الموضوع الثاني

التمرين الأول:(05 نقاط)

المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـــ : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2+2^n.u_n}$.

1) احسب u_1 .

2) أ – بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>0$.

ب – ادرس رتابة المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

3) نعرف على $\mathbb{N}$ المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n=\dfrac{1}{2^n.u_n}$.

أ – برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول v_0 .

ب – اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n=\dfrac{1}{(n+2)2^{n-1}}$.

ج – احسب : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=u_0.v_0+u_1.v_1+......+u_n.v_n$.

أ– بين أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $S_n=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

ب– عين أكبر قيمة للعدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $S_n\le 1{,}9999$.

التمرين الثاني:(05 نقاط)

يحتوي صندوق على أربع كريات سوداء و كرية واحدة بيضاء (كل الكريات متماثلة ولا فرق بينها عند اللمس) .

✍ نعتبر اللعبة التالية : يقوم اللاعب برمي زهر نرد متزن مرقم من 1 إلى 6 ، إذا كان الرقم الظاهر فرديا نضيف كرية بيضاء في الصندوق و إذا كان الرقم الظاهر زوجيا نضيف كرية سوداء في الصندوق ، بعد ذلك يسحب اللاعب في **آن واحد** ثلاث كريات من الصندوق .

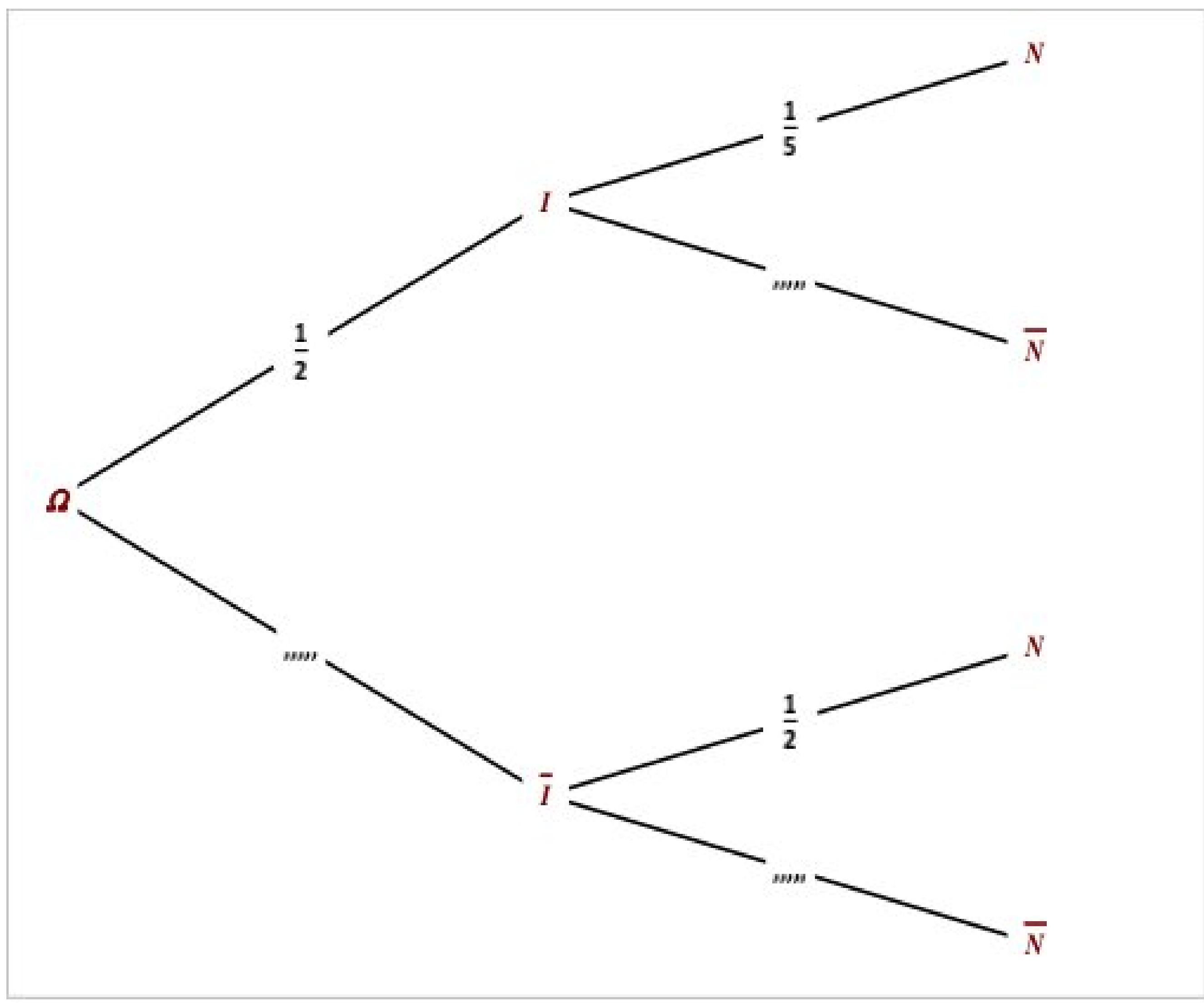
☜ نعتبر الأحداث التالية : I " الرقم الظاهر فردي" ، N " الكريات الثلاث المسحوبة سوداء " .

1) احسب الإحتمالات : $P(I)$ ، $P_I(N)$ ، $P_{\overline{I}}(N)$ و $P(N\cap I)$.

2) أ – أنقل شجرة الإحتمالات المقابلة التي تنمذج هذه التجربة ثم أكملها .

ب – بين أن : $P(N)=\dfrac{7}{20}$.

3) علما أن الكريات المسحوبة كلها سوداء ، ما إحتمال أن يكون الرقم الظاهر زوجيا ؟ .



4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

أ – بين أن : $P(X=1)=\frac{11}{20}$.

ب – عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

جـــ – أعط تقديرا للقيمة المتوسطة لعدد الكريات البيضاء المسحوبة ، ثم استنتج التباين $V(X)$.

التمرين الثالث:(03 نقاط)

نعتبر التكاملين التاليين : $I=\int_0^{\ln 2}\frac{3e^x+2}{e^x+1}dx$ و $J=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}+3e^x+1}{e^x+1}dx$.

1) أ ـ تحقق أن : $I-J=\int_0^{\ln 2}\left(1-e^x\right)dx$.

ب ـ استنتج أن : $I-J=\ln 2-1$.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\frac{e^{2x}+3e^x+1}{e^x+1}=e^x+1+\frac{e^x}{e^x+1}$.

3) احسب J ، ثم استنتج I .

التمرين الرابع:(07 نقاط)

I) الدالة g معرفة على $]0;+\infty[$ بـــ : $g(x)=\frac{\ln x}{x}+1$.

1) احسب نهايتي الدالة g عند حدود مجموعة تعريفها .

2) ادرس إتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها .

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $]0,5;0,6[$.

4) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من الجال $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+x-1$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستو المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب كلا من : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}f(x)$ و فسر بيانيا النهاية عند 0 .

2) أ – بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ فإن : $f'(x)=g(x)$.

ب – استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

3) أ – اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

ب – ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (T) .

4) أنشئ (T) ، ثم مثل (C_f) . (نضع : $f(\alpha)\approx-0,3$)

5) الدالة h معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــــ : $h(x)=-\frac{1}{2}(\ln|x|)^2-|x|+1$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ – اثبت أن الدالة h زوجية .

ب – اشرح كيفية تمثيل المنحنى (C_h) انطلاقا من (C_f) ، ثم مثله .

6) m وسيط حقيقي ، نعتبر المستقيمات (Δ_m) المعرفة بالمعادلة : $y=mx-m$.

أ – بين أن جميع المستقيمات (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثييها .

ب – ناقش بيانيا و حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=mx-m$.

7) أ – بين أن الدالة $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$.

ب – باستعمال التكامل بالتجزئة عبر عن العدد $A(\lambda)$ بدلالة λ حيث : $0<\lambda<1$ و $A(\lambda)=\int_{\lambda}^{1}(\ln x)^2\,dx$.

جـ – احسب بدلالة λ مساحة الحيز المستو المحدد بالمنحني (C_f) ، المماس (T) و المستقيمين اللذين معادلتهما : $x=1$ ، $x=\lambda$.

إنتهى الموضوع الثاني