

(I) نعتبر الدالة العددية  $h$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ :  $h(x) = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$  وجدول تغيراتها

$x$	0	$\alpha$	$e$	$+\infty$
$h'(x)$		+	0	-
$h(x)$			$1 + \frac{2}{e}$	1

(1°) بين أن :  $0.7 < \alpha < 0.8$

(2°) استنتج إشارة  $h(x)$  حسب قيم العدد الحقيقي  $x$

(II) لتكن الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ :  $g(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$

و  $(C_g)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1°) أحسب :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  ثم فسر النتيجة هندسيا

(2°) أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  ثم شكل جدول تغيراتها

(III) لتكن الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ :  $f(x) = g(x) + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المعلم السابق

(1°) بين أن  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  ، أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم فسر النتيجة هندسيا

(2°) أ° بين أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) = g'(x) \times h(x)$  حيث  $f'$  مشتقة الدالة  $f$

ب° استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$

ج° بين أن  $f(\alpha) = \frac{3}{4}$  ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$

(3°) أ° أدرس الوضع النسبي للمنحنيين  $(C_g)$  و  $(C_f)$

ب° أحسب :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)]$

ج° ماذا يمكن القول عن المنحنيين  $(C_g)$  و  $(C_f)$  ؟

(4°) أرسم  $(C_g)$  و  $(C_f)$  في نفس المعلم

### التمرين الثاني: 5

نعتبر المعادلة التفاضلية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $y' - y = 2e^x - 1$  (1)

أ° عين العددين الحقيقيين  $a$  ،  $b$  بحيث تكون الدالة :  $U : x \rightarrow axe^x + b$  حلا للمعادلة التفاضلية (1)

ب° نضع :  $a = 2$  و  $b = 1$

(1°) عين حلول المعادلة التفاضلية :  $y' - y = 0$  (2)

(2°) أثبت أن : الدالة  $V$  حل للمعادلة التفاضلية (1) اذا وفقط اذا كانت الدالة  $V - U$  حلا للمعادلة التفاضلية (2)

(3°) أ° استنتج مجموعة الدوال  $V$  حلول المعادلة التفاضلية (1)

ب° عين الدالة  $f$  حيث :  $f$  حلا للمعادلة التفاضلية (1) و تحقق  $f(0) = -1$

## التمرين الثالث: 7ن

I) نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = 2(x-1)e^x + 1$

1° أحسب نهايتي الدالة  $f$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$

2° أ°/ أحسب  $f'(x)$  حيث  $f'$  مشتقة الدالة  $f$

ب°/ استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها

3° بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين فقط  $\alpha$  و  $\beta$  حيث :  $0.7 < \alpha < 0.8$  و  $-1.7 < \beta < -1.6$

II) المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

ليكن  $(C_{\exp})$ ،  $(C_g)$  التمثيلين البيانيين للدالتين  $\exp: x \rightarrow e^x$  ،  $g: x \rightarrow 1 - e^{-x}$  على الترتيب

و  $(T_a)$  مماساً للمنحني  $(C_{\exp})$  عند النقطة  $A$  ذات الفاصلة  $a$

و  $(T_b)$  مماساً للمنحني  $(C_g)$  عند النقطة  $B$  ذات الفاصلة  $b$

1° أكتب معادلة لكل من المماسين  $(T_a)$  و  $(T_b)$

2° أثبت أن المماسين  $(T_a)$  و  $(T_b)$  متطابقان معناه  
و  
 $2(a-1)e^a + 1 = 0$

3° استنتج عدد المماسات المتطابقة للمنحنيين  $(C_{\exp})$  و  $(C_g)$

$$f(x) = g(x) + e \frac{\ln x}{x} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^1$$

$$= g'(x) + e \frac{\ln x}{x} (g(x)-1)$$

$$= g'(x) + \frac{e \ln x}{x} g(x)$$

$$= g'(x) \left(1 + \frac{e \ln x}{x}\right)$$

$$= g'(x) h(x)$$

x	0	α	e	+∞
h(x)	-	0	+	+
g'(x)	+	+	0	-
f'(x)	-	0	+	-

الدالة متزايدة تماما في المجال [α, e] ومتناقصه تماما على كل من المجالين [0, α] و [e, +∞[

$$f(x) = g(x) + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$$

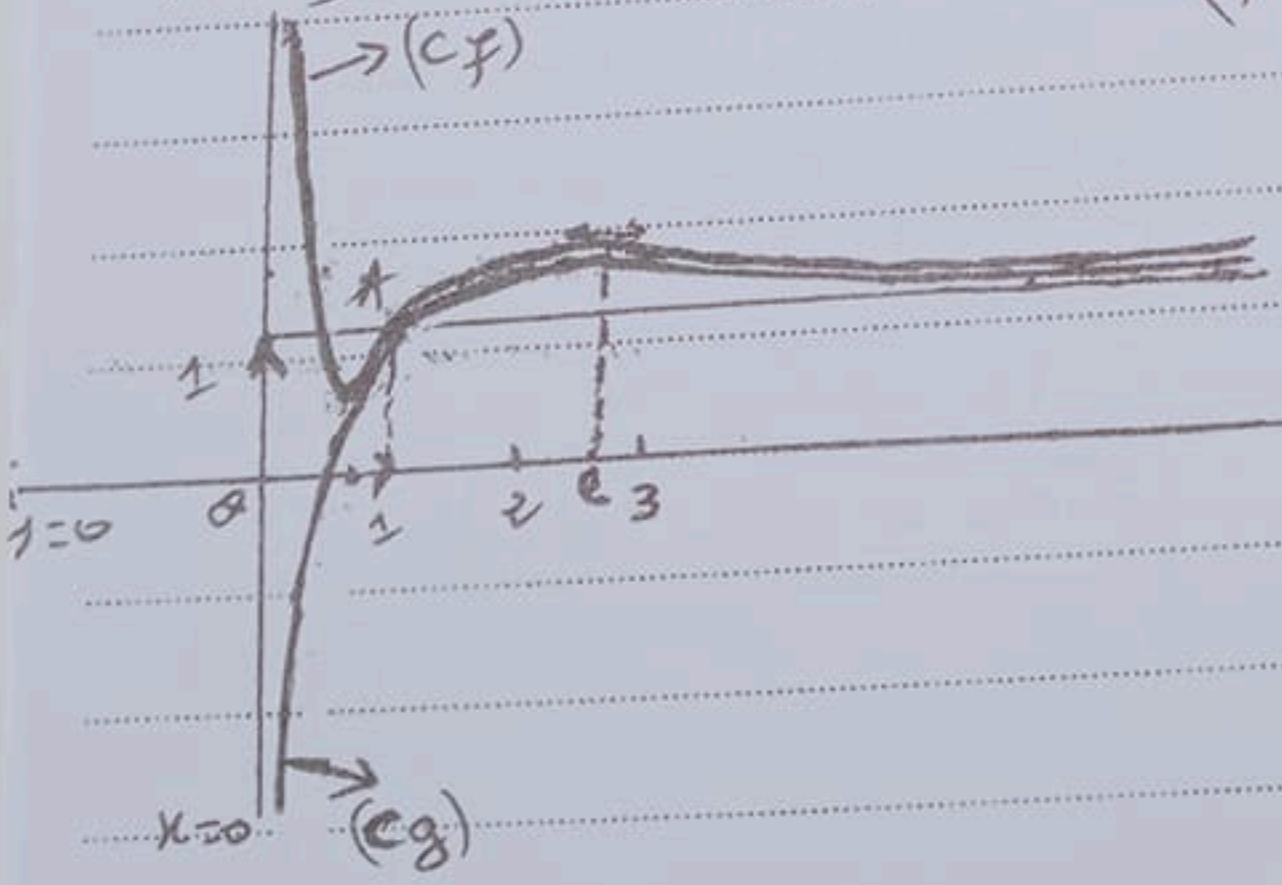
$$= \frac{h(x)+1}{e} + \left[\frac{h(x)-1}{e}\right]^2$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{e} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

x	0	α	e	+∞
f(x)	-	0	+	-

→ 3/4, 1+e/e^2 = 1/5

(Cf) فوتر (Cg) ولا يوجد في النقطة A(1,1)  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$   
 (Cf) تقارب (Cg) من الاعلى نحو (1,1)  
 (Cg) تقارب (Cf) من الاعلى نحو (1,1)



التحليل الأول  
 $h(x) = 1 + \frac{e \ln x}{x} \quad | x \in ]0, +\infty[$   
 لدينا الدالة متزايدة تماما على المجال [0, e] متناقصه و متزايدة تماما على المجال [e, +∞[  
 على المجال [0, e]

$$f(0.8) = 0.44 \text{ و } f(0.7) = -0.02$$

المعادلة  $h(x) = 0$  تملك حلا واحدا في المجال [0, e]

x	0	α	+∞
h(x)	-	0	+
g(x)	1 + ln x / x		
lim g(x)	-∞		
x → 0			

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

مقارن (Cg) مع  $x=0$   
 مقارن (Cg) مع  $y=1$   
 $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$g(x) > 0 \Rightarrow 1 - \ln x > 0$   
 $\ln x < 1$  اذا

الدالة متزايدة تماما في المجال [0, e] ومتناقصه تماما على المجال [e, +∞[

x	0	e	+∞
g'(x)	+	0	-
g(x)	1 + ln x / x		

$$f(x) = g(x) + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \quad | x \in ]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{\ln x}{x} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{\ln x}{x} \left[1 + \frac{\ln x}{x}\right]\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

مقارن (Cg) مع  $x=0$   
 مقارن (Cg) مع  $y=1$

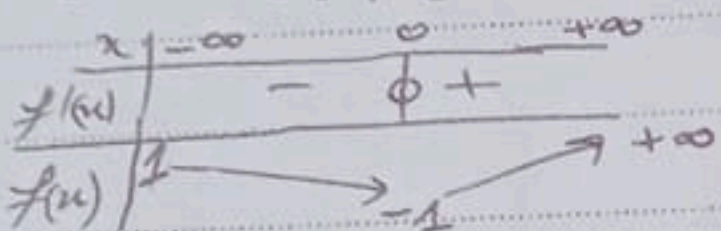


التمرين الثالث I  
 $f(x) = 2(x-1)e^x + 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2(1 - \frac{1}{x})xe^x + 1 = 1$

$f'(x) = (2x - 2 + 2)e^x = 2xe^x$

ب) الدالة  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $[0, +\infty[$  ومتناقصة تماماً على المجال  $] -\infty, 0]$



لدينا الدالة  $f$  متزايدة ومتناقصة تماماً على المجال  $]0, 7[$

$f(0,8) \approx 0,11$  و  $f(0,7) \approx -0,21$

ومن  $f(0,7) \times f(0,8) < 0$

لذلك حسب مبرهنة المماس  $f(x) = 0$  يقبل حلاً وسطياً  $\alpha$  بين  $0,7$  و  $0,8$

لدينا الدالة  $f$  متزايدة ومتناقصة تماماً على  $[-1,7[$

$f(-1,6) \approx -0,05$  و  $f(-1,7) \approx 0,13$

ومن  $f(-1,6) \times f(-1,7) < 0$

لذلك حسب مبرهنة المماس  $f(x) = 0$  يقبل حلاً وسطياً  $\beta$  بين  $-1,6$  و  $-1,7$

(Ta):  $y = e^a(x-a) + e^a = e^a x + e^a - ae^a$

(Tb):  $y = e^{-b}(x-b) + 1 = e^{-b} x - be^{-b} + 1$

$e^{-b} = e^a$  و  $-be^{-b} + 1 = e^a - ae^a$

$b = -a$  و  $ae^a - e^a + 1 = e^a - ae^a$

$b = -a$  و  $2ae^a - 2e^a + 1 = 0$

$b = -a$  و  $2(a-1)e^a + 1 = 0$

3) حسب الخرج (I)  $2(a-1)e^a + 1 = 0$

حيث  $f(a) = 0$  وهي يقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$  ومنه عدد المماسات هو اثنين

(1)  $y' - y = 2e^x - 1$   
 $U(x) = axe^x + b$

الذات  $U$  حلاً للمعادلة (1) من أجل  $x \in \mathbb{R}$

$U'(x) - U(x) = 2e^x - 1$  ;  $\mathbb{R} \ni x$

من أجل  $x \in \mathbb{R}$

$U'(x) - U(x) = (ax + a)e^x - axe^x - b = ae^x - b$

بالمطابقة نجد  $a = 2$  و  $b = 1$

$U(x) = 2xe^x + 1$

(2)  $y' - y = 0$

حلول المعادلة (1) هي الدوال المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $x \rightarrow ce^x$  /  $c \in \mathbb{R}$

$x \rightarrow ce^x$  /  $c \in \mathbb{R}$

نفرض أن  $v$  حلاً للمعادلة (1)

$v'(x) - v(x) = 2e^x - 1$

$U'(x) - U(x) = 2e^x - 1$

$(v-U)(x) - (v-U)(x) = 0$

ومن  $v-U$  حلاً للمعادلة (2)

نفرض  $v, U$  حلاً للمعادلة (2)

$v'(x) - U'(x) - v(x) + U(x) = 0$

ومن  $v'(x) - v(x) = U'(x) - U(x)$

$= 2e^x - 1$

لذلك  $U$  حلاً للمعادلة (1)

لدينا  $v-U$  حلاً للمعادلة (2)

و  $v(x) - U(x) = ce^x$

$v(x) = ce^x + 2xe^x + 1$

$c + 1 = -1$  و  $v(0) = -1$

$c = -2$

$f(x) = -2e^x + 2xe^x + 1$

$f(x) = 2(x-1)e^x + 1$

