γ في النظم التعداد ذي الأساس 6.

التمرين الثاني: (04 نقاط).

- يحتوي كيس غير شفاف على أربع كريات حمراء تحمل الأرقام: 0، 0، 1، 2، وأربع كريات خضراء تحمل الأرقام 1، 1، 1، 2 وكرتين سوداوين تحملان الرقمين 1، 2. (وكل الكريات متماثلة ولا يمكن التمييز بينها عند لمسها).
- نسحب عشوائياً من الكيس ثلاث كريات على التوالي بدون إرجاع:
- نعتبر الأحداث التالية:
- A: الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون.
B: الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس الرقم.
C: الحصول على ثلاث كريات جداء الأرقام المسجلة عليها غير معدوم.

- 1- احسب الاحتمالات التالية: $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(A \cap B)$ ، $P(A \cup B)$ ، و $P(C)$
2- نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل تجربة جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة.
- حدد قيم X الممكنة، ثم عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .
3- احسب الاحتمال: $P(e^{x^2-x} > 1)$.

التمرين الثالث:

(U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $U_0 = \frac{7}{4}$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{3}{8}$

(1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > \frac{3}{4}$

ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة؟

(2) (V_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما $V_n = \alpha \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(U_n - \frac{\alpha}{4}\right)$

أ- عين قيم العدد الحقيقي α حتى تكون (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

ب- من أجل $\alpha = 3$ عبر عن V_n بدلالة n .

(3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n $U_n = t_n + \frac{3}{4}$ حيث (t_n) متتالية هندسية ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

(4) أ- عبر عن P_n بدلالة n حيث: $P_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$

ب- أكتب S_n بدلالة n حيث: $S_n = \frac{V_0}{U_0 - \frac{3}{4}} + \frac{1}{U_1 - \frac{3}{4}} + \dots + \frac{V_n}{U_n - \frac{3}{4}}$

التمرين الرابع:

الجزء الأول: الدالة g معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$

1- ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$

2- برر وجود عدد حقيقي α حيث $g(\alpha) = 0$. ثم اوجد قيمة مقربة لـ α مدور إلى 10^{-3}

الجزء الثاني: الدالة f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = 2x - \frac{\ln x}{2}$

(C_f) منحنى f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس (j, i, o) بحيث $(i = \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \end{matrix} = 2 \text{ cm})$

1- احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2- أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) ذو المعادلة $y = 2x$

3- أ- بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

ت- شكل جدول التغيرات الدالة f

4- أرسم (Δ) و (C_f)

الجزء الثالث: ليكن n عدد طبيعي غير معدوم وليكن I_n الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و (Δ) والمستقيمين ذو

المعادلتين $x=1$ و $x=n$

1- برر أن هذه المساحة معطاة بـ: $I_n = \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx$

- 2- أ- تأكد أن الدالة $F_X \rightarrow \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$ هي دالة أصلية للدالة $\rightarrow \frac{\ln x}{x^2}$ على المجال $]0; +\infty[$
- ت- استنتج عبارة I_n بدلالة n
- 3- احسب نهاية المساحة I_n لما n تؤول إلى $+\infty$